

ブラックホールの星空

高橋 勇太 (理研)

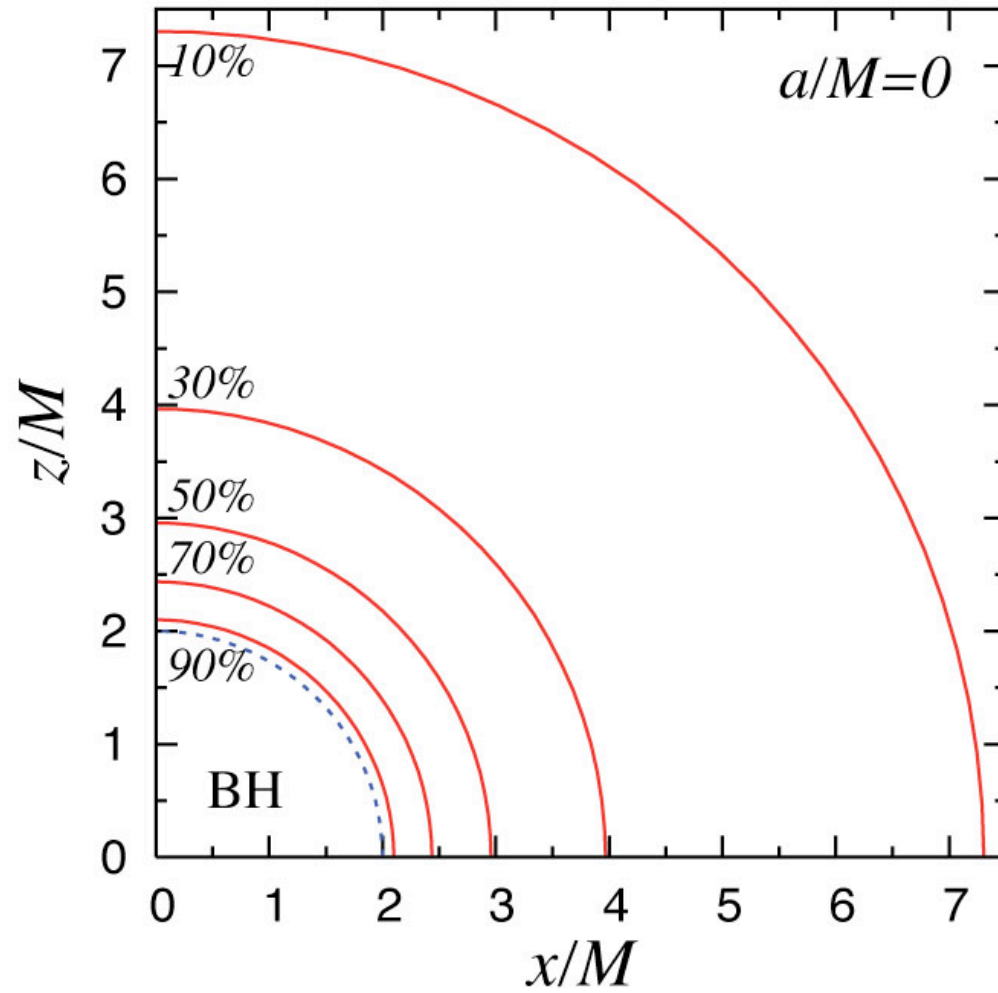
というタイトルになっていますが、話すことは

1. BH“近傍”の観測者が見るBH
2. BH“近傍”の光子が捕獲される / 遠方に逃げる割合
- * 3. 測地線方程式を解く技術 (1) : Kerr時空
- * 4. 測地線方程式を解く技術 (2) : 一般時空
- * 5. 一般相対論的輻射輸送 (1) : ray-tracing法
- * 6. 一般相対論的輻射輸送 (2) : より一般の場合

です。1.と2.の文献は

R.Takahashi & M.Takahashi, 2010, A&A in press (astro-ph:1002.XXXX)
3.-6.の技術の一部は過去の文献にあります。

BHに光子が捕獲される割合



Thorne (1974)

EFFICIENCY FOR CONVERTING ACCRETED MASS INTO OUTGOING RADIATION

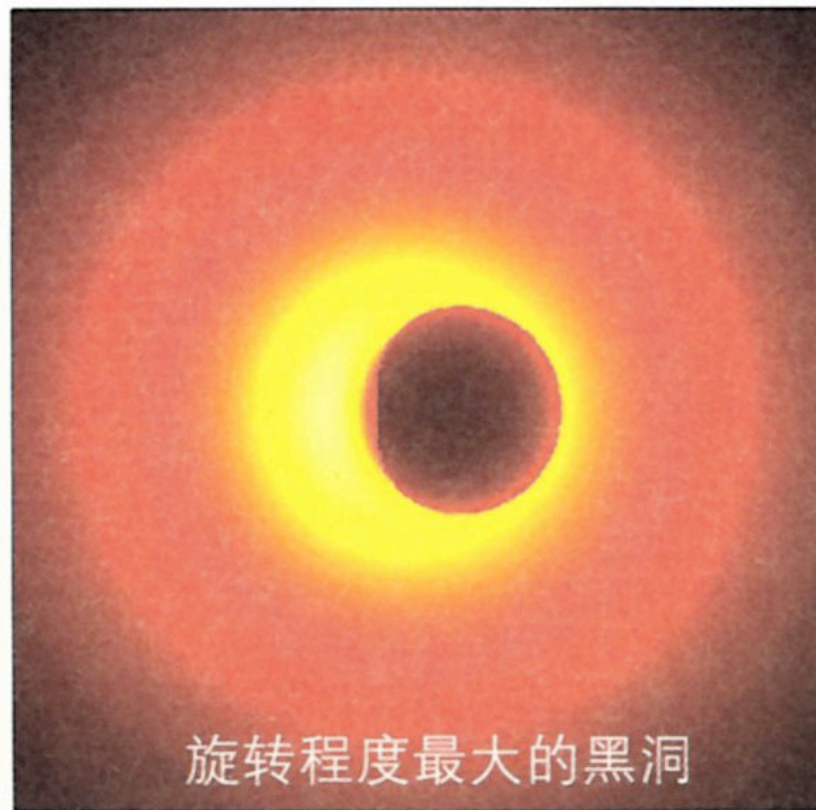
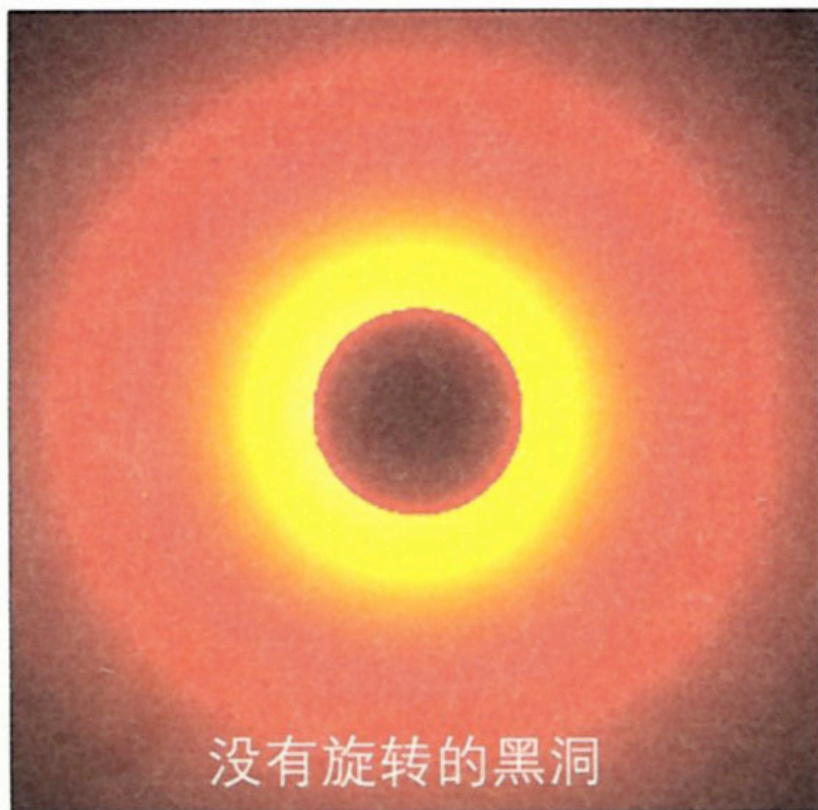
| $a_* = a/M$ | Type of Hole | Efficiency, Ignoring Capture of Radiation by Hole* | Efficiency with Capture of Radiation by Hole |
|-------------|--|--|--|
| 0..... | Schwarzschild | 0.0572 | 0.0570 |
| 0.9978..... | “Canonical,” with isotropic emission (eq. [5a]) | 0.318 | 0.302 |
| 0.9982..... | “Canonical,” with electron-scattering atmosphere (eq. [5b]) | 0.324 | 0.308 |
| 1.0..... | Extreme Kerr, with isotropic emission (eq. [5a]) | 0.423 | 0.399 |
| 1.0..... | Extreme Kerr, with electron-scattering atmosphere (eq. [5b]) | 0.423 | 0.400 |

* Equal to $1 - E_{ms}^+$.

Thorne (1974) : アルゴリズム

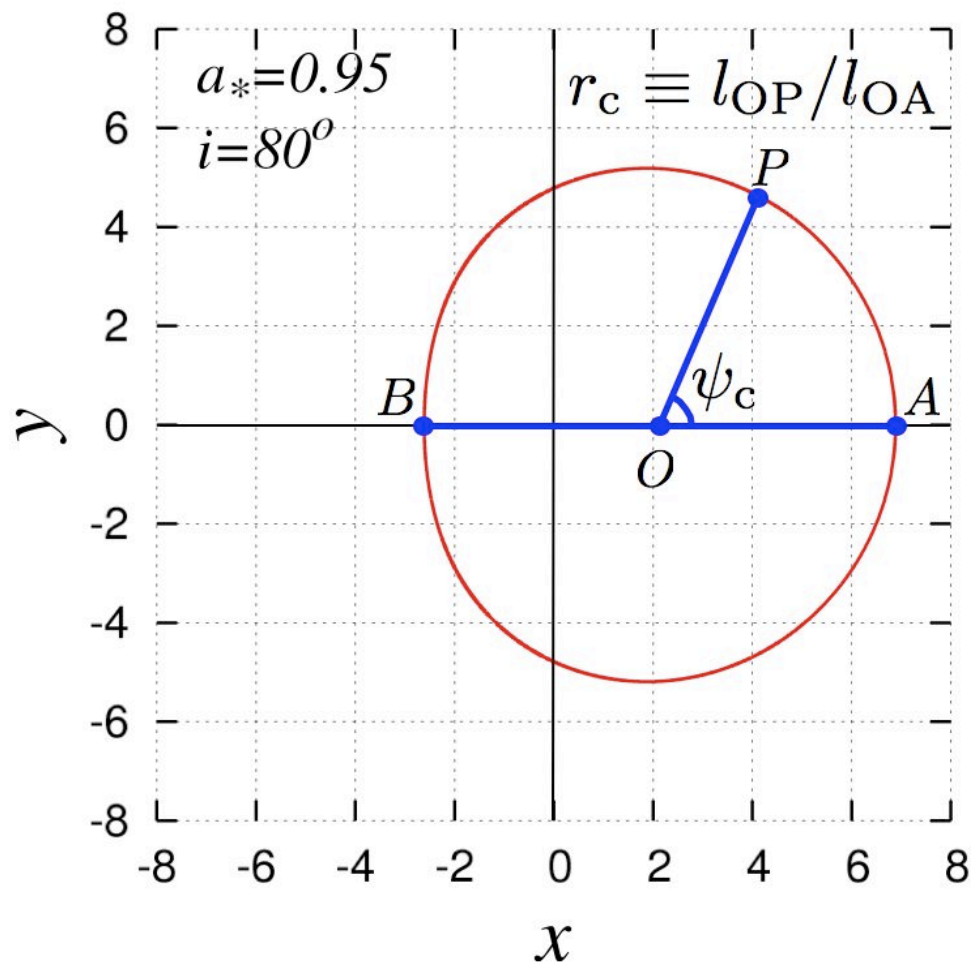
- i) Specify Θ and Φ , and set $C = 1$.
- ii) If $[j < -(r_+/M)^2]$ & $[(r/M) \leq (-j)^{1/2}]$, then terminate.
- iii) If $[j < -(r_+/M)^2]$ & $[(r/M) > (-j)^{1/2}]$, then set $C = 0$ and terminate.
- iv) Calculate R_m using equations (A14), and calculate $V(R_m)$ using equation (A12b).
- v) If $[r < R_m]$ & $[\cos \Phi > 0]$ & $[1/k > V(R_m)]$, then set $C = 0$ and terminate.
- vi) If $[r > R_m]$ & $[\cos \Phi > 0]$, then set $C = 0$ and terminate.
- vii) If $[r > R_m]$ & $[\cos \Phi < 0]$ & $[1/k < V(R_m)]$, then set $C = 0$ and terminate.
- viii) Terminate.

無限遠から見たBHの影のイメージ



- 影の形状は時空計量を直接反映する。

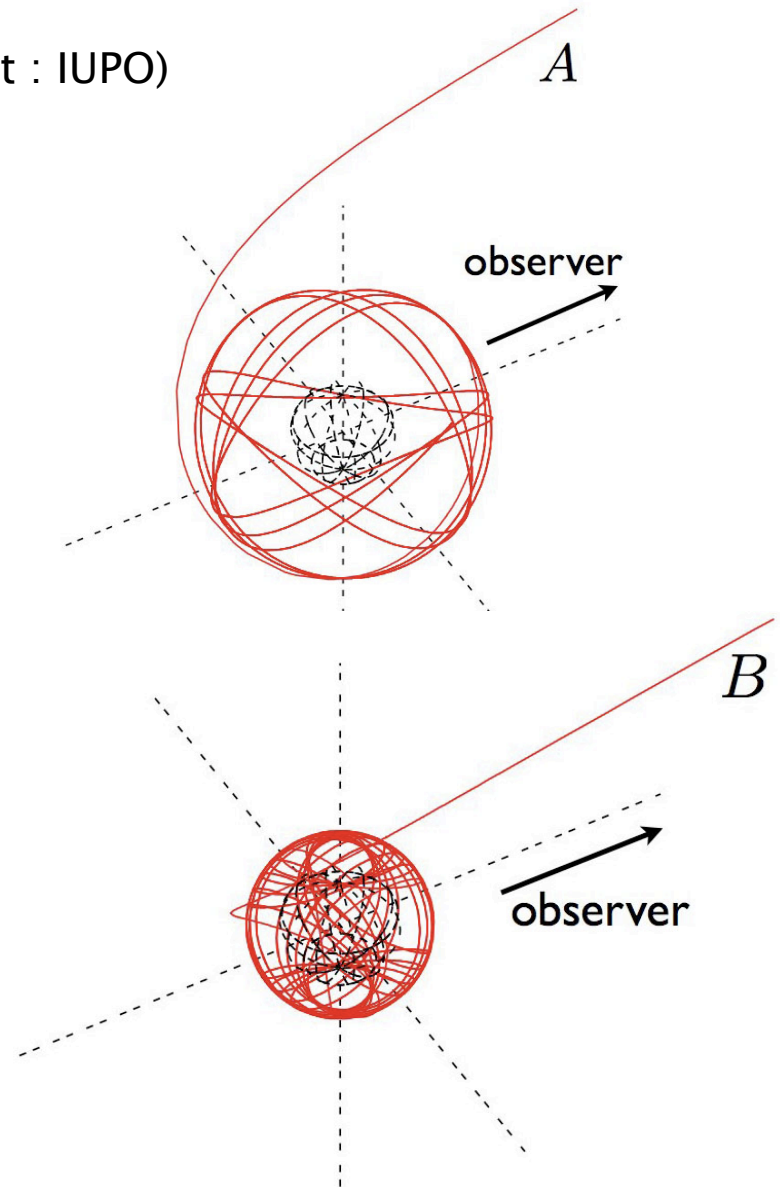
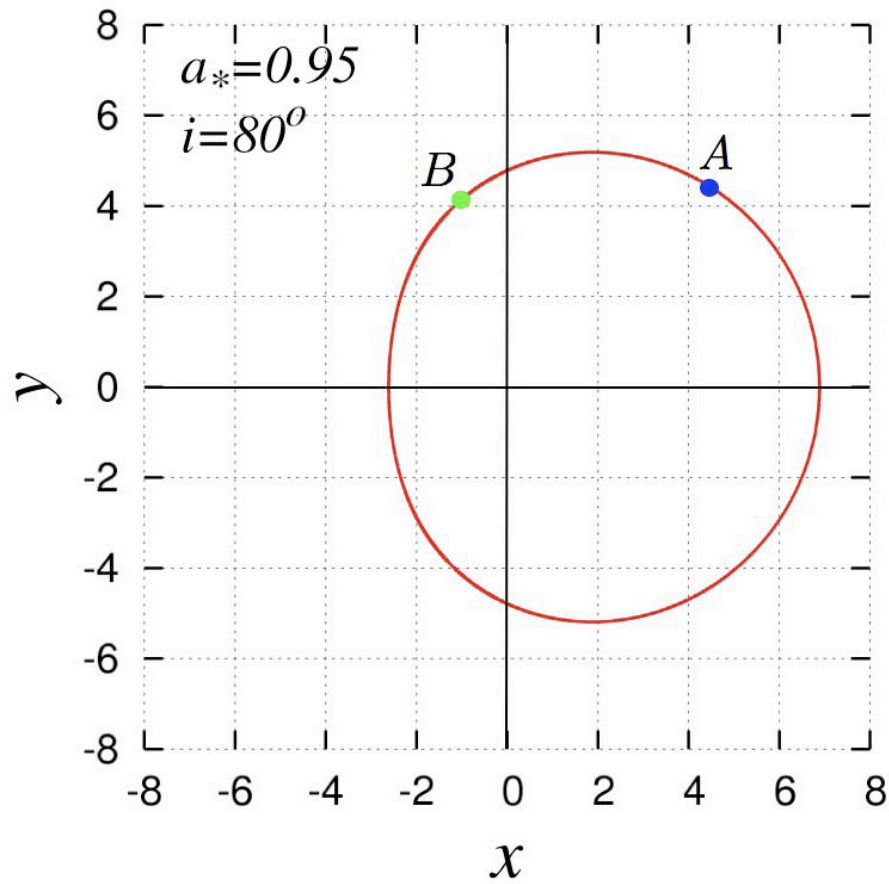
無限遠から見たBHの影の輪郭



- 影の形状は時空計量を直接反映する。

BHの影と最内不安定光子軌道

(Innermost Unstable Photon Circular Orbit : IUPO)



ヌル測地線

* Boyer-Lindquist座標

球座標ボイヤー・リンキスト座標で表したカー計量の計量成分 $g_{\alpha\beta}$ は、

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1)$$

$$= -\frac{\Delta \rho^2}{A} dt^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - \omega dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (2)$$

となる。ここで、

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad \omega = \frac{2Mar}{A}, \quad (3)$$

* Boyer-Lindquist座標で書かれたKerr時空のヌル測地線方程

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} &= \sqrt{\Theta}, & \Theta &= Q - \cos^2 \theta [a^2(m^2 - E^2) + L_z^2 / \sin^2 \theta], \\ \rho^2 \frac{dr}{d\lambda} &= \sqrt{R}, & R &= E(r^2 + a^2) - L_z a - eQr, \\ \rho^2 \frac{d\phi}{d\lambda} &= -(aE - L_z / \sin^2 \theta) + (a/\Delta)P, & P &= P^2 - \Delta [m^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + Q], \\ \rho^2 \frac{dt}{d\lambda} &= -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta} \end{aligned}$$

無次元化

$$\Theta(\theta) \equiv \mathcal{Q} - \cos^2 \theta (-a^2 E^2 + L_z^2 / \sin^2 \theta) \quad (15)$$

$$R(r) \equiv [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta [(L_z - aE)^2 + \mathcal{Q}] \quad (16)$$

$$= E^2 r^4 - (\mathcal{Q} + L_z^2 - a^2 E^2) r^2 + 2M[\mathcal{Q} + (L_z - aE)^2] r - a^2 \mathcal{Q} \quad (17)$$

である。ここで新たに

$$r_* \equiv \frac{r}{M}, \quad a_* \equiv \frac{a}{M}, \quad \Delta_* \equiv \frac{\Delta}{M^2} = r_*^2 - 2r_* + a_*^2, \quad A_* \equiv \frac{A}{M^4}, \quad \omega_* \equiv \omega M, \quad \rho_*^2 \equiv \frac{\rho^2}{M^2}, \quad (18)$$

及び

$$\zeta \equiv \frac{L_z}{ME}, \quad \eta \equiv \frac{\mathcal{Q}}{M^2 E^2}, \quad R_*(r_*) \equiv \frac{R(r)}{E^2 M^4}, \quad \Theta_*(\theta) \equiv \frac{\Theta(\theta)}{M^2 E^2} \quad (19)$$

を定義すると

$$R_*(r_*) = [(r_*^2 + a_*^2) - a_* \zeta]^2 - \Delta_* [(\zeta - a_*)^2 + \eta] \quad (20)$$

$$= r_*^4 - (\eta + \zeta^2 - a_*^2) r_*^2 + 2[\eta + (\zeta - a_*)^2] r_* - a_*^2 \eta \quad (21)$$

$$\Theta_*(\theta) = \eta - \cos^2 \theta (-a_*^2 + \zeta^2 / \sin^2 \theta) = \eta + a_*^2 \cos^2 \theta - \zeta^2 \cos^2 \theta / \sin^2 \theta \quad (22)$$

$$= \eta + (a_* - \zeta)^2 - (a \sin \theta - \zeta / \sin \theta)^2 \quad (23)$$

又ル測地線と最内不安定光子軌道(IUPCO)

*最内不安定光子軌道

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0 \quad \therefore \quad R(r) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dR}{dr} = 0$$

r 方向の運動での不安定軌道半径は

$$R_*(r_*) = 0 \quad \text{かつ} \quad \partial_{r_*} R(r_*) = 0 \quad (26)$$

から計算される。具体的には、

$$r_*^4 + (a_*^2 - \eta - \zeta^2)r_*^2 + 2[\eta + (\zeta - a_*)^2]r_* - a_*^2\eta = 0 \quad (27)$$

$$2r_*^3 + (a_*^2 - \eta - \zeta^2)r_* + [\eta + (\zeta - a_*)^2] = 0 \quad (28)$$

この2式より、

$$a_* \neq 0 \text{ のとき} \quad \zeta = \frac{r_*^2 - a_*^2 - r_*\Delta_*}{a_*(r_* - 1)}, \quad \eta = \frac{r_*^3}{a_*^2(r_* - 1)^2} [4\Delta_* - r_*(r_* - 1)^2] \quad (29)$$

$$a_* = 0 \text{ のとき} \quad \eta + \zeta^2 = 27, \quad r = 3 \quad (30)$$

LNRF運動量

- Locally non-rotating reference frame (LNRF) にいる観測者をまず考える。

$$-p^{(t)} = p_{(t)} = e_{(t)}^{\mu} p_{\mu} = e_{(t)}^t p_t + e_{(t)}^{\phi} p_{\phi} = \frac{1}{\alpha} (p_t - \beta^{\phi} p_{\phi})$$

$$p^{(r)} = p_{(r)} = e_{(r)}^{\mu} p_{\mu} = e_{(r)}^r p_r = \sqrt{\gamma^{rr}} p_r$$

$$p^{(\theta)} = p_{(\theta)} = e_{(\theta)}^{\mu} p_{\mu} = e_{(\theta)}^{\theta} p_{\theta} = \sqrt{\gamma^{\theta\theta}} p_{\theta}$$

$$p^{(\phi)} = p_{(\phi)} = e_{(\phi)}^{\mu} p_{\mu} = e_{(\phi)}^{\phi} p_{\phi} = \sqrt{\gamma^{\phi\phi}} p_{\phi}$$

- 後で一般的なorthonormal frameで計算する。

無限遠からみたBHの影の輪郭

衝突パラメータ はじめにブラックホールの質量中心から測った光子軌道の衝突パラメータ (x, y) を定義する。まず、

$$\frac{rp^{(\phi)}}{p^{(t)}} = \frac{r(\sqrt{\gamma^{\phi\phi}}p_\phi)}{-(p_t - \beta^\phi p_\phi)/\alpha} = -\frac{\alpha r \sqrt{\gamma^{\phi\phi}} p_\phi / p_t}{1 - \beta^\phi p_\phi / p_t} = \left(\frac{\Delta\rho^2}{A}\right)^{1/2} r \left(\frac{\rho^2}{A \sin^2 \theta}\right)^{1/2} \frac{L_z}{E} \left(1 - \omega \frac{L_z}{E}\right)^{-1} \quad (51)$$

$$= Mr_* \left(\frac{\Delta_*^{1/2} \rho_*^2}{A_* \sin \theta}\right) \frac{\zeta}{1 - \omega_* \zeta} \quad (52)$$

$$\frac{rp^{(\theta)}}{p^{(t)}} = \frac{r\sqrt{\gamma^{\theta\theta}}p_\theta}{-(p_t - \beta^\phi p_\phi)/\alpha} = -\frac{\alpha r \sqrt{\gamma^{\theta\theta}} p_\theta / p_t}{1 - \beta^\phi p_\phi / p_t} = \left(\frac{\Delta\rho^2}{A}\right)^{1/2} r \left(\frac{1}{\rho^2}\right)^{1/2} \frac{s_\theta \sqrt{\Theta}}{E} \left(1 - \omega \frac{L_z}{E}\right)^{-1} \quad (53)$$

$$= Mr_* \left(\frac{\Delta_*}{A_*}\right)^{1/2} \frac{s_\theta \sqrt{\Theta_*}}{1 - \omega_* \zeta} \quad (54)$$

を計算する。これらより、衝突パラメータは

$$x \equiv \frac{-1}{M} \left(\frac{rp^{(\phi)}}{p^{(t)}}\right)_{r_* \rightarrow \infty} = -\frac{\zeta}{\sin \theta} \quad (55)$$

$$y \equiv \frac{1}{M} \left(\frac{rp^{(\theta)}}{p^{(t)}}\right)_{r_* \rightarrow \infty} = \pm \sqrt{\Theta_*} = \pm(\eta + a_*^2 \cos^2 \theta - \zeta^2 \cos^2 \theta / \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (56)$$

と計算される。

有限距離の観測者から見たBH影

ここでは、(55) と (56) で取った r_* 無限大の極限を取らないで有限距離から見た場合のブラックホールの影の輪郭を計算したい。今回の場合、ある観測者の全天を角度座標 $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ で覆うものとする。この角度座標は同時に光子軌道の方角を決めるパラメータにもなり得て、LNRF での光子運動量を角度座標 $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ を用いて次のように表すことができる：

$$p^{(0)} = E, \quad p^{(1)} = -E \cos \bar{\theta}, \quad p^{(2)} = E \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi}, \quad p^{(3)} = E \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi}, \quad (59)$$

この対応の中で、 $p^{(1)}$ の前にマイナスを付けたのは後で $\bar{\theta} = 0$ の点がブラックホール方向になるようにするためである。今、

$$[x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}] = [t, r, \theta, \phi] \quad (60)$$

と対応させることにする。この場合、 $p^{(r)}$ 方向が角度 $\bar{\theta} = \pi$ に対応し、 $p^{(\theta)}$ 方向が角度 $\bar{\phi} = 0$ に対応する。ブラックホールの方向は $\bar{\theta} = 0$ である。

ここで、(52) と (54) 及び導入したばかりの光子運動量を角度座標で表した式 (59) を用い、更に新たに $p^{(r)}/p^{(t)}$ も計算すると¹

$$\frac{p^{(r)}}{p^{(t)}} = \frac{s_r \sqrt{R_*/A_*}}{1 - \omega_* \zeta}, \quad \frac{p^{(\theta)}}{p^{(t)}} = \left(\frac{\Delta_*}{A_*} \right)^{1/2} \frac{s_\theta \sqrt{\Theta_*}}{1 - \omega_* \zeta}, \quad \frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}} = \left(\frac{\Delta_*^{1/2} \rho_*^2}{A_* \sin \theta} \right) \frac{\zeta}{1 - \omega_* \zeta} \quad (61)$$

を得る。ここで、ブラックホールの影の輪郭を与える (ζ, η) は (29) で与えられる。また定義より

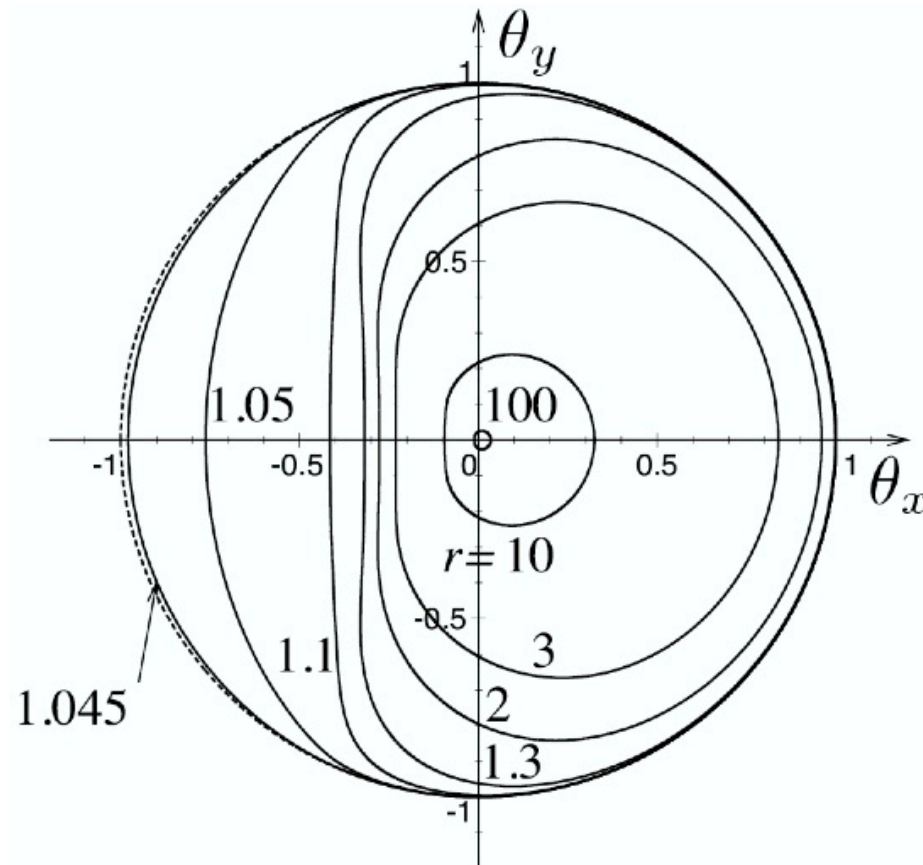
$$\bar{\theta} = \cos^{-1} \left[-p^{(r)}/p^{(t)} \right], \quad \bar{\phi} = \tan^{-1} \left[\frac{p^{(\phi)}/p^{(t)}}{p^{(\theta)}/p^{(t)}} \right] \quad (62)$$

であるので、天球上の位置も指定できる。よって、(29) で $r_* = r_{sp}$ で指定される不安定円軌道の半径をパラメータとして (ζ, η) を動かし、(61) と (62) を通じて、位置 (r_*, θ) にいる観測者の全天上のブラックホールの影の輪郭を描くことができる。ここでの観測者の位置を表す r_* と (29) での r_* は違うものなので注意する。

BH近傍の観測者が見るBHの影

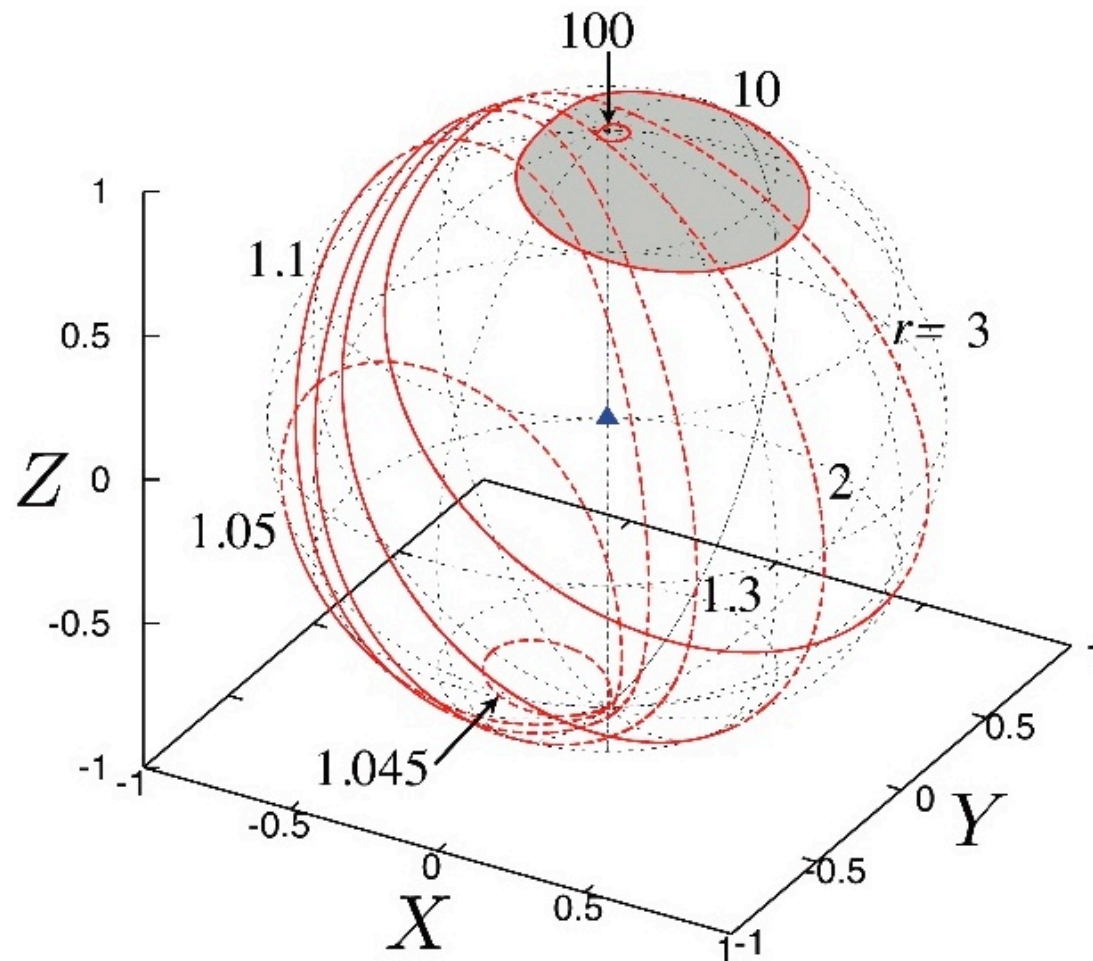
● LNRF観測者の場合

$$\begin{cases} \theta_x = k \cos u \sin v \\ \theta_y = k \sin u \end{cases} \quad \text{ここで } k = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos u \cos v}}, \quad \text{及び} \quad \begin{cases} u = \sin^{-1} y \\ v = \tan^{-1}(x/z) \end{cases}$$



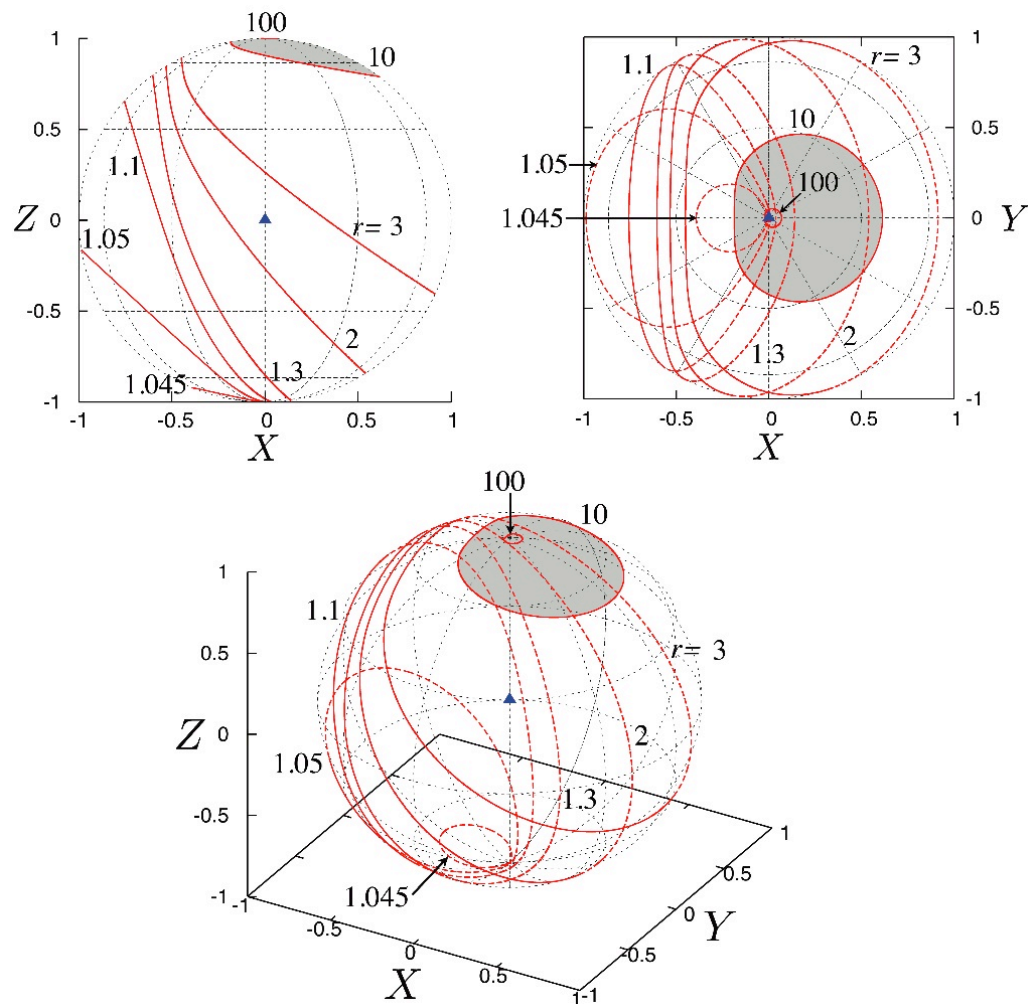
BH近傍の観測者が見るBHの影

- LNRF観測者の場合



BH近傍の観測者が見るBHの影

● LNRF観測者の場合



光子捕獲率の計算 (1)

- 立体角 = 半径 1 の球面上の面積

$$S = 2 \int \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = 2 \int \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

公式1 全天のうちブラックホールに捕捉される光子が占める立体角 S は、

$$S = 2 \int_{r_s^{\min}}^{r_s^{\max}} dr_s (-\partial_{r_s} \bar{\phi}) (1 - \cos \bar{\theta}) \quad (69)$$

となる。ただし、ここで

$$\cos \bar{\theta} = -s_r \left(\frac{1}{A_*} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{R_*}}{1 - \omega_* \zeta}, \quad \tan \bar{\phi} = \frac{s_{\theta} \rho_*^2}{A_*^{1/2} \sin \theta} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\Theta_*}} \right) \quad (70)$$

である。

光子捕獲率の計算 (1)

- 立体角 = 半径 1 の球面上の面積

$$S = 2 \int \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = 2 \int \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

- LNRF観測者が見る場合

公式1 全天のうちブラックホールに捕捉される光子が占める立体角 S は、

$$S = 2 \int_{r_s^{\min}}^{r_s^{\max}} dr_s (-\partial_{r_s} \bar{\phi}) (1 - \cos \bar{\theta}) \quad (69)$$

となる。ただし、ここで

$$\cos \bar{\theta} = -s_r \left(\frac{1}{A_*} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{R_*}}{1 - \omega_* \zeta}, \quad \tan \bar{\phi} = \frac{s_{\theta} \rho_*^2}{A_*^{1/2} \sin \theta} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\Theta_*}} \right) \quad (70)$$

である。

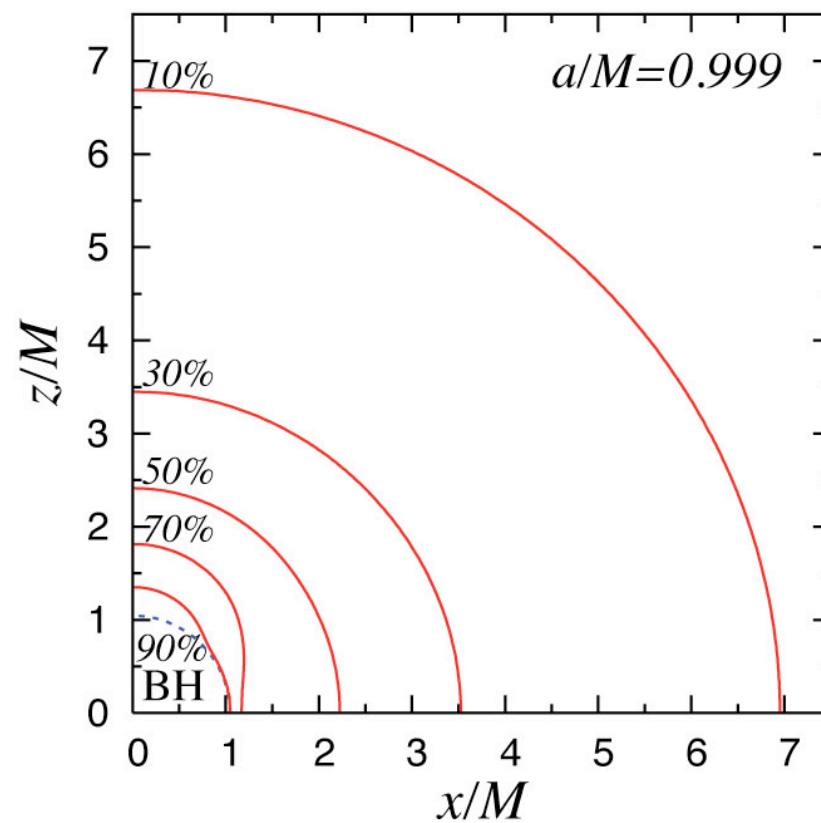
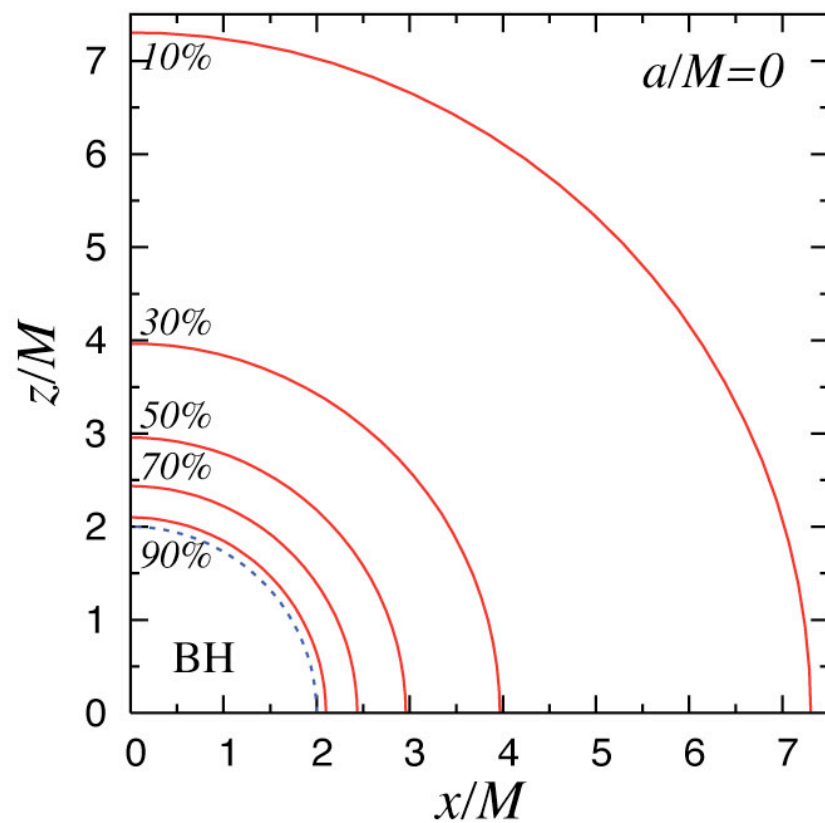
光子捕獲率の計算 (2)

公式2 全天のうちブラックホールに捕捉される光子が占める立体角 S は、

$$S = -4\rho^2 \sin \theta \int_{r_s^{\min}}^{r_s^{\max}} \left[\frac{(r_s^3 - 3r_s^2 + 3r_s - a_*^2)[r_s^2(r_s - 3)\zeta - a_*(r_s - 1)(\eta + a_*^2 \cos^2 \theta)]}{a_*^2(r_s - 1)^3(A \sin^2 \theta \Theta_* + \rho^4 \zeta^2)\sqrt{\Theta_*}} \right. \\ \left. \times \left(A^{1/2} + \frac{s_r \sqrt{R_*}}{1 - \omega_* \zeta} \right) \right] dr_s \quad (86)$$

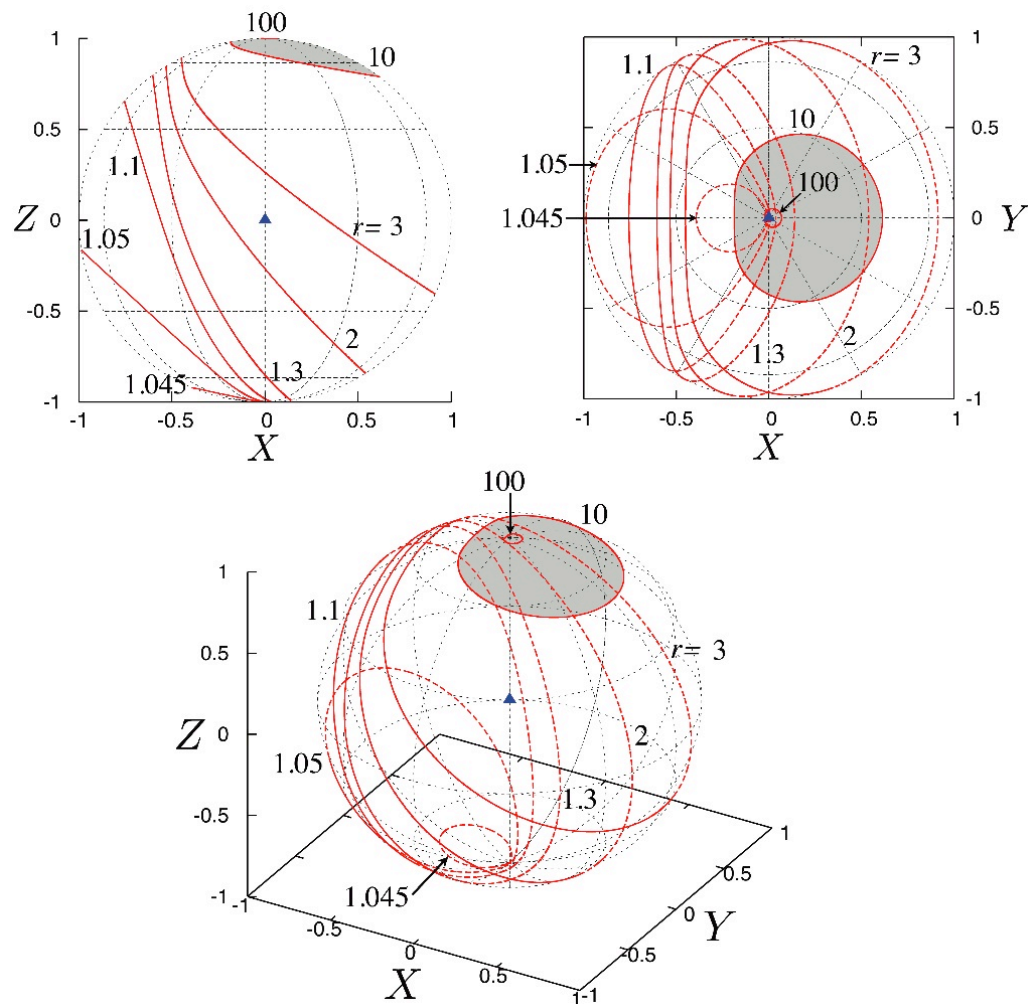
となる。ここで、 Θ_* 、 ζ 、 η も前項までに解析式が与えられている。積分範囲の上下限は $\Theta_* = 0$ となる r_s の値から求める (前項参照)。

光子捕獲率の分布



BH近傍の観測者が見るBHの影

● LNRF観測者の場合



一般の速度場を持つ観測者の場合

CF(Comoving Frame) テトラドは、LNRT テトラドを更に CF にローレンツ変換して得られる。CF の物理量のインデックスにはバーを付けることにする。

LNRF で測定した流体の 3 元速度 v^i を計算する。ここで、 $i = 1, 2, 3$ として

$$v^i \equiv \frac{u^{(i)}}{u^{(0)}} = \frac{e_{\alpha}^{(i)} u^{\alpha}}{e_{\alpha}^{(0)} u^{\alpha}} = \frac{e_{\alpha}^{(0)} u^{\alpha}}{\alpha u^t} \quad (103)$$

これより、

$$v^1 = \frac{1}{\alpha u^t \sqrt{\gamma_{11}}} (\beta^1 u^t + \gamma_{11} u^1 + \gamma_{12} u^2 + \gamma_{13} u^3) \quad (104)$$

$$v^2 = \frac{1}{\alpha u^t \sqrt{\frac{\det \gamma_{ij}}{\gamma_{11} \gamma^{33}}}} [(\gamma^{33} \beta^2 - \gamma^{32} \beta^3) u^t + \gamma^{33} u^2 - \gamma^{32} u^3] \quad (105)$$

$$v^3 = \frac{1}{\alpha u^t \sqrt{\gamma^{33}}} (\beta^3 u^t + u^3) \quad (106)$$

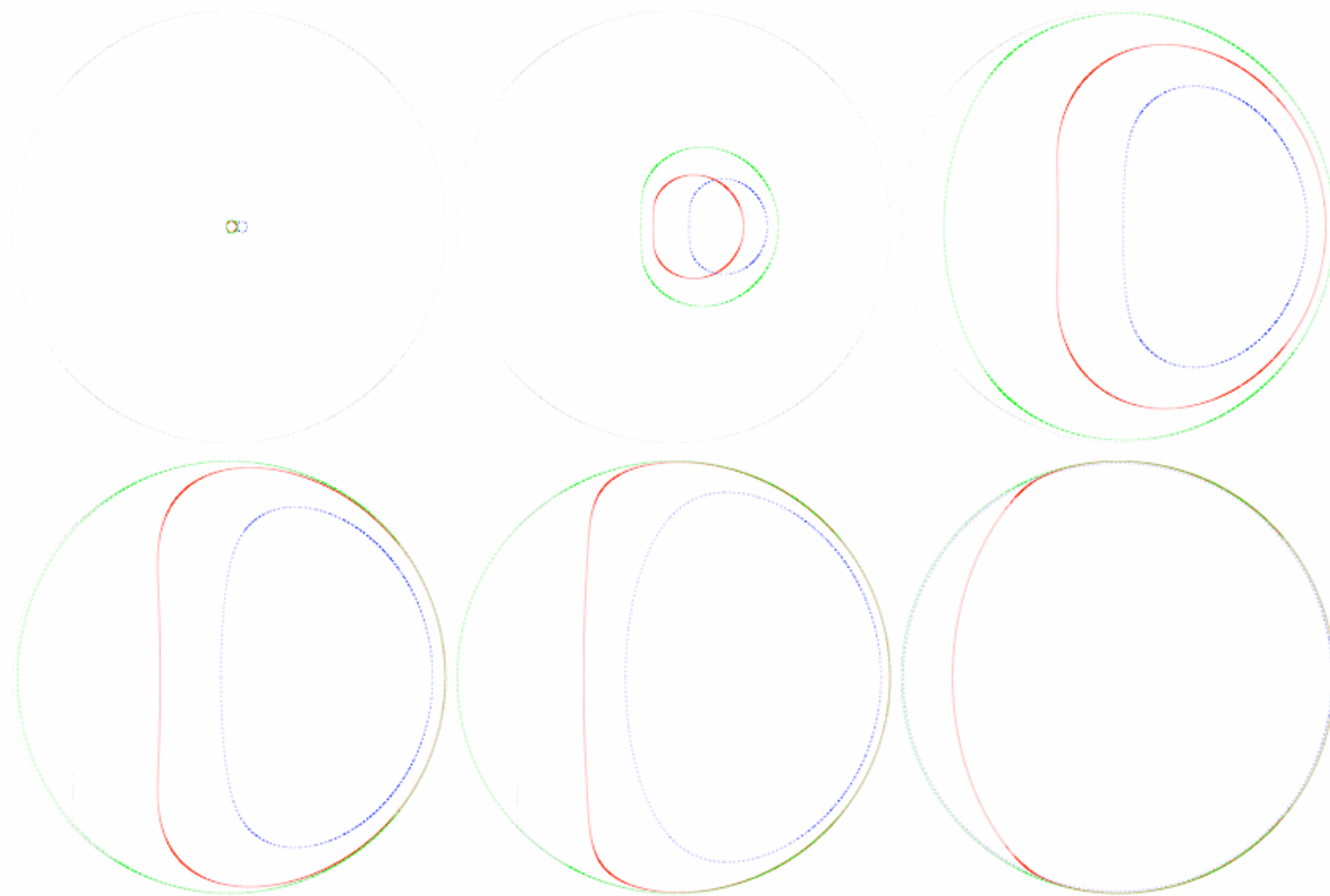
が得られる。また、この 3 元速度に対するガンマ因子は

$$\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2} = \alpha u^t \quad (107)$$

となる。ここで、

$$v^2 = v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3, \quad v_k = v^k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (108)$$

BH近傍の観測者が見るBHの影



光子捕獲率の計算 (3)

公式3 全天のうちブラックホールに捕捉される光子が占める立体角 S は、

$$S = 2 \int_{r_s^{\min}}^{r_s^{\max}} dr_s (-\partial_{r_s} \bar{\phi}) (1 - \cos \bar{\theta}) \quad (150)$$

となる。ただし、ここで

$$\cos \bar{\theta} = \frac{-\bar{p}^{(r)} + \gamma v^r (1 - \gamma_* \mathcal{F})}{\gamma (1 - \mathcal{F})}, \quad \tan \bar{\phi} = \frac{\bar{p}^{(\phi)} / \bar{p}^{(\theta)} + \gamma v^\phi \mathcal{G}}{1 + \gamma v^\theta \mathcal{G}} \quad (151)$$

である。また、

$$\mathcal{F} \equiv v_r \bar{p}^{(r)} + v_\theta \bar{p}^{(\theta)} + v_\phi \bar{p}^{(\phi)} \quad (152)$$

$$\mathcal{G} \equiv -1 / \bar{p}^{(\theta)} + \gamma_* v_r \bar{p}^{(r)} / \bar{p}^{(\theta)} + \gamma_* v_\theta + \gamma_* v_\phi \bar{p}^{(\phi)} / \bar{p}^{(\theta)} \quad (153)$$

及び

$$\bar{p}^{(r)} = \frac{s_r \sqrt{R_* / A_*}}{1 - \omega_* \zeta}, \quad \bar{p}^{(\theta)} = \left(\frac{\Delta_*}{A_*} \right)^{1/2} \frac{s_\theta \sqrt{\Theta_*}}{1 - \omega_* \zeta}, \quad \bar{p}^{(\phi)} = \left(\frac{\Delta_*^{1/2} \rho_*^2}{A_* \sin \theta} \right) \frac{\zeta}{1 - \omega_* \zeta} \quad (154)$$

と与えられる。

光子捕獲率の計算 (4)

公式4 全天のうちブラックホールに捕捉される光子が占める立体角 S は、

$$S = -2 \int_{r_s^{\min}}^{r_s^{\max}} dr_s \frac{s_\theta (\partial_{r_s} \zeta)}{\Theta_*^{3/2} (1 + \tan^2 \bar{\phi}) (1 + \gamma v^\theta \mathcal{G})} \left[\mathcal{P} + \frac{\gamma \mathcal{Q}}{1 + \gamma v^\theta \mathcal{G}} \left(v^\phi - v^\theta \frac{s_\theta \rho_*^2 \zeta}{A_*^{1/2} \sin \theta \Theta_*^{1/2}} \right) \right] \mathcal{R} \quad (155)$$

となる。ここで、

$$(\partial_{r_s} \zeta) = \frac{-2}{a_*(r_s - 1)^2} (r_s^3 - 3r_s^2 + 3r_s - a_*^2) \quad (156)$$

$$\tan \bar{\phi} = \frac{1}{1 + \gamma v^\theta \mathcal{G}} \left(\frac{s_\theta \rho_*^2 \zeta}{A_*^{1/2} \sin \theta \Theta_*^{1/2}} + \gamma v^\phi \mathcal{G} \right) \quad (157)$$

$$\mathcal{G} = -\frac{s_\theta A_*^{1/2} (1 - \omega_* \zeta)}{\Delta_*^{1/2} \Theta_*^{1/2}} + \gamma_* v_r \frac{s_r s_\theta R_*^{1/2}}{\Delta_*^{1/2} \Theta_*^{1/2}} + \gamma_* v_\phi \frac{s_\theta \rho_*^2 \zeta}{A_*^{1/2} \sin \theta \Theta_*^{1/2}} \quad (158)$$

$$\mathcal{P} = \frac{\rho_*^2}{a_*(r_s - 1) A_*^{1/2} \sin \theta} [a_*(r_s - 1)(\eta + a_*^2 \cos^2 \theta) - \zeta r_s (r_s - 3)] \quad (159)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & \frac{A_*^{1/2}}{\Delta_*^{1/2}} \left[\omega_* (\eta + a_*^2 \cos^2 \theta) - \frac{\zeta}{\tan^2 \theta} \right] + \gamma_* v_\phi \frac{\rho_*^2 \zeta^2}{A_*^{1/2} \sin \theta \tan^2 \theta} \\ & + \gamma_* v_r \frac{s_r}{\Delta_*^{1/2} R_*^{1/2}} \left[\frac{R_* \zeta}{\tan^2 \theta} - r(r\zeta - 2\zeta + 2a_*) \Theta_* \right] \\ & + \frac{r_s^2 (r_s - 3)}{a_*(r_s - 1)} \left[(1 - \omega_* \zeta) \frac{A_*^{1/2}}{\Delta_*^{1/2}} - (R_* + \Delta_* \Theta_*) \gamma_* v_r \frac{s_r}{\Delta_*^{1/2} R_*^{1/2}} - \zeta \gamma_* v_\phi \frac{\rho_*^2}{A_*^{1/2} \sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (160)$$

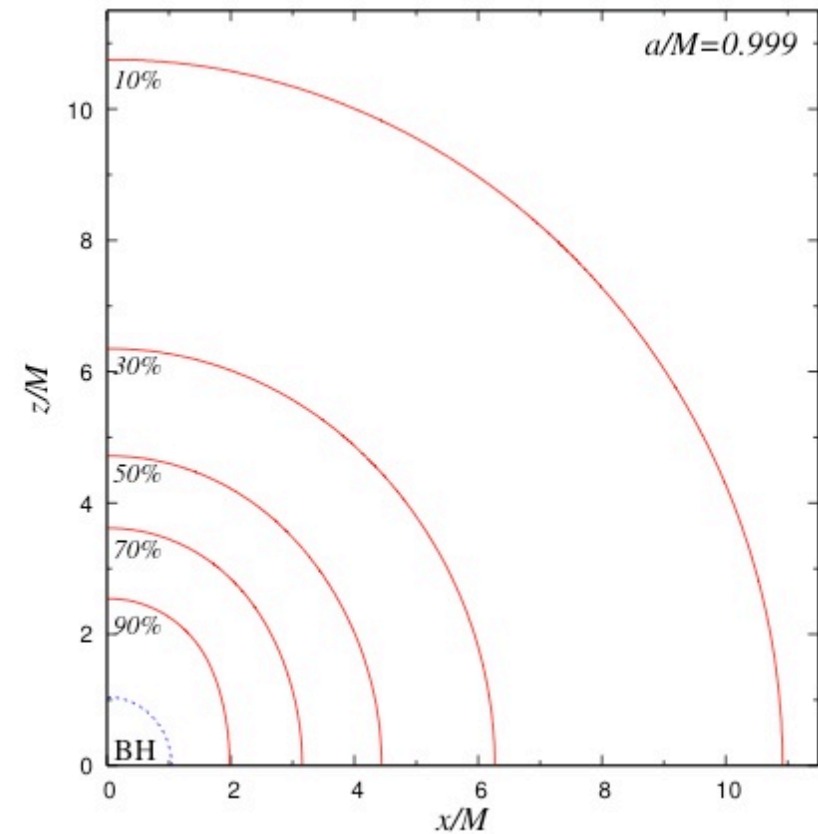
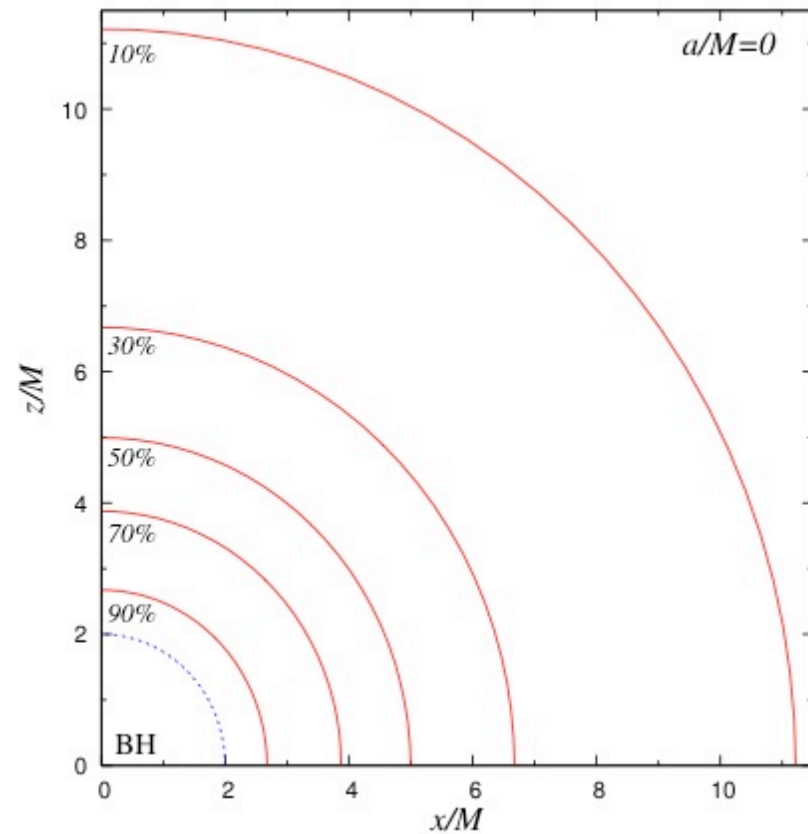
$$\mathcal{R} = 1 + \frac{1}{\gamma(1 - \mathcal{F})} \left[\frac{s_r R_*^{1/2}}{A_*^{1/2} (1 - \omega_* \zeta)} - \gamma v^r (1 - \gamma_* \mathcal{F}) \right] \quad (161)$$

$$\mathcal{F} = v_r \frac{s_r \sqrt{R_*/A_*}}{1 - \omega_* \zeta} + v_\theta \left(\frac{\Delta_*}{A_*} \right)^{1/2} \frac{s_\theta \sqrt{\Theta_*}}{1 - \omega_* \zeta} + v_\phi \left(\frac{\Delta_*^{1/2} \rho_*^2}{A_* \sin \theta} \right) \frac{\zeta}{1 - \omega_* \zeta} \quad (162)$$

である。

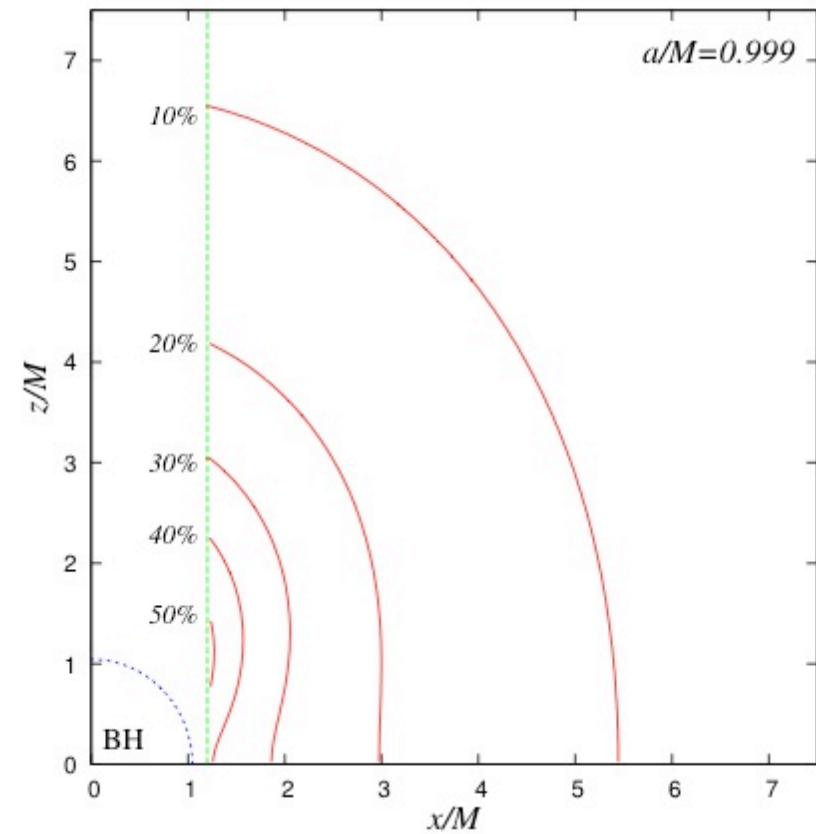
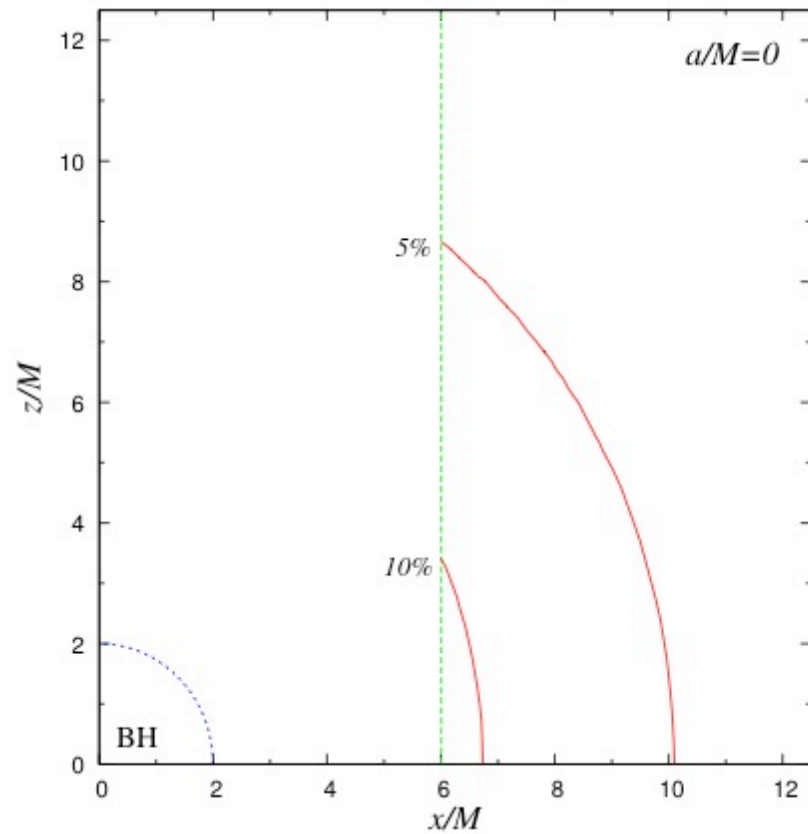
光子捕獲率の分布

- 自由落下する観測者の場合



光子捕獲率の分布

- ケプラー回転する観測者の場合



まとめ

- Kerr BH近傍でのBHによる光子捕獲率分布の計算を行った。
- 従来の方法は、測地線を飛ばしたり、粒子の方向の一つ一つについてBHに捕獲されるか判断する必要があった。
- 新たに導いた式は、1変数積分を行うだけであるので、結果が正確な上に計算もかなり軽い。