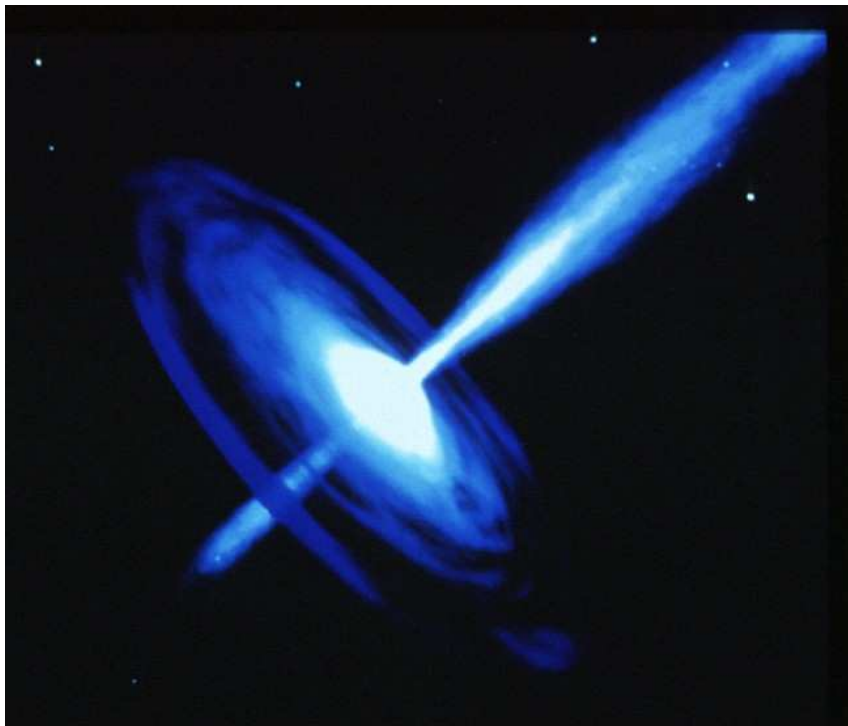


ブラックホールへの定常降着流 < β 版 >

高橋 真聡¹



Jet の起源は？ — BH が黒幕か !?

¹たかはし まさあき
448-8542 愛知県刈谷市井ヶ谷町広沢1 愛知教育大学 理科教育講座
email: takahasi@phyas.aichi-edu.ac.jp
<http://www.phyas.aichi-edu.ac.jp/~takahasi/>

目次

第 1 章	相対論的磁気流体力学	3
1.1	Basic equations	3
1.2	Relativistic Bernoulli Equation and Force-Balance Equation	5
1.3	相対論的イオン-電子に対する方程式系 (二流体近似)	8
第 2 章	Trans-Magnetosonic MHD flows in BH Magnetosphere	9
2.1	Light Surfaces	9
2.2	Alfvén Points	13
2.3	Magnetosonic Points	14
2.4	Trans-Magnetosonic Accretions	18
第 3 章	Energy generation	
	in Black Hole Magnetosphere	21
3.1	Gravitational energy of accreting matters	21
3.2	Energy extraction from a Rotating Black Hole	21
3.2.1	Penrose process	21
3.2.2	Super-Radiance of waves	23
3.2.3	Blandford-Znajek process	23
3.2.4	Negative-Energy Plasma Accretions	24
付録 A	Bondi flow model	
	— Newtonian HD flows —	26
付録 B	Weber-Davis (1967) model	
	— Newtonian MHD flows —	30
B.1	Basic equations	30
B.2	Field-aligned Flow Parameters	31
B.3	Wind equation	32
B.4	Pulsar Wind	34
付録 C	GRMHD flows	35
C.1	Conservation Laws of GRMHD flows	35
C.2	Derivation of Poloidal Eq.	38
C.3	Derivation of Trans-field Eq.	40

第1章 相対論的磁気流体力学

“mhd-basic.tex”

1.1 Basic equations

相対論では、流体要素に伴うすべてのスカラー量（粒子数密度、エネルギー密度、温度、圧力、といった量）は、各流体要素ごとに、その静止系（総運動量の空間成分がゼロ）での値を使って定義される。この静止系は、MCR 系 (Momentarily Comoving reference frame) と呼ばれる。この系は瞬間的にのみ共動している。流体要素は加速運動されうるので、すぐに別の慣性系が MCR 系に置き換わる。また、二つの別の流体要素は、相対運動をするので、共通の MCR 系を持つことはない。例えば、流体要素の MCR 系での粒子数密度 n は、粒子が静止していない系 (粒子の速度を v として) では $n/\sqrt{1-v^2}$ となる。このことは、同じ粒子に着目すれば、どちらの系でも粒子数は同じであるものの、粒子の占める体積がローレンツ収縮によって $\sqrt{1-v^2}$ 倍に減少することによる。

- Maxwell 方程式

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (1a)$$

$$F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0 \quad \text{or} \quad *F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (1b)$$

- 一般化されたオームの法則

The electric current is the sum of the two terms corresponding respectively to the convection current and to the conduction current;

$$j^\mu = c\varepsilon u^\mu + \sigma F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (1.2)$$

where ε is the proper density of electric charge. ¹

We assume the ideal MHD conditions ($\sigma \rightarrow 0$)

$$u^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

¹The conductivity of the fluid, σ , is

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_p [1 + (e\tau B/m_p)]}, \quad (1.3)$$

where n_e is the electron density, τ is the collision time, e and m_p are the electron's charge and mass, and $B^2 \equiv -B^\alpha B_\alpha$ (Bekenstein and Oron 1978)[4].

- 粒子数保存の式

$$(nu^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (1.5)$$

- 運動方程式

重力場中のプラズマの運動は、運動方程式

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (1.6)$$

によって記述される。ここで、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ (energy momentum tensor) は以下のように与えられる [メトリックの符号を (+, -, -, -) と選んだ場合] :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\delta} F_\delta{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 \right) \quad (1.7)$$

以下の議論では、熱伝導や粘性による散逸効果は無視する。² ここで、 ρ , P , n は、全エネルギー密度 (the total energy density), プラズマの圧力 (the pressure), 粒子数密度 (the proper particle density)。電磁場テンソル (the electromagnetic field tensor) $F^{\mu\nu}$ は、Maxwell 方程式を満たさなければならない。また、 u^μ は流体の四元速度 (the four-velocity of plasma) である。³

定常・軸対象時空の場合には二つのキリングベクトル (Killing fields) k と m が存在し、エネルギーモーメントテンソルと縮約することで、二つのフラックス保存則を得る。⁴

$$\mathcal{E}^\alpha \equiv T^\alpha_\beta k^\beta : \quad \text{the energy current} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}^\alpha \equiv -T^\alpha_\beta m^\beta : \quad \text{the angular momentum current} \quad (1.14)$$

これらは、以下の条件式を満たす。

$$\mathcal{E}^\alpha_{;\alpha} = 0 = -\mathcal{L}^\alpha_{;\alpha} \quad (1.15)$$

- ポリトロピック関係式 (the polytropic equation of state: Tooper 1965)

$$P = K \rho_0^\Gamma = K \rho_0^{1+1/\hat{n}} \quad (1.16)$$

where

$$\rho = \rho_0 + \hat{n}P = \rho_0 + \frac{1}{\Gamma-1}P \quad : \text{the total energy density}$$

$$\rho_0 = nm_p \quad : \text{the rest mass density}$$

$$\Gamma \quad : \text{the adiabatic index}$$

$$\hat{n} \quad : \text{the politropic index}$$

²The corresponding relativistic expressions for the stress-energy tensor (the relativistic Navier-Stokes equation) are discussed in ??.

³(特殊) 相対論における完全流体については、シュッツ「相対論入門 (上)」江里口、二間瀬 訳 を参考にされたし。

⁴The existance of the Killing fields k and m , defined by the stationary and axisymmetry of the space-time, leads to two conserved quantities. By contraction with the energy momentum tensor $T^{\mu\nu}$ we get two currents.

The conserved energy flux (Blandford & Znajek 1977) : From the equation of motion and the Killing equation,

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (1.8)$$

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \quad (1.9)$$

we obtain equation

$$(\xi_\mu T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \quad (1.10)$$

For a stationary and axisymmetric flow, we find two current

$$\mathcal{E}^\mu \equiv T^{\mu\nu} \chi_\nu = T^\mu_t, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}^\mu \equiv -T^{\mu\nu} \eta_\nu = -T^\mu_\phi, \quad (1.12)$$

where $\chi^\nu = (1, 0, 0, 0)$ is the timelike Killing vector and $\eta^\nu = (0, 0, 0, 1)$ is the axial Killing vector.

- エンタルピー (the relativistic entalpy)

$$\mu = \frac{\rho + P}{n} = m_p + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{n} \quad (1.17)$$

遠方の観測者（我々）から見た磁場と電場は、以下のように定義される

$$B_\alpha \equiv \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta F^{\gamma\delta} \quad (1.18)$$

$$E_\alpha \equiv F_{\alpha\beta} k^\beta \quad (1.19)$$

ここで、 $k^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ は the time-like killing vector であり、 $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ である。共同座標系 (comoving) での磁場は、

$$\bar{B}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta F^{\gamma\delta} \quad (1.20)$$

$$\bar{E}_\alpha \equiv F_{\alpha\beta} u^\beta \quad (1.21)$$

で与えられる。 u^α は流体の 4-velocity である。この磁場は、 $u^\alpha \bar{B}_\alpha = 0$ を満たす。

<問題> ZAMO と BL 系とのあいだの電磁場の関係式を求めよ。

(1.21) 式において、 $u^\alpha = \alpha_Z^{-1}(1, 0, 0, \omega)$ とおいく。ここで、 $\alpha_Z \equiv 1/(g^{tt})^{1/2} = (\Delta\Sigma/\mathcal{A})$ は lapse function であり、 $\omega \equiv -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ は遠方の観測者が見た ZAMO の角速度である。また、 $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$ 、 $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ 、 $\mathcal{A} \equiv (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$ である。

例えば、ポロイダル電場/磁場、トロイダル磁場の関係式について求めると、パーつきの量を ZAMO の量として

$$\bar{E}_p^2 \equiv -\bar{E}^A \bar{E}_A = (G_\phi/\rho_w)^2 \bar{B}_p^2 \quad (1.22)$$

$$\bar{B}_p^2 \equiv -\bar{B}^A \bar{B}_A = \alpha_Z^2 B_p^2 \quad (1.23)$$

$$\bar{B}_T^2 \equiv -\bar{B}^\phi \bar{B}_\phi = (B_\phi/\rho_w)^2 \quad (1.24)$$

などを得る (Takahashi & Tomimatsu 2008)。 G_ϕ と B_p の定義については、それぞれ (1.34)、(1.37) を参照。

1.2 Relativistic Bernoulli Equation and Force-Balance Equation

磁気圏構造 [流速 (密度) 分布, 磁場形状] を解くための方程式 (定常・軸対称を仮定)

- the relativistic Bernoulli equation along magnetic field lines
— *Poloidal equation*

- the force-balance equation across the magnetic field lines
— *Grad-Shafranov (GS) equation*

流れに沿って、5つの保存量が存在する：(付録 C.1 参照)

$$\Omega_F = -\frac{F_{tr}}{F_{\phi r}} = -\frac{F_{t\theta}}{F_{\phi\theta}}, \quad (1.25)$$

$$E = \mu u_t - \frac{\Omega_F}{4\pi\eta} B_\phi, \quad (1.26)$$

$$L = -\mu u_\phi - \frac{1}{4\pi\eta} B_\phi, \quad (1.27)$$

$$\eta = -\frac{nu^r}{B^r} G_t = \frac{nu^\theta}{B^\theta} G_t = -\frac{nu^t g_{tt}(\Omega - \Omega_F)}{B^\phi} \quad (1.28)$$

where

$$G_t \equiv g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F, \quad (1.29)$$

$\Omega = u^\phi/u^t$, and B_ϕ is the toroidal component of the magnetic field. As a final conserved quantity is K in a polytropic equation of state, which is related to the specific entropy S ; $S = \text{constant}$ implies $K = \text{constant}$.

5つの保存量が存在することにより、運動方程式のポロイダル磁場方向の成分を、積分することができる：(付録 C.2 参照)

$$\mu^2(1 + u_p^2) = E^2 [(\alpha - 2M^2)f^2 - k] \quad (1.30)$$

with

$$\alpha \equiv g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2, \quad (1.31)$$

$$k \equiv (g_{\phi\phi} + 2g_{t\phi}\tilde{L} + g_{tt}\tilde{L}^2)/\rho_w^2, \quad (1.32)$$

$$f \equiv -\frac{G_\phi + G_t\tilde{L}}{\rho_w(M^2 - \alpha)}, \quad (1.33)$$

$$G_\phi \equiv g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega_F = -g_{\phi\phi}(\Omega_F - \omega), \quad (1.34)$$

where $\tilde{L} \equiv L/E$ and $\rho_w^2 \equiv g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$.

- u_p is the poloidal component of the velocity defined by $u_p^2 \equiv -u_A u^A$ ($A = r, \theta$)
- $\alpha^{-1/2}$ is the “gravitational Lorentz factor” of the plasma rotating with the angular velocity Ω_F
- $\omega \equiv -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ is the angular velocity of the zero angular momentum observer with respect to distant observers.

- 一般相対論的磁気流体力学の枠組みにおけるアルフェン・マッハ数 (the relativistic Alfvén Mach-number) M は、 以下のように定義される、

$$M^2 \equiv \frac{4\pi\mu n u_p^2}{B_p^2} = \frac{4\pi\mu\eta u_p}{B_p}, \quad (1.35)$$

これを、 § 2.3 で定義するアルフェン波の速さ u_{AW} [$u_{AW}^2 \equiv (B_p^2/4\pi\mu n)\alpha$] を用いて書き直すと、

$$M^2 = \frac{u_p^2}{u_{AW}^2} \alpha \quad (1.36)$$

となる。アルフェン点 ($r = r_A$, $u_p = u_{AW}$) では、 $M^2 = \alpha$ となる。

- B_p is the poloidal component of the magnetic field seen by a lab-frame observer

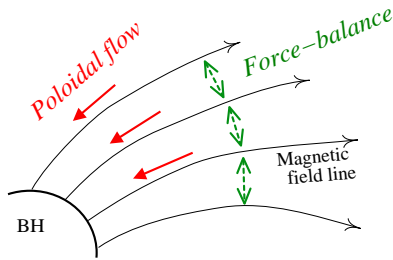
$$B_p^2 \equiv -B_A B^A \frac{1}{G_t^2} = -\frac{1}{\rho_w^2} [g^{rr}(\partial_r \Psi)^2 + g^{\theta\theta}(\partial_\theta \Psi)^2]. \quad (1.37)$$

- For a polytropic equation of state, the relativistic specific enthalpy μ is written by (see, Camenzind 1987),

$$\mu = m_p \left[1 + \mu_{inj} \left(\frac{n}{n_{inj}} \right)^{\Gamma-1} \right] = m_p \left[1 + \mu_{inj} \left(\frac{u_p^{inj} B_p}{u_p B_p^{inj}} \right)^{\Gamma-1} \right], \quad (1.38)$$

where (“inj” = injection point)

$$\mu_{inj} \equiv \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_{inj}}{n_{inj} m_p}, \quad (1.39)$$



The ideal MHD plasmas stream along magnetic field lines.

The configuration of field lines is determined by the force-balance between the field.

The force-balance equation is derived by Nitta et al.(1991) (付録 C.3 参照)

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha - M^2}{4\pi} (\partial^r \partial_r \Psi + \partial^\theta \partial_\theta \Psi) + \frac{\hat{B}_p^2 \rho_w^2}{4\pi \sqrt{-g}} \left[\frac{\sqrt{-g}}{\rho_w^2} (\alpha - M^2) \right]' \\ & + \frac{4\pi \mu^2 \rho_w^2}{M^2} \eta \eta' + \frac{2\pi}{M^2} [g_{\phi\phi} (E^2 \eta^2)' + 2g_{t\phi} (EL\eta^2)' + g_{tt} (L^2 \eta^2)'] \\ & - \frac{4\pi \eta^2 \rho_w^2}{M^4} (\mu^2 G_\phi - e\mu u_\phi) \Omega'_F - \frac{4\pi}{M^2} [G_\phi (E\eta)' + G_t (L\eta)'] (E\eta) \hat{f} = 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

where the prime ($'$) $\equiv -(1/\hat{B}_p^2)[(\partial^r \Psi)\partial_r + (\partial^\theta \Psi)\partial_\theta]$, $\hat{B}_p \equiv \rho_w B_p$ and $\hat{f} \equiv \rho_w f$.

1.3 相対論的イオン-電子に対する方程式系（二流体近似）

以下を紹介すること：

- Khanna — MNRAS
- Koide (2008)

第2章 Trans-Magnetosonic MHD flows in BH Magnetosphere

“mhd-trans.tex”

ブラックホール磁気圏は、Inflow と Outflow の領域が共存するシステムである。定常・軸対象の磁気圏において理想プラズマは磁力線に沿って流れる。図 2.1 中の $k_0 = 0$ 面は inner/outer light surfaces であり、 $k_0 = M^2$ 面は inner/outer Alfvén surfaces である。ブラックホールの強重力のため（重力赤方偏移のため）、ブラックホール近傍に inner light surface と inner Alfvén surface がブラックホール近傍に生じる。関数 k_0 は、重力赤方偏移と角速度 Ω_F で回転する系（磁力線）のローレンツファクターを含む関数である。 M は Alfvén Mach number である。以下では、ブラックホール磁気圏における light surfaces と Alfvén surface について紹介する。

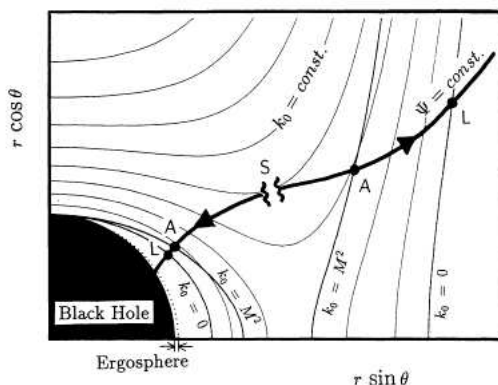


FIG. 2.—Illustration of typical inflow and outflow in the black hole magnetosphere. Both start from the injection point I and pass through the Alfvén surface A and the light surface L. The point where the flow line is tangent to a curve of $k_0 = \text{constant}$ becomes the separation point.

図 2.1: 磁力線に沿ったプラズマ流。ブラックホール磁気圏は、Inflow と Outflow の領域が共存するシステムである。

2.1 Light Surfaces

理想プラズマで満たされた磁気圏において磁力線は剛体回転すると見なせるが、遠方ほど磁力線の回転速度は速くなり、ついには光速を超えることになる。さらに外側では、磁力線の回転速度は光速を超えることになる。ここで、磁力線の回転速度が光速を超えることが相対論に矛盾するのでは、という疑問が生じるかもしれないが、磁力線の“パターン”が光速を超えているように

見えるだけである。磁力線の定義を思し、磁力線が実体を持っていて運動しているのではないことに注意されたい。物理的な実体（エネルギー・情報）を担うプラズマは、今考えている理想磁気流体の扱いの下では磁力線に沿って運動するが、後述するように、回転する磁力線に沿ってプラズマが流れて行くことで、流線と磁力線は異なるパターンを持つようになる。その結果、プラズマの運動が相対論を破る状況は現れないのである。このような磁力線が光速を超えてしまうような状況は、高速回転する天体である中性子星の磁気圏（パルサー磁気圏）を議論する際に重要となる。パルサー磁気圏の場合、中性子星が剛体回転すると考えられるので、星表面につながる磁力線全体が中性子星と同じ角速度で回転することになる。パルサー磁気圏の場合、磁力線が光速を超えてしまう半径の分布は円筒状（回転軸からの距離が同じ）になり、**光円柱 (light cylinder)** と呼ばれる。

ブラックホール磁気圏の場合にも、パルサー磁気圏と同様に磁力線が光速を超えてしまう半径が存在する。ただし、磁力線は降着円盤表面から伸びていると考えられるので、それぞれの磁力線毎に回転角速度が異なっているのがもっともらしい（円盤の外側の領域につながっている磁力線ほど回転が遅いので（磁力線の回転速度が光速に等しくなる半径は遠くに位置する）、円筒状になるとは限らない。この場合、*light surface* と呼ばれる。さて、ブラックホール磁気圏の場合、磁力線が光速を超える面半径は、ブラックホールの極く近傍にも現れる。これはブラックホールの強重力環境で光速が遅くなる（重力赤方偏移による）ためである。もちろん、中心領域に近づくほど、磁力線の回転速度は小さくなる。しかし、それ以上に大きな割合で光速が遅くなっていく。このような *light surface* はブラックホールを取り囲むように分布することになり、この面より内側では磁力線の回転速度が光速を上回る。前出の *light surface* と区別して、これを *inner light surface* と呼ぶ（前出のものは *outer light surface* と呼ぶ）。

- *the inner light surface* :

ブラックホール磁気圏においては、ブラックホールへの降着プラズマに関しても *light surface* が現れる。この面はブラックホールのごく近傍の位置（*event horizon* の数倍の半径）に、ブラックホール全体を包み込むように分布する。磁力線の回転速度は、ブラックホールに近づくにつれ小さくなるが、重力赤方偏移の効果のため、（遠方の観測者から見た）見掛け上の光速が磁力線の回転速度よりも遅くなる。そのため、ブラックホール近傍では磁力線の回転速度が光速を越えるのである。

- *the outer light surface* :

磁気圏から外向きに流れ出すプラズマ風（ジェット）に関しては、パルサー磁気圏の場合と同様に、ブラックホール磁気圏においても *light surface* が現れる。磁力線は剛体回転するが、ある半径より外側では磁力線の回転速度が光速を越えてしまう。*Light surface* は、その領域の境界として定義される。*Light surface* より外側では、プラズマは磁力線と共回転できず、外向きに流れ出さなければならない。

In the black hole magnetosphere streaming both an accretion and a wind (or jet) from a plasma source, there are two light surfaces, where the rotational velocity of the magnetic field line equals the light velocity. The locations of the light surfaces are given by $\alpha = 0$ (e.g., [66, ?]). The inner light surface is formed by the strong gravity of the black hole; the light velocity seen by a distance observer becomes small because of the gravitational red-shift effect, and this surface locates very close to the event horizon. The outer light surface is formed by the rapid rotation of the magnetosphere in the same manner as in pulsar magnetosphere models. In the intermediate zone, the plasma can corotate with the magnetic field lines, while outside the outer light surface

particles must move outward along the rotating magnetic field lines; within the the inner light surface, particle must fall into the event horizon.

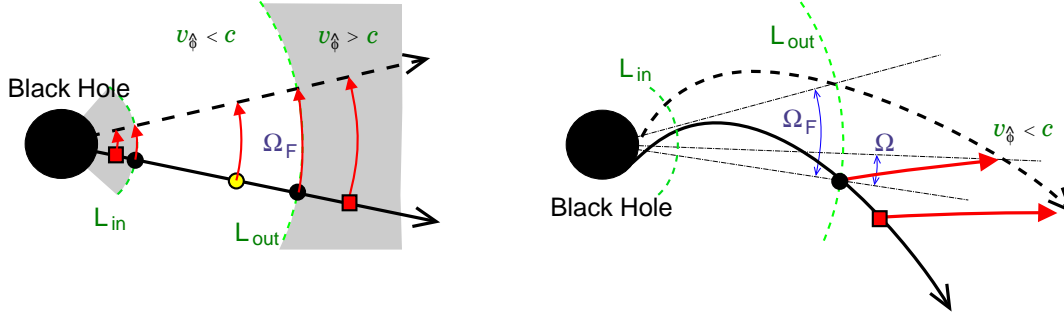


图 2.2: Outside (inside) the outer (inner) light surface, the plasma must stream outward (inward) along the bending magnetic field lines.

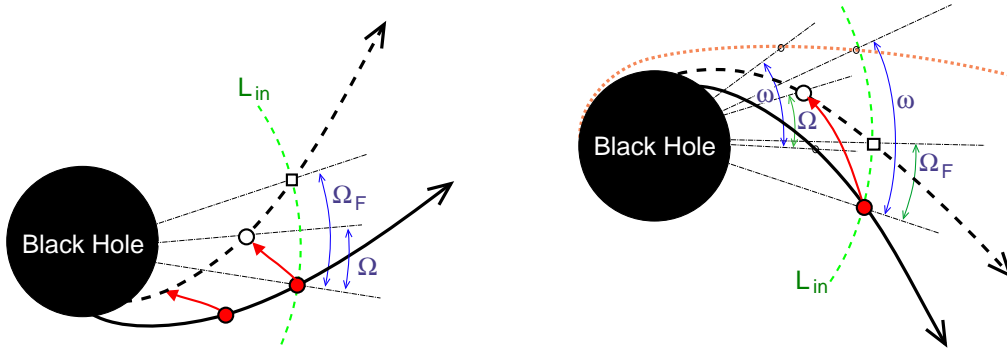


图 2.3: The ingoing plasma flow. For slowly-rotating black hole case, the plasma falls into the black hole along a trailed magnetic field lines, while the plasma falls along a leading magnetic field line for rapidly-rotating case.

The locations of the light surfaces are determined by $\alpha \equiv g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2 = 0$.

- They depend on parameters $\Omega_F(\psi)$ and a .
- A function $\Omega_F = \Omega_F(\psi)$ should be given by the boundary condition at the plasma source.
- To obtain the spatial shapes of the two light surfaces, we must treat the force-balance equation with the poloidal equation. (It is very hard problem.)
- Maximum/Minimum Ω_F — $(\Omega_{\max}, \Omega_{\min})$

When we solve a configuration of magnetic field lines, $\psi(r, \theta)$, by solving the force-balance equation with the poloidal equation, and obtain a function $\Omega_F = \Omega_F(\psi)$ as the boundary condition at the plasma source, we can determine the spatial shapes of the two light surface. The plasma sources, which might be the surface of an accretion disk and the particle-production gap described in Blandford and Znajek [7], must locate between a zone between the two light surface.

The locations of the light surfaces depend on parameters Ω_F and a . To exist the corotating region sandwiched by two light surfaces, there are maximum and minimum values of Ω_F ; Ω_F equals to the maximum or minimum value when $r_L^{\text{in}} = r_L^{\text{out}}$. When $\Omega_F = \omega_H$ for a magnetic field line, the inner light surface reaches the event horizon. When $\Omega_F = 0$, the inner light surface locates on the static limit surface, while the outer light surface goes to infinity. If the black hole drags the magnetosphere ($0 < \Omega_F < \omega_H$), the inner light surface locates inside the ergosphere.

★ どの様な場合に、inner-light surface が生じているのか？

Light surface の場所は $\alpha = g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2 = 0$ により与えられるが、

$$\alpha = \alpha_Z^2 \left[1 - (v^{\hat{\phi}})^2 \right] = 0 \quad (2.1)$$

と書き直す事ができる。ここで、

$$\alpha_Z \equiv \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\text{ZAMO}} = \frac{1}{\sqrt{g^{tt}}} \quad (2.2)$$

は、“lapse function” (“redshift factor”) と呼ばれる。また、

$$v^{\hat{\phi}} \equiv \frac{(-g_{\phi\phi})}{\rho_w} (\Omega_F - \omega) \quad (2.3)$$

は、ZAMO 系で見た磁力線の toroidal 3-velocity である。ZAMO で見て磁力線の回転角速度が光速 ($v^{\hat{\phi}} = 1$) となるところで $\alpha = 0$ となることがわかる。

★ inner-light surface と event horizon のあいだの領域では、プラズマは磁力線と共回転できず、ブラックホールに向かって流れていなければならない。プラズマが“共回転する”ということは、プラズマの回転速度が光速を越える事を意味するのだが、もちろんこれは許されない。プラズマは、その慣性の効果により磁力線を ϕ 方向（回転方向と逆向き）に捩じり、スパイラル状の磁場配位をつくり出す。そして、そのスパイラル磁場に沿って、内向きに運動することで、自身の回転速度を常に光速以下にしながら、ブラックホールに落下する。この inner-light surface と event horizon のあいだの領域では、トロイダル成分のみの磁場配位、あるいはディスクから伸びたループ状磁場配位（プラズマ源のある場所から伸びた磁力線が、ブラックホールを貫かずにプラズマ源の別の地点と接続する）は実現できず、必ずブラックホールを貫く磁場となっている。¹

¹ただし、ideal MHD の範疇において。Ideal MHD の扱いの下でも、局所的に閉じたループ磁場が磁場の源（リング電流など）もろともブラックホールに落ちてしまうことは構わない。ブラックホール近傍においては局所的な乱流的磁場は、ブラックホールに飲み込まれてしまい（磁場のクリーニング効果）、大局的な磁場配位のみが生き残っていると考えられる。

Killing horizon : $\xi^2 = 0$ 面

キリングベクトル $\xi = k + \Omega_F m$ を導入すると、

$$\alpha(r, \theta) \equiv \xi^2 = \xi_\mu \xi^\mu = g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2 \quad (2.4)$$

と表すことができる。ここで、 $k^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $m^\mu = (0, 0, 0, 1)$ は、それぞれ timelike Killing vector と axial Killing vector である。 $\xi^2 = 0$ 面は null surface であり、キリング・ホライズン (Killing horizon) とよばれる。この面は、Light surface ($\alpha = 0$) でもあるが、磁力線と一緒に角速度 Ω_F で回転するプラズマにとっての “horizon” とみなせる。 $\xi^2 < 0$ 領域は spacelike ということになるが、このことは、このプラズマが、その領域では一定の (r, θ) に留まることができないことを意味する。 $\xi^2 < 0$ 領域は、inner-Light surface の内側、あるいは outer-Light surface の外側に相当するが、その領域のプラズマが timelike であるためには、必ず外側（遠方へ）あるいは内側（ブラックホールへ）に運動しなければならない。^a

^a Event horizon においてキリングベクトル $\xi = k + \omega_H m$ を考えると、

$$\xi^2 = \xi_\mu \xi^\mu = g_{tt} + 2g_{t\phi}\omega_H + g_{\phi\phi}\omega_H^2 = 0 \quad (2.5)$$

と null surface になっていることが確認できる。 ω_H はブラックホールの自転角速度で、 $\omega_H = a/(r_H^2 + a^2)$ である。ところで、 $k^2 = g_{tt} = 0$ 面は、the infinite redshift surface とよばれ、ergosphere の外側の境界面を表す。ブラックホールが自転している場合には $\xi \neq k$ なので、Killing horizon とは一致しない。Ergosphere 内部では $k^2 < 0$ となり、spacelike である。このことは、遠方の観測者から見て時空の引きずりが光速度をこえることによる。

2.2 Alfvén Points

★ アルフェン点：

The function appeared in the poloidal equation:

$$f = - \frac{G_\phi + G_t \tilde{L}}{\rho_w (M^2 - \alpha)}, \quad (2.6)$$

When $M^2 = \alpha$, it seems that the function f diverges. To obtain the physical accretion flow, which streams with a finite velocity, we must require the condition

$$\tilde{L} = \left(\frac{G_\phi}{G_t} \right)_A \quad (2.7)$$

at there. Then, we obtain a finite value:

$$f = \frac{0}{0} \rightarrow \text{finite} \quad (2.8)$$

This point can be called as the general-relativistic version of the Alfvén point.

★ アルフェン点の特徴：

- $\alpha_A = M_A^2 > 0$
 \Rightarrow The Alfvén points must locate between two light surfaces.
- one or two Alfvén point(s)
 - $\omega_H < \Omega_F$ — [2]
 - $0 < \Omega_F < \omega_H$ — [1]
 - $\Omega_F < 0$ — [2]
- Forbidden regions
- Negative Energy Accretion

★ エネルギー／角運動量：

全エネルギー E と全角運動量 L は流線に沿っての保存量であるが、付録 C.2 の (C.32) 式と (C.33) 式において、 A と B の値がアルフェン点 (A) ではゼロとなることより、 $M^2 = \alpha_A$ に注意して、

$$E = \left(\frac{G_t}{\alpha} \right)_A e, \quad (2.9)$$

$$L = \left(\frac{-g_{\phi\phi}}{\alpha} \right)_A (\Omega_F - \omega_A) e. \quad (2.10)$$

と書ける。ここで、 $e \equiv E - L\Omega_F$ は、 Ω_F で回転する回転系から見た全エネルギーである。この式において、常に $\alpha_A > 0$ 、 $(-g_{\phi\phi})_A > 0$ 、 $e > 0$ であることより、もしも $(G_t)_A < 0$ となる地点にアルフェン点が置かれているならば、そのような流れのエネルギーは（遠方の観測者からみると）“負”ということになる。このことは、磁気流体が（正の質量エネルギーを持って）降着し始めるにも関わらず全エネルギーは負なので、force-free 磁気圏の場合のように、ブラックホールの回転エネルギーが磁気圏中に抽出可能であることを意味する。磁気流体の全エネルギーが負である場合、流体のエネルギーに比べて（負の）磁場のエネルギーが卓越していれば十分だが、磁場と流体の相互作用（エネルギーの変換）の結果、流体エネルギー成分もまた負になる事が可能である（その分の磁場エネルギー [絶対値] が小さくなる）。流体エネルギーが磁場との相互作用の結果、負値となる機構は “Magnetic Penrose Process” と呼ばれる [23]。

＜問題＞ 式 (C.29) および式 (C.30) がアルフェン点で発散しないためには、臨界条件として $A = 0$, $B = 0$ [式 (C.32), 式 (C.33)] を課す必要がある。これより、上記の式 (2.9), (2.10) と表される事を確認せよ。

Alfvén surfaces. Interestingly, when $L\Omega_F/E > 1$, we find that the total energy of MHD accretion becomes negative; this means the energy extraction from the rotating black hole.

2.3 Magnetosonic Points

磁気圏中のプラズマは降着円盤表面あるいはコロナから磁気圏中に放出され、ブラックホールへと降着する。プラズマは、ブラックホールの強重力に引かれて加速し落下していくが、FIDO から

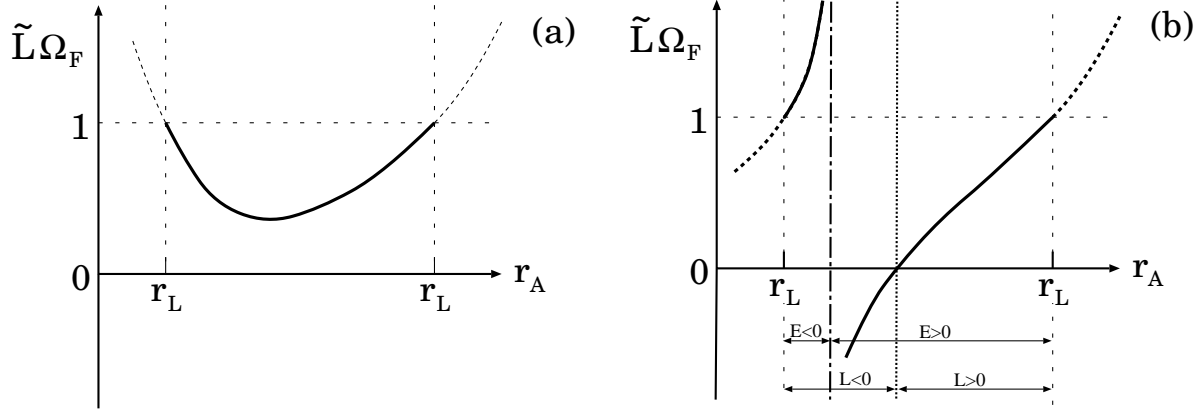


FIG. 2.4: Relations of $\tilde{L}\Omega_F$ to r_A : (a) $\Omega_F < 0$ or $\omega_H < \Omega_F$, (b) $0 < \Omega_F < \omega_H$. The vertical dot-dashed line denotes the $(G_t)_A = 0$ line and the vertical broken line denotes the $\Omega_F = \omega_A$ line. In the case of (a), $L\Omega_F$ is always positive; the energy of the accretion must be positive. In the case of (b), however, the negative energy accretion is realized if the Afvén point satisfies the condition $(G_t)_A < 0$. The Afvén point for $E < 0$ must locate inside the ergosphere.

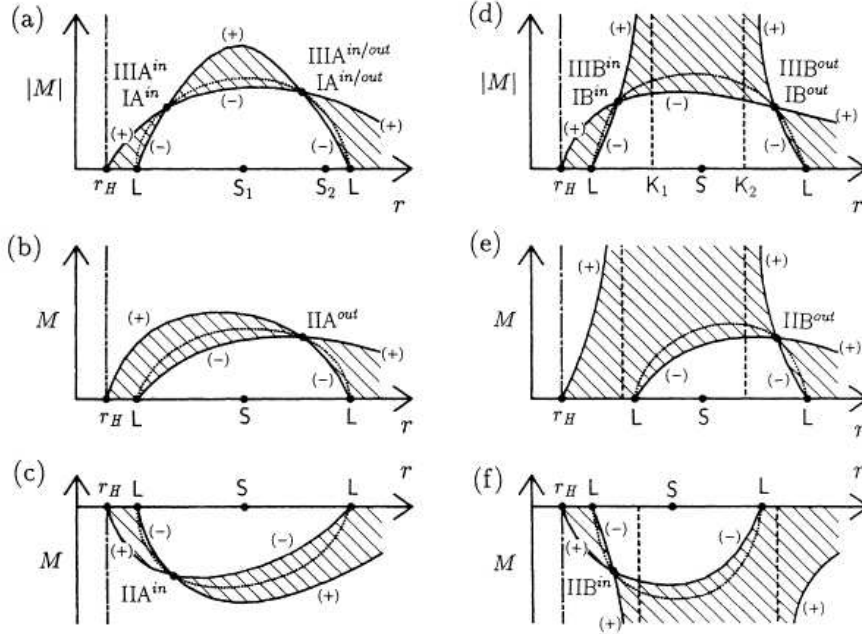


FIG. 5.—Shape of the flow's forbidden (shaded areas). The marks (+) and (−) indicate the branches of $M = M_+$ and $M = M_-$. The dotted and broken lines indicate the curves $E^2 = 0$ and of $k_4 = 0$, respectively. The light surface and the separation point are denoted by L and S . In the case of (a), either S_1 or S_2 can be selected. The negative M means the inflow.

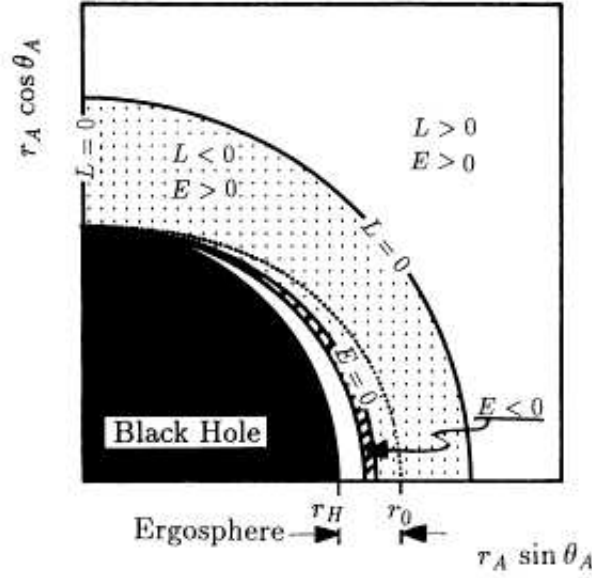


FIG. 6c

FIG. 6.—Contour maps of (a) the total energy and (b) the angular momentum of flows on the equatorial plane as functions of r_A and Ω_F , and (c) the spatial position of the Alfvén point which gives a negative energy flow or a negative angular momentum flow for the case $\Omega_F = 0.3\Omega_{\max}$ ($a = 0.8m$).

図 2.5: The spatial position of the Alfvén point generated a negative energy or a negative angular momentum accretion.

見るとプラズマの落下速度は horizon 上で光速となる（遠方にいる我々から見るとプラズマの速度はゼロに漸近する）。ここで考えている磁気流体プラズマ中の擾乱は磁気音波およびアルフェン波（もちろん FIDO で光速度以下）によって周囲に伝えられるのだが、少なくとも horizon 近くに、プラズマ流速が擾乱の速度を越える領域が必ず生じることになる。すなわち、event horizon は super-magnetosonic region（super-Alfvénic region でもある）で取り囲まれる事になる。Bondi accretion（非相対論の流体降着流解）の場合と同様に、流速が音速（今の場合磁気音速）と等しくなる地点で、ベルヌーイ方程式（Bernoulli equation）の微分形は発散してしまう。プラズマ源とブラックホールを繋ぐ物理的な流速解を得るためには、流れに特別な条件（臨界条件）を課し、方程式中の発散構造を打ち消す必要がある。以下では、このようなブラックホール磁気流体降着流の解の性質を調べる。

一般相対論的ベルヌーイ方程式の微分形は、以下のように表される：

$$(\ln u_p)' = - \left(\frac{u_p^2}{M^2} \right)^3 \frac{\mathcal{N}}{(u_p^2 - u_{\text{AW}}^2)^2 (u_p^2 - u_{\text{FM}}^2) (u_p^2 - u_{\text{SM}}^2)}, \quad (2.11)$$

ここで、 u_{AW} はアルフェン波の速さ、 u_{FM} と u_{SM} はそれぞれ、速い磁気音波と遅い磁気音波の速度であり、以下のように定義する。²

$$u_{\text{AW}}^2(r; \Psi) \equiv \frac{B_p^2}{4\pi\mu n} \alpha, \quad (2.12)$$

²アルフェン波と遅い磁気音波は電磁波の変形した波に、速い磁気音速波はイオン気体中の音波に対応していることが知られている。磁気音波の位相速度は磁力線に対する方向により異なるため、その波面の書き方は複雑になる。（「気体力学」朝倉書店、森岡 著、p165～p166 参照）

$$u_{\text{FM}}^2(r; \Psi) \equiv \frac{1}{2} \left(Z + \sqrt{Z^2 - 4C_{\text{sw}}^2 u_{\text{AW}}^2} \right), \quad (2.13)$$

$$u_{\text{SM}}^2(r; \Psi) \equiv \frac{1}{2} \left(Z - \sqrt{Z^2 - 4C_{\text{sw}}^2 u_{\text{AW}}^2} \right), \quad (2.14)$$

ただし、

$$Z \equiv u_{\text{AW}}^2 + \frac{B_\phi^2}{4\pi\mu n \rho_w^2} + C_{\text{sw}}^2, \quad (2.15)$$

$$B_\phi = -4\pi\eta E \rho_w f. \quad (2.16)$$

である。(2.11) 式の分子は、

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left(\frac{E}{\mu} \right)^2 \{ [\mathcal{R}(M^2 - \alpha)C_{\text{sw}}^2 + M^4 \mathcal{A}^2] (\ln B_p)' \} \\ &+ (1/2)(1 + C_{\text{sw}}^2) [M^4(M^2 - \alpha)k' - \mathcal{Q}\alpha'] \}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

である。ここで、

$$\mathcal{A}^2 \equiv e^2 + \alpha k = f^2(M^2 - \alpha)^2, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{R} \equiv \alpha e^2 - 2e^2 M^2 - kM^4, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{Q} \equiv \alpha e^2 - 3e^2 M^2 - 2kM^4, \quad (2.20)$$

$$e \equiv 1 - \Omega_F \tilde{L}. \quad (2.21)$$

The prime $(\dots)'$ denotes $[(\partial_\theta \Psi)\partial_r - (\partial_r \Psi)\partial_\theta]/(\sqrt{-g}B_p)$ which is a derivative along a stream line.

The relativistic sound velocity a_{sw} is given by

$$a_{\text{sw}}^2 \equiv \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln n} \right)_{\text{ad}} = (\Gamma - 1) \frac{\mu - m_{\text{p}}}{\mu}, \quad (2.22)$$

and the sound four-velocity is given by $C_{\text{sw}}^2 = a_{\text{sw}}^2/(1 - a_{\text{sw}}^2)$.

<問題>ポロイダル方程式を微分し、(2.11) を確かめよ。

When $u_p^2 = u_{\text{AW}}^2$, $u_p^2 = u_{\text{FM}}^2$ or $u_p^2 = u_{\text{SM}}^2$, the denominator becomes zero. Therefore, at these critical points, we must require $N = 0$ to obtain physical wind and accretion solutions which pass through these critical points smoothly. This condition gives a relation for the particle flux η against the location of the magnetosonic point.

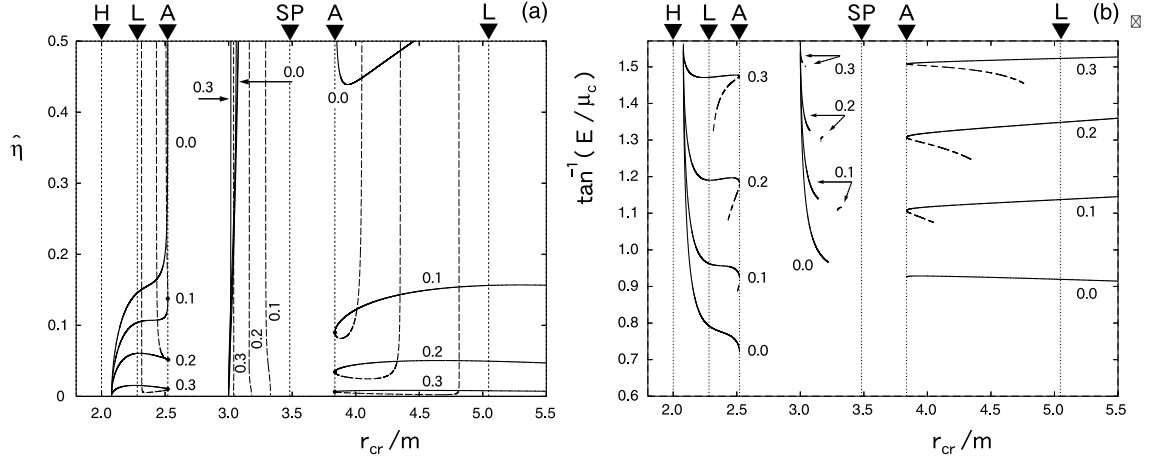
From the condition of $u_p^2 = u_{\text{FM}}^2$ or $u_p^2 = u_{\text{SM}}^2$ at the fast or slow magnetosonic points, the poloidal velocity at these critical points is written as

$$u_{\text{cr}} = \left[\frac{\mathcal{R}C_{\text{sw}}^2(M^2 - \alpha) + M^4 \mathcal{A}^2}{\mathcal{R}(M^2 - \alpha) - M^4 \mathcal{A}^2} \right]_{\text{cr}}^{1/2}, \quad (2.23)$$

and by use of the definition of Mach-number (1.35), the particle flux through a flux tube η is

$$\eta = \left(\frac{B_p}{4\pi\mu} \right)_{\text{cr}} \frac{M_{\text{cr}}^2}{u_{\text{cr}}}, \quad (2.24)$$

where the critical Mach-number $M_{\text{cr}}^2 \equiv M^2(r_{\text{cr}})$ is obtained as a solution of a cubic-equation for M^2 , which is derived from $N = 0$ and the poloidal equation (1.30) by eliminating the sound velocity. Thus, the accretion rate for each magnetic tube is denoted by the location of the fast or slow magnetosonic point.



⊠ 2.6: (a) Relations between r_{cr} and $\hat{\eta}$ and (b) relations between E/μ_c and r_{cr} for a radial flow with $\delta = 0$ in a Schwarzschild black hole magnetosphere with several ζ_{cr} values (0.00, 0.10, 0.20, 0.30). The angular velocity of the magnetic field is $\Omega_F = 0.8\Omega_{\text{max}}$, where $m\Omega_{\text{max}} = 0.192$. The location of the Alfvén point is specified by $x_A = 0.8$, which corresponds to $\Omega_F \tilde{L} = 0.7287$. The solid-curves indicate $\hat{\eta} = \hat{\eta}(r_{\text{F}})$ with $r_{\text{cr}} = r_{\text{F}}$. The dashed-curves indicate $\hat{\eta} = \hat{\eta}(r_{\text{S}})$ with $r_{\text{cr}} = r_{\text{S}}$. The shape of forbidden regions corresponds to type IA.

2.4 Trans-Magnetosonic Accretions

We assume split monopole magnetic field.

- the locations of the trans-fast magnetosonic points
 - inner Fast magnetosonic point
between the inner light surface and the event horizon
 - intermediate Fast magnetosonic point
between the inner and outer Alfvén points
- the restriction on the fast points
 - For a smaller η value, two states of the accretion are possible. (Fig.7.5a)
 - For a larger η value, the inner branch do not give the fast magnetosonic point. (Fig.7.5b)
- two regimes of the trans-fast MHD accretion solutions
 - inner A.P \Rightarrow inner F.P. \Rightarrow E.H.
 - outer A.P \Rightarrow intermediate F.P. \Rightarrow E.H.

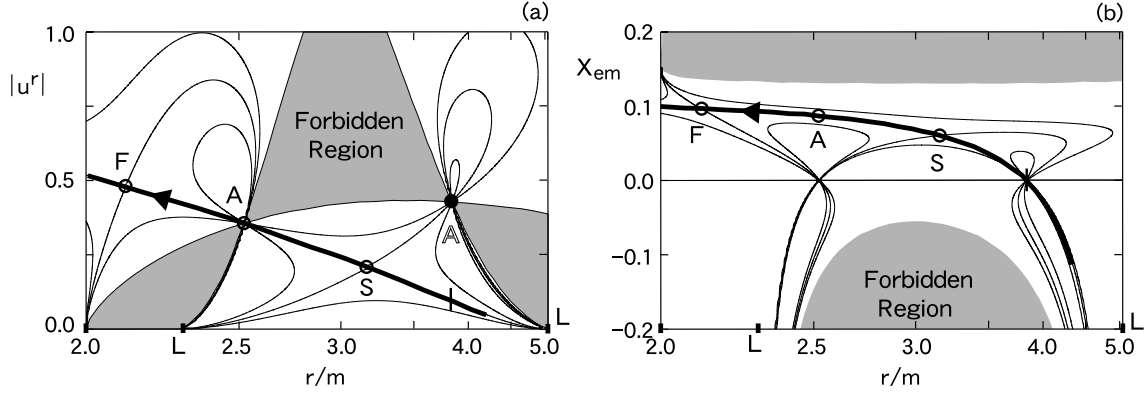


图 2.7: An example of the trans-fast MHD accretion solution (thick curves); (a) radial 4-velocity and (b) the ratio of the electromagnetic energy to the total energy. This solution passes through the inner Alfvén point and the inner fast magnetosonic point ($S \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow H$), where $a = 0.0$, $\Omega_F = 0.8\Omega_{\max}$, $\delta = 0.0$, $\Gamma = 4/3$ and $\zeta_F = 0.2$. The location of the Alfvén point is specified by $x_A = 0.8$, which corresponds to $\Omega_F \tilde{L} = 0.7287$. The location of the fast magnetosonic point is $r_F = 2.10935m$, which gives $E_F/\mu_c = 3.6643$ and $\hat{\eta} = 0.0337$. The requirement that $\hat{\eta} < \hat{\eta}_{\max}$ is satisfied.

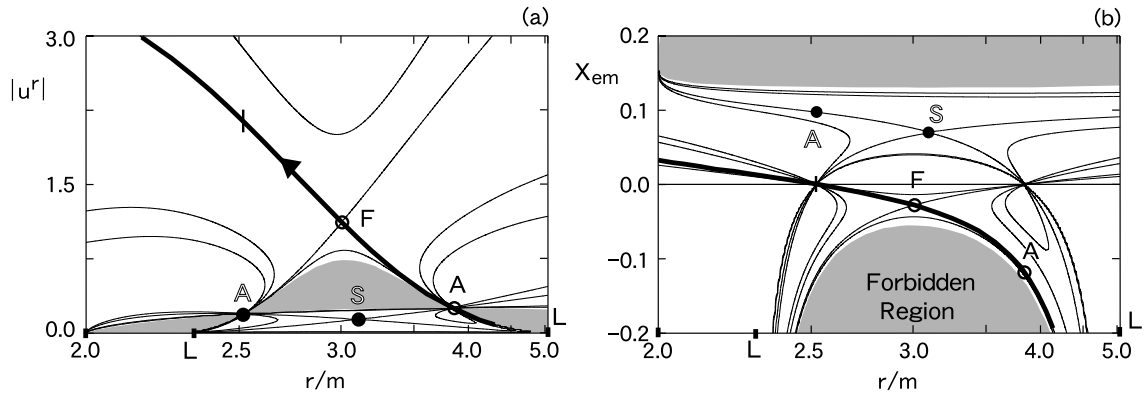


图 2.8: An example of the trans-fast MHD accretion solution (thick curves) passing through the outer Alfvén point and the middle-fast magnetosonic point; (a) radial 4-velocity and (b) the ratio of the electromagnetic energy to the total energy. The location of the fast magnetosonic point is $r_F = 3.00490m$, which gives $E_F/\mu_c = 9.8666$ and $\hat{\eta} = 0.0378$.

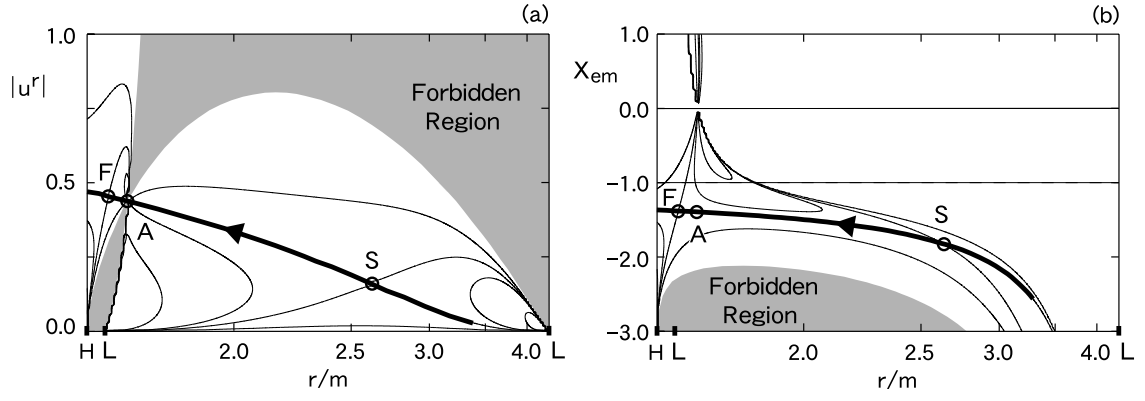


图 2.9: An example of a negative energy trans-fast MHD accretion solution (thick curves); with (a) radial 4-velocity and (b) the ratio of the electromagnetic energy to the total energy. The flow parameters are $a = 0.8m$, $\Omega_F = 0.6\Omega_{\max}$, $\delta = 0.0$, $\Gamma = 4/3$, $\zeta_F = 0.1$, $x_A = 0.95$ ($\Omega_F \tilde{L} = 5.1710$) and $r_F = 1.647934m$, which gives $E_F/\mu_c = -0.15855$ and $\hat{\eta} = 0.0297$.

Magnetically Dominated Limit (force-free limit):

$$\eta \rightarrow 0, \quad E \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow \infty, \quad (2.25)$$

but

$$\eta E \rightarrow \text{finite}, \quad \eta L \rightarrow \text{finite}. \quad (2.26)$$

- The inner Alfven point moves toward the inner light surface.
- The inner fast point moves towards the event horizon.
- The intermediate fast point disappears.
- The accretion must pass through the inner fast point after passing through the inner Alfvén point.

Fluid's pressure dominated accretion onto a black hole

- The forbidden region shrink vertically in Figure.
- The inner fast point disappears.
- Fast magnetosonic wave speed \rightarrow sound wave speed
- \Rightarrow Hydro-dynamical accretion solution

第3章 Energy generation in Black Hole Magnetosphere

“ene-ex.tex”

3.1 Gravitational energy of accreting matters

- gravitational energy of accreting plasmas
 - 回転ブラックホール — ガスの静止エネルギーの最大で 42% を放出できる
 - 回転していないブラックホール — 最大で 6%
- hole’s rotational energy extraction by the Blandford-Znajek (1977) process
 - 質量 $10^8 M_{\odot}$ のブラックホールが最高速で回転している場合、約 3×10^{48} KWh となる。これは、平均的なクエーサーが数十億年にわたって同じ高度で輝き続けるのに等しい量である。ただし、ブラックホールの回転エネルギーのすべてを抽出可能なわけではないことに注意。具体的な評価には、ガスの降着率 (エネルギーや角運動量をブラックホールに持ち込む) や BZ-process による回転エネルギー抽出の効率のモデルが必要。ブラックホールの進化の問題として研究されている。
- High-energy radiation
- Plasma ejection from the Disk (Jet/Wind)

3.2 Energy extraction from a Rotating Black Hole

回転するブラックホールは、回転エネルギーの形で膨大なエネルギーを蓄えることができる。回転エネルギーの抽出機構として “Penrose process” と “super-radiant scattering (seper-radiance)” さらに 電磁気的な相互作用による機構 “Blandford-Znajek process” およびその MHD への拡張版を紹介する。

3.2.1 Penrose process

(Penrose 1969, Wagh & Dadhich 1989)

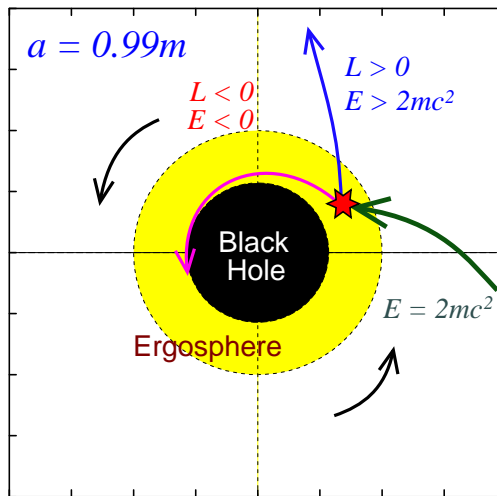


図 3.1: Penrose process (Christodoulou 1970). エネルギー E_0 で ergosphere 内に入射された粒子を 2 つの粒子に分裂させる. 一方の粒子が負のエネルギー E_1 でブラックホールに落下するとき, 他方の粒子は $E_2 > E_0$ で遠方に脱出できる. 斜線のついた曲線は, それぞれの粒子に関する有効ポテンシャルである.

一般相対論的な効果として注目すべきは, static limit surface 上でポテンシャルの値はゼロとなり, ergosphere では負の値となることである. すなわち, ergosphere 内においては粒子の負のエネルギー軌道が可能となるのである.

このエルゴ領域における負エネルギー軌道の存在を利用して, ブラックホールの回転エネルギーを引き抜く機構が考えられた. あるエネルギーと角運動量をもつ粒子をブラックホールから離れた地点からエルゴ領域へ放り込んでやり, エルゴ領域内でこの粒子を 2 つの断片に分裂させる. 一方を負のエネルギー軌道に落とすことが出来れば, 他方は入射時 (分裂前の粒子が持ち込んだエネルギー) よりも大きなエネルギーを持って遠方に去ることができる. このことは, ブラックホールからの (回転) エネルギーの引き抜きを意味する. ただし, 分裂粒子を負のエネルギー軌道に落とすためには, 分裂時の相対速度が $0.5c$ 以上でなければならず, 天体現象を説明するためには現実的ではないと考えられている.

- 散乱による過程 (collisional Penrose process)
(Piran & Shaham 1977, Kafatos & Leiter 1979)
- 多粒子の衝突と emission process による過程 (Phinney 1983)
- 粒子が電磁場中に存在しているとき (Wagh & Dadhich 1989)¹

Penrose process はブラックホールの回転エネルギーを引き抜く機構としてきわめて魅力的であり, 銀河中心核への応用もいくつか試みられた (Wheeler 1971, Mashoon 1973, Fishbone 1973). しかしながら, 銀河中心核のモデルとしては, この節の後半で述べるような分裂速度に関するきびしい制限が課せられており, 現実的でないと考えられた (Bardeen et al. 1972, Wald 1974a). その後, Piran & Shaham (1977) は, 2 つあるいはそれ以上の粒子が ergosphere 内で散乱されることで, 粒子を負のエネルギー軌道に落とし, 他の粒子を脱出させることでブラックホールの回転エ

¹see, Appendix (“penrose-1.tex”)

エネルギーを取り出すことを考えた (collisional Penrose process). もちろん, 散乱粒子に関しても分裂速度に関する制限が課せられているわけだが, photon と electron のコンプトン散乱によって electron を負のエネルギー軌道に押し込めることは可能である. この photon は, X-ray や γ -ray として遠方へ放出されるだろう. その他, γ -ray photons によって引き起こされる電子と陽電子の対生成により, エネルギーを引き抜くことが考えられた (Kafatos & Leiter 1979).

3.2.2 Super-Radiance of waves

ブラックホールに向けて入射された波が, 回転するブラックホール (の有効ポテンシャル) に散乱されて増幅されて反射される機構である. この反射波が持ち出すエネルギーは, ブラックホールの回転エネルギーに由来する.

ブラックホールへの入射波を考えると, 通常入射波はポテンシャルの壁で反射されるが, 一部はすり抜けてブラックホールへ吸い込まれる. したがって, 反射波は入射波より弱められると考えられる. しかしながら, もし波の位相速度がブラックホールの回転角速度より小さい場合には, 反射波は増幅され² ブラックホールはエネルギーを失う. Press & Teukolsky (1972) は, ブラックホールをシェル状の“鏡”でおおってやり, 増幅された波を再びブラックホールへ反射し, super-radiance を繰り返すことで, “black-hole bomb” が作れると指摘している. 鏡の役割を果たすものとしては, 周りに分布するガスなどを考えている. なお, Scalar 場の場合よりも, vector 場, tensor 場に対してより大きな増幅率をもつことが示されている.

3.2.3 Blandford-Znajek process

(Blandford & Znajek 1977)

ブラックホールの周りに分布する大局的磁場による磁気トルクにより, ブラックホールの回転にブレーキをかける機構である. その反作用として, 周囲の磁気圏にエネルギーが渡されることになる.

Force-free 磁気圏において, 電流は磁場に沿ってながれるが, ブラックホールと遠方との相互作用は, 磁力線を導線とした電流回路のアナロジーにより議論することができる. この立場では, ブラックホールは仮想的に 30Ω の電気抵抗を持つ金属球のように振舞うことになり [67], ブラックホールからのエネルギーの引き抜きが可能となる. 大まかに見積ると, ブラックホールの持つ回転エネルギーの半分が引き抜きうる.

Force-free 磁気圏における電磁気的なエネルギーフラックス $\mathcal{E}^A \equiv T_t^A$ と角運動量フラックス $\mathcal{L}^A \equiv -T_\phi^A$ (ここで $A = r, \theta$) は,

$$\mathcal{E}^r = \frac{\Omega_F A_{\phi, \theta} B_\phi}{4\pi\sqrt{-g}}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{E}^\theta = -\frac{\Omega_F A_{\phi, r} B_\phi}{4\pi\sqrt{-g}}, \quad (3.2)$$

また, $\mathcal{E}^A = \Omega_F \mathcal{L}^A$ で与えられる. ブラックホールを貫く磁力線によって引き抜かれるまたは流れ込むエネルギーは, トロイダル磁場の event horizon での境界条件 [66]

$$B_\phi(r_H, \theta) = \frac{\sin\theta(r_H^2 + a^2)(\omega_H - \Omega_F)}{\Sigma_H} A_{\phi, \theta}(r_H, \theta) \quad (3.3)$$

²これと同様の現象は, 回転する重力場に限らず, プラズマ波に関するものとして Ostrovskii (1972) の研究があり, また半導体中の音波に関して, carrier のドリフト速度が音波の位相速度より大きいときに, 音波が増幅されるとした Gulyaev & Pustovoi (1965) の研究がある. これらはすべて, 媒質の運動速度が波の位相速度より大きいときにみられる (Zel'dovich 1972).

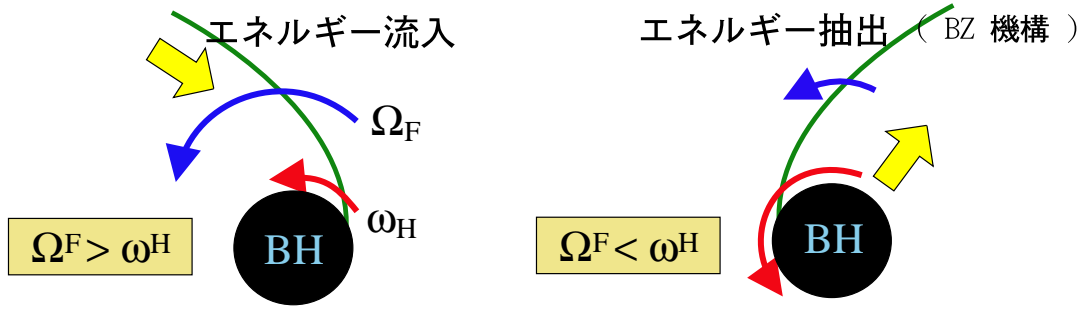


図 3.2: ブラックホールの自転角速度とトロイダル磁場。 Ω_F と ω_H の大小で B_ϕ の符号が変わることに注意しよう。

を用いて、

$$\mathcal{E}^r = \frac{\Omega_F(\omega_H - \Omega_F)(r_H^2 + a^2)}{4\pi\Sigma_H^2} A_{\phi,\theta}^2 \quad (3.4)$$

となる [7]。したがって、 $0 < \Omega_F < \omega_H$ であるときには、 $\mathcal{E}^r > 0$ となり、ブラックホールから正のエネルギーが出て行くと解釈することができる。このとき、角運動量に関しては $\mathcal{E}^r \leq \omega_H \mathcal{L}^r$ が成り立つがこのことはブラックホールの面積増大則が満たされていることを保証している。引き抜かれるエネルギーは、磁場の強さと、磁気圏の角速度に依存しているが、ある角速度 ω_H で回転しているブラックホールに関して、最大の引き抜きパワーを与える Ω_F は、 $\Omega_F = (1/2)\omega_H$ になっている。ブラックホールの回転が速いほど、引き抜きの効率は良いように思えるが、この場合回転の効果は磁力線を event horizon から締め出してしまうので (Bicak & Dvorak 1976, 1980)、電磁気的な引き抜き効率はかえって悪くなるであろう。³

3.2.4 Negative-Energy Plasma Accretions

(Takahashi et al. 1990)

磁気圏中にプラズマが分布しブラックホールへのプラズマ降着がある場合でも、磁場とプラズマ流体のトータルのエネルギーが負になりうる。プラズマは正のエネルギー (質量エネルギー・運動エネルギー・内部エネルギー) をブラックホールに持ち込むが、磁場が十分強い場合には依然 Blandford-Znajek process が有効であることが示された。このことは、磁気流体降着流における臨界点 (アルフェン点) の解析から明らかになった。ブラックホール近傍の磁場が、プラズマの慣性の効果に対して十分支配的であるとき、アルフェン点は light surface に位置するが、このときに負エネルギーの磁気流体降着流が実現する。このような light surface およびアルフェン点は ergosphere 内に位置する。

ブラックホールから引き抜かれた回転エネルギーは、電磁気的なエネルギーフラックス (ポインティング・フラックス) として、磁気圏に流れ込むが、磁気流体としての相互作用により、プラズマのエネルギーに転化されることができる。ブラックホール磁気圏には、プラズマ源を分流点とした inflow 領域と outflow 領域が存在するが、ブラックホールからのエネルギーは (inflow 領域における負のエネルギー降着流)、一旦プラズマ源に運ばれることになる。ブラックホールからのエ

³ただし、event horizon の外側の時空においても、時空の引きずりは行なわれているので、ブラックホール (時空) からの電磁気的な引き抜きは期待できる。詳細のためには、event horizon 極近傍でのプラズマ (もはや流体として扱えるとは限らないが) と電磁場の相互作用を議論する必要があるだろう。

エネルギーのすべてがそのまま遠方に向けて再放射されるのか、プラズマ源でのエネルギー吸収があるのか、あるいはプラズマ源自体のエネルギー放出も加わって増幅されたエネルギー放射として振舞うのかは、もちろんプラズマ源のモデルに依るだろうが、いずれにしろ放出されたエネルギーは磁場のエネルギー成分からプラズマの運動エネルギーへの転化が可能であり、加速されたプラズマ流が得られる。

磁気圏中のプラズマに作用する電磁力 ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$: ローレンツ力) のうち、プラズマの加速に使われる成分は、 $(j_p)_\perp \times B_\phi$ であり、磁気面を横切る電流 $(j_p)_\perp$ と磁場のトロイダル成分 B_ϕ が重要である。磁気面を横切る電流 (の向き) は磁気面の分布 (磁束管の断面積変化など) と密接に絡んでいる。磁場のトロイダル成分 B_ϕ は磁気圏を流れるポロイダル電流とプラズマの慣性の効果によって決まるが、中心天体や周りのプラズマが回転していることに由来している。

付録A Bondi flow model

— Newtonian HD flows —

“newton-mhd.tex”

[I] 基礎方程式

定常・軸対称、球対称、ニュートン重力を仮定。以下では、流線の束を考え、その断面積を $S(r)$ とする。

- 連続の式：

$$\frac{1}{S} \frac{d}{dr}(S\rho v) = 0 \quad (\text{A.1})$$

- 運動方程式：

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} \quad (\text{A.2})$$

- 状態方程式 (ポリトロピック関係式)：

$$P = K\rho^\Gamma \quad (\text{A.3})$$

ここで、 K と Γ は定数である。断熱的な場合には、 Γ は定圧比熱と定積比熱との比を表している。

[II] 流れの保存量

式 (A.1)、式 (A.2) をそれぞれ積分して、

$$S\rho v = \dot{M} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{a_{\text{sw}}^2}{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E \quad (\text{A.5})$$

ここで、 \dot{M} 、 E は積分定数である。 \dot{M} は、ガスの質量降着率 ($v < 0$) あるいは放出率 ($v > 0$)。また、 E はエネルギーを意味する。また、 $a_{\text{sw}} \equiv \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_{\text{ad}}} = \sqrt{\Gamma P / \rho}$ は音速である。式 (A.4) と式 (A.5) より、

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\Gamma K}{\Gamma - 1} \left(\frac{\dot{M}}{Sv} \right)^{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E \quad (\text{A.6})$$

球対称の降着流 (道径方向のみの流れ) の場合には、 $S(r) = 4\pi r^2$ となる。

[III] ポロイダル方程式 (微分形)

式 (A.2) の右辺 1 項目を、式 (A.1)、式 (B.6) を用いて変形させると

$$(v^2 - a_{\text{sw}}^2) \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{a_{\text{sw}}^2}{S} \frac{dS}{dr} - \frac{GM}{r^2} \quad (\text{A.7})$$

あるいは、

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{(a_{sw}^2/S)(dS/dr) - (GM/r^2)}{v^2 - a_{sw}^2} \quad (\text{A.8})$$

と書ける。この表式において、 $v^2 = a_{sw}^2$ のときには、 dv/dr が有限の値を持つためには (物理的な解はこの値が有限であるべき)、式 (A.7) の右辺 (あるいは式 (A.8) の右辺の分子) が同時にゼロになっていなければならない。この条件は、臨界条件 (critical condition) とよばれる。

[IV] ラバール管を通る流れ

重力が無視できる場合：式 (A.8)、すなわち右辺の分子の第2項目が無視できる場合を考えよう。流速が音速と同じになるとき (音速点)、そこでの「臨界条件」を満たすためには、その場所で流線の束の断面積は、極小になっていれよ。この状況を実現するための途中がくびれた管は、「ラバール管」とよばれるが、ロケットのノズルなどに利用されている。このような形状の流管を利用すると、亜音速から超音速の流れの解 (遷音速流解) を得ることができる。ロケットの場合、ノズルで超音速の高速流ガス流を作る出すことで、ガスに大きな運動量を持たせ放出し、その反作用で推進するのである。

[V] Bondi 解

太陽や恒星では、大気の一部が「太陽風」や「恒星風」として外部空間に放出されている。太陽 (恒星) 表面のある部分からは静的に、またある部分からはフレアー現象としてダイナミカルに、プラズマが放出される。地球も、太陽からのプラズマ風の中にあって、様々な影響を受けているのである。このような星からの放出プラズマは、低速 (亜音速) 状態から加速され、超音速となって隣接する星系に向かう。以下では、恒星風や太陽風のモデルとして、星から放射状 (球対称) に放出されるプラズマ流を考える。

球対称のプラズマ流の場合、流線の束の断面積は単調に増加する。したがって、流速管の断面積 S は極小値を持たない。しかしながら、式 (A.8) からわかるように、中心天体の重力 (分子の第二項) のため、音速点で分子がゼロとなると同時に、分子がゼロになる解 (遷音速流解) が可能である。

遷音速解を考察する場合に、しばしば流速 v と音速 a_{sw} の比について考えることがある。この量は、「マッハ数」とよばれる (このテキストでは $\mathcal{M} \equiv v/a_{sw}$ と記す)。「マッハ数」は、超音速旅客機やジェット戦闘機の性能を示す指標として使われることもあるので、聞いたことがあることと思う。さて、 $S = 4\pi r^2$ とし、マッハ数を用いて式 (A.8) を書き直してみると、

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{2r - (GM/a_{sw}^2)}{\mathcal{M}^2 - 1} \quad (\text{A.9})$$

と表せる。上式で $\mathcal{M}^2 = 1$ となるところが音速点であるが、その音速点の位置は

$$r_{cr} = \frac{GM}{2a_{sw}^2} = \frac{(5 - 3\Gamma)GM}{4(\Gamma - 1)E} \quad (\text{A.10})$$

とあらわされ、天体の質量と流れの熱的エネルギーに依存して決まることがわかる。

この事情は、本質的にはラバール管を通過するガスの流れの場合と同様である。ラバール管の場合には、管の断面積がくびれて最小となる地点に音速点が位置したが、Bondi-flow の場合の流束

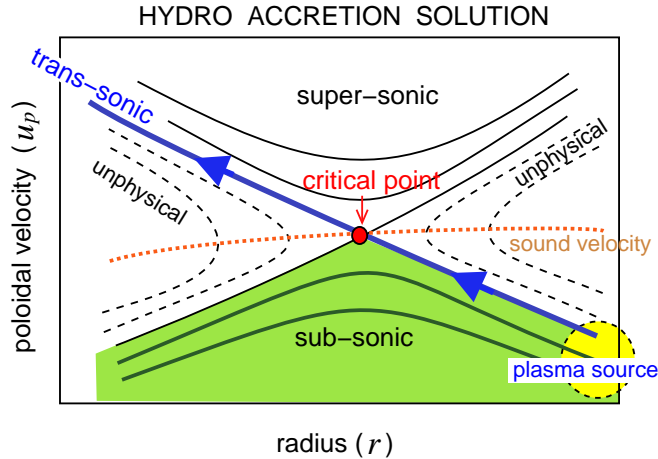


図 A.1: (定常) 遷音速降着流解。音速を超えて超音速になるためには、音速点 (critical point) での臨界条件を満たす必要がある。式 (A.8) より、各点での傾きが与えられ、上図のような X-type トポロジーの解曲線が得られる。

管の断面積は放射状であり、その断面積は単調に減少 (または増加) である。Bondi-flow の場合には、重力場の存在が effective に断面積を変化させる役割 (流速管がくびれることに相当) を果たしているのである。ここで紹介したような、ラバール管を通過する流れに関しては、流体力学の教科書等で多数議論されているので参照されたい。

この音速点に関し、 $\Gamma = 5/3$ のときは音速点を通過する解が存在しなくなることに注意すべきである。完全電離したプラズマが完全に断熱されていた場合には $\Gamma = 5/3$ となるが、このようなプラズマが遠方からの降着する (無限遠で静止) 場合、遷音速とはならず、至るところ亜音速ということになる。初期に亜音速の流れが遷音速となるためには、非断熱効果 (熱伝導や輻射冷却など) によって $\Gamma < 5/3$ となる必要がある。(岩波講座『天体高エネルギー現象』高原文郎 著)

<問題>

- (a) 流れの保存量 (質量降着率) に関して、式 A.4 を導出せよ。
- (b) 流れの保存量 (流れの全エネルギー) に関して、式 A.5 を導出せよ。
[HINT : ポリトロピック関係式を用いよ]
- (c) プラズマ流速についての方程式 (A.8) を導出せよ。

<問題>

(a) 速度と半径をそれぞれ音速と音速点の半径で無次元化して、式 (A.4)、(A.5) をそれぞれ書き換えよ。[$\bar{v} = v/a_{sw}$ 、 $\bar{r} = r/r_{cr}$ などおくとよい。]

(b) つぎに、 $\bar{v} = 1$ 、 $\bar{r} = 1$ 、のときの E を、 \dot{M} の関数として求めよ。

(c) さらに、 $E = f(\bar{r}, \bar{v}; \dot{M})$ の形に式を変形し、いろいろな \dot{M} の値について、 \bar{r} - \bar{v} 面上に E 値の等高線をプロットせよ (一つの \dot{M} の値に対して1枚の等高線の図)。ある降着率 \dot{M} において、等高線の各曲線は、異なる E 値に対して描かれる。それらの曲線は、流体の流れの様子を示す解になっている。

付録B Weber-Davis (1967) model — Newtonian MHD flows —

“newton-mhd.tex”

B.1 Basic equations

- オームの法則

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (\text{B.1})$$

- 連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

- 運動方程式

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P - \rho \nabla \Psi + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_c \quad (\text{B.3})$$

ここで、最後の項 \mathbf{F}_c は、回転による遠心力の項であり、

$$\mathbf{F}_c = \frac{\rho v_\phi^2}{r \sin \theta} \mathbf{e}_R = \frac{\rho v_\phi^2}{r} \mathbf{e}_r + \frac{\rho v_\phi^2}{r \tan \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{B.4})$$

である。定常で球対称の流れの場合 (Weber-Davis model: rarial 成分のみ) の場合：

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r + \frac{\rho v_\phi^2}{r} \quad (\text{B.5})$$

ここで $\mathbf{v} = u \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\phi \mathbf{e}_\phi$ である。

- 状態方程式 (ポリトロピック関係式)：

$$P = K \rho^\Gamma \quad (\text{B.6})$$

ここで、 K と Γ は定数である。断熱的な場合には、 Γ は定圧比熱と定積比熱との比を表している。

- 重力ポテンシャル¹

- Normal stars [non-relativistic stars]

$$\Psi(r) = -\frac{GM}{r}$$

- Compact massive stars [relativistic stars]

$$\Psi(r) = -\frac{GM}{r - r_g}, \quad r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

¹ $\mathbf{F}_{\text{gr}} = -\nabla \Psi = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$

B.2 Field-aligned Flow Parameters

以下では、定常 ($\partial/\partial t = 0$) で軸対称 ($\partial/\partial\phi = 0$) である理想磁気流体プラズマ ($\eta = 0$) の流れを考える。このときのプラズマは、磁力線に沿って流れるが、流線 (磁力線) に沿って5つの保存量が存在する。

2

(1) Mass flux conservation law : 連続の式を積分することで、以下の質量フラックス保存則が得られる。プラズマ源から外向きの流れに対しては質量放出率 (mass ejection rate) とよばれる。あるいは、中心天体に向かう流れに対して、質量降着率 (mass accretion rate) とよばれる。

$$\eta_N = \frac{\rho u}{B_r} \quad (\text{B.7})$$

また、 $[\rho = a = \text{sw}^{2N}/(\Gamma^N K)$ より]

$$\dot{\mathcal{M}}_N = a_{\text{sw}}^{2N} u/B_r, \quad (\text{B.8})$$

が用いられることもある。ここで、 $a_{\text{sw}} = (\Gamma P/\rho)^{1/2}$, $N = 1/(\Gamma - 1)$ である。

(2) Total Energy conservation law : 運動方程式を積分することで、エネルギーに関する以下の保存量が得られる。これは、磁気流体の全エネルギーである。

$$E = \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_\phi^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P}{\rho} + \Psi(r) \right) - \frac{rB_\phi B_r \Omega_F}{4\pi\rho u} \quad (\text{B.9})$$

あるいは、

$$\mathcal{E} = E - \Omega_F L = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_\phi^2 + N a_{\text{sw}}^2 + \Psi(r) - r v_\phi \Omega_F \quad (\text{B.10})$$

が用いられることもある。

(3) Angular momentum conservation law : 角運動量保存則

$$L = r v_\phi - \frac{r B_\phi B_r}{4\pi\rho u} = r v_\phi - \frac{r B_\phi}{4\pi\eta_N} \quad (\text{B.11})$$

(4) radial magnetic-flux conservation law : 磁気フラックス保存則
放射状形状を仮定した場合 :

$$B_0 = B_r r^2 \quad (\text{B.12})$$

(5) Perfect conducting fluid : Maxwell 方程式より — 完全導体流体

$$r(uB_\phi - v_\phi B_r) = -\Omega_F B_0 \quad (\text{B.13})$$

² Here, we use the notations in [12].

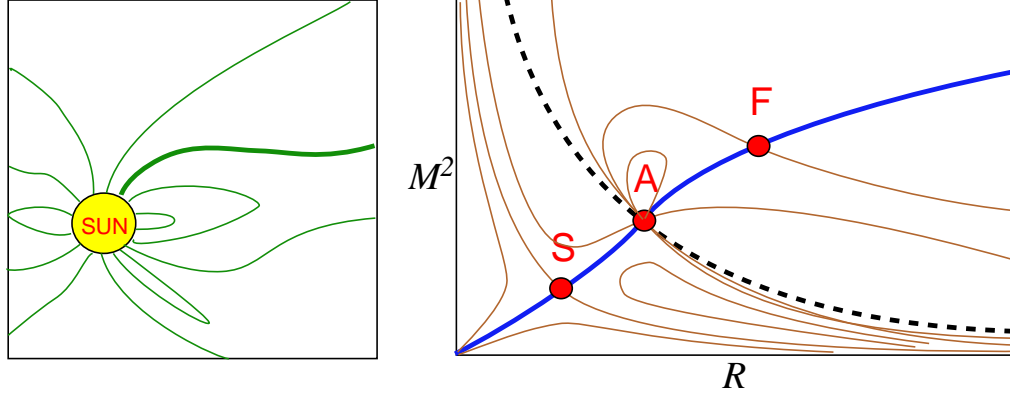


図 B.1: 太陽風のモデル (遷磁気音速流の解)。

B.3 Wind equation

恒星 (太陽) からの風を考える時には、球対称として扱った方程式系が使える。全節で扱った流れに沿った保存量を用いると、トロイダル方向の速度は以下のように求まる：

$$v_\phi = \frac{uL - \Omega_F B_0 / (4\pi\eta_N)}{r[u - B_r / (4\pi\eta_N)]}. \quad (\text{B.14})$$

上記の v_ϕ は、 $u = B_r / (4\pi\eta_N)$ のとき、分母がゼロになる (臨界点)。このときの半径 $r = r_A$ は Alfvén radius とよばれる。流れの解がスムーズにこの地点を通過して super-Alfvénic flow となるためには、同時に分子もゼロ、すなわち $L = \Omega_F r_A^2$ が満たされなければならない。このように、流れの角運動量と磁力線の回転角速度の値により、アルフェン半径の位置が決まる。臨界点での流速は、 $u(r_A) = u_A \equiv B_0 / (4\pi\eta_N r_A^2)$ である。解曲線中の点 (r_A, u_A) はアルフェン点と呼ばれる。以上を整理すると、式 (B.14) は、

$$v_\phi = \frac{r\Omega_F(u/u_A - 1)}{M^2 - 1}. \quad (\text{B.15})$$

ここで、 $M^2(r) \equiv u^2 / u_{\text{AW}}^2 = 4\pi\eta_N u / B_r$ 、また $u_{\text{AW}}(r) \equiv B_r / \sqrt{4\pi\rho}$ である。

式 (B.5) に関して、以下の “ヒント” を利用して、流速 u を求めるための式を求めてみよう：

(ヒント A)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} a_{\text{sw}}^2 = a_{\text{sw}}^2 \left(\frac{1}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (\text{B.16})$$

(ヒント B)

$$\frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r = -\frac{1}{8\pi r^2} \frac{d}{dr} [(rB_\phi)^2] \quad (\text{B.17})$$

(ヒント C)

$$B_\phi = \frac{B_r L - \Omega_F B_0}{r[u - B_r / (4\pi\eta_N)]} = \dots \quad (\text{B.18})$$

これらを用いて、運動方程式 (微分形) は、

$$\frac{du}{dr} = \frac{N}{D}, \quad (\text{B.19})$$

となる。ここで、

$$N = ur \left[(ur^2 - 1)^2 (u - 1) \Omega_F^2 + \left(\frac{2a^2}{r^2} - \frac{\Psi'}{r} \right) (ur^2 - 1)^3 + u \Omega_F^2 (1 - r^2) (u - 1) (ur^2 + 1) \right] \quad (\text{B.20})$$

$$D = (u^2 - a^2)(ur^2 - 1)^3 - u^2 r^2 \Omega_F^2 (r^2 - 1)^2 \quad (\text{B.21})$$

先程のアルフェン点での条件に加えて、速い磁気音速点と遅い磁気音速点も流れの臨界点になっている。速い磁気音速点では流速が速い磁気音速に等しくなり、遅い磁気音速点では流速が遅い磁気音速に等しくなる。これらの地点では、上式の分母はゼロとなる。流れの解がスムーズにこの地点を通過して遷磁気音速流となるためには、同時に分子もゼロにならなければならない、(角運動量以外の) 残された流れのパラメータに制限を加えることになる。この事情は、本質的には(磁場無しの場合の) Bondi flow と同様である。

<問題>

(a) 運動方程式 (B.21) を導出せよ。

(b) 運動方程式 (B.21) の分母を因数分解し、アルフェン点、速い磁気音速点、遅い磁気音速点が流れの臨界点になっている事情を示せ。

磁気圧について

運動方程式の右辺にみられる電磁気力(ローレンツ力)について、その意味を考えてみよう(MKS unit)。 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 項に現れる電流を、マックスウェル方程式を用いて消去すると、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.22})$$

これにベクトル解析の公式：

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{B.23})$$

を用いると、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{B.24})$$

となる。右辺の第一項は、磁場による圧力(『磁気圧』: $P_M = B^2/2\mu_0$) による力($-\nabla p_M$) とみなすことができる。また、第二項は磁力線方向の磁場の変化を表し、『磁気張力』とみなすことができる。

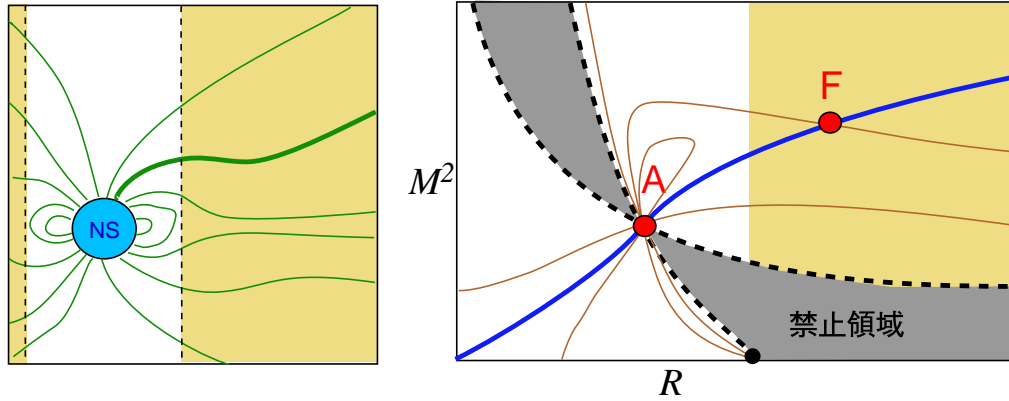


図 B.2: パルサー風のモデル (特殊相対論の扱いによる遷磁気音速流の解)。

B.4 Pulsar Wind

パルサー風の場合、パルサー（およびその磁気圏）の回転速度が極めて高速であるため、特殊相対論の扱いにより遷磁気音速流の解を求める必要がある。太陽風（ニュートニアン）の場合と比べて、「光円柱」が現れる点が異なる。この半径では、磁力線形状の回転速度が光速となる。そして、光円柱の外側では、磁力線形状の回転速度が光速を越えてしまう（物理的な情報が光速を越えるわけではないので構わない）。この領域では、磁力線と同じ回転角速度で回るプラズマの運動は禁止される。磁力線は、回転方向に対して反対向きにたわむような形状となるが（プラズマの慣性の効果）、プラズマが磁力線に沿って流れ出す事でプラズマの角速度を小さくできる。プラズマはほとんど導径方向に流れることで、光速以下の回転速度 ($v_{\phi} < c$) を実現している。詳細については、〈準備中〉。とはいえ、このパルサー風解の数学的な扱い・導出については、基本的には一般相対論による MHD flow の扱いと同様なので（重力の効果を無視すればよい）、そちらを参照して下さい。

付録C GRMHD flows

“mhd-deriv.tex” Feb., 2006

C.1 Conservation Laws of GRMHD flows

ブラックホール時空において、定常で軸対称な理想磁気流体流 (ideal MHD flows, where $\sigma \sim \infty$) を扱う。

(a) the angular frequency [4]

Equation (1.4) can be written

$$F_{\mu\nu}u^\nu = -\frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}^{\prime\nu} + \varepsilon u_\mu \right] = 0, \quad (\text{C.1})$$

or

$$F_{tr}u^r + F_{t\theta}u^\theta = 0, \quad (2a)$$

$$F_{rt}u^t + F_{r\theta}u^\theta + F_{r\phi}u^\phi = 0, \quad (2b)$$

$$F_{\theta t}u^t + F_{\theta r}u^r + F_{\theta\phi}u^\phi = 0, \quad (2c)$$

$$F_{\phi r}u^r + F_{\phi\theta}u^\theta = 0. \quad (2d)$$

From equations (2a) and (2d), we have

$$F_{t\theta} = -\frac{u^r}{u^\theta} F_{tr}, \quad (\text{C.3})$$

$$F_{\phi\theta} = -\frac{u^r}{u^\theta} F_{\phi r}. \quad (\text{C.4})$$

これより、以下を得る。

$$\frac{F_{tr}}{F_{r\phi}} = \frac{F_{t\theta}}{F_{\theta\phi}} \equiv \Omega_F \quad (\text{C.5})$$

一般に、ポロイダル面内のプラズマの速度成分 u^r 、 u^θ はゼロではないが、ここでポロイダル面内で磁力線に張りついたプラズマ ($u^r = u^\theta = 0$) を考えよう。そのようなプラズマは、 ϕ 方向に磁力線とともに回転することになる。このとき、(2b) 式と (2c) 式から

$$\frac{F_{tr}}{F_{r\phi}} = \frac{F_{t\theta}}{F_{\theta\phi}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \Omega \quad (\text{C.6})$$

となり、 $\Omega_F = \Omega_{u^r=u^\theta=0}$ となり、 Ω_F がプラズマの角速度になっていることがわかる。ideal MHD の仮定のもとで、磁場はプラズマに凍結しているので、 Ω_F は磁場（磁力線）の角速度と解釈できる。この磁場の角速度は、磁力線に沿って一定の値を取る。このことを以下に示そう。（プラズマ流が磁力線に沿って流れる場合には、 $\Omega_F \neq \Omega$ である。）

The Maxwell equation (1b) gives

$$F_{tr,\theta} + F_{\theta t,r} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$F_{\phi r,\theta} + F_{\theta \phi,r} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Substituting equation (C.3) into (C.7), then we get

$$u^A (\ln F_{tr})_{,A} = -u^\theta \left(\frac{u^r}{u^\theta} \right)_{,r} \quad (A = r, \theta) \quad (\text{C.9})$$

Similarly from equations (C.4) and (C.8) one gets

$$u^A (\ln F_{\phi r})_{,A} = -u^\theta \left(\frac{u^r}{u^\theta} \right)_{,r} \quad (A = r, \theta) \quad (\text{C.10})$$

Now by subtracting (C.9) from (C.10) we see

$$u^A [\ln \Omega_F]_{,A} = 0. \quad (\text{C.11})$$

That is, Ω_F is conserved along the flow lines. ¹

(b) the particle flux per flux tube [4]

Let us now return to equation (C.10) and write it as

$$u^A (\ln F_{\phi r})_{,A} = -u_{,\alpha}^\alpha + u^\alpha u_{,\alpha}^\theta / u^\theta. \quad (\text{C.12})$$

From baryon-number conservation it follows that

$$u_{,\alpha}^\alpha = -u^A (\ln \sqrt{-gn})_{,A}. \quad (\text{C.13})$$

With the aid of this we can cast equation (C.12) into the form

$$u^A [\ln \eta]_{,A} = 0, \quad (\text{C.14})$$

where

$$\eta \equiv \frac{\sqrt{-gn} u^\theta}{F_{r\phi}} \quad (\text{C.15})$$

From equation (2d), (2b) and (2c), we also obtain the next relations

$$\eta = \frac{\sqrt{-gn} u^r}{F_{\phi\theta}} = \frac{\sqrt{-gn} u^t (\Omega - \Omega_F)}{F_{\theta r}} \quad (\text{C.16})$$

where $\Omega \equiv u^\phi / u^t$. ²

¹この Ω_F が磁力線の回転角速度と解釈されるのはなぜ？

²保存量 η は、ideal MHD 方程式の r 成分、 θ 成分、 ϕ 成分からそれぞれ得られるので、本来だと、 η_r 、 η_θ 、 η_ϕ であり、これらが単一の η であるとは限らないような気もする。これらが同じ量を表していることを示しなさい。

(c) **The energy and angular momentum** [8, Appendix]

The conservation laws (1.5) and (1.15) imply therefore

$$N^\alpha (\tilde{\mu} u_a)_{,\alpha} - \frac{1}{4\pi} \left(\overline{B}^\alpha \overline{B}_{a,\alpha} + \overline{B}_a \overline{B}_{;\alpha}^\alpha \right) = 0, \quad (a = t, \phi) \quad (\text{C.17})$$

where $\tilde{\mu}$ is the generalized enthalpy, $\tilde{\mu} = \mu + (\overline{B}^2)/(4\pi n)$. (The electric field \overline{E}_α as seen by the comoving observer is zero.) From $B_\alpha h_\beta^\alpha T_{;\delta}^{\beta\delta} = 0$, we obtain

$$\overline{B}_{;\alpha}^\alpha = -\overline{B}^\alpha (\ln \mu)_{,\alpha}, \quad (\text{C.18})$$

By using the relation (C.18), equation (C.17) can be reduced as

$$N^\alpha (\tilde{\mu} u_a)_{,\alpha} - \frac{\mu}{4\pi} \overline{B}^\alpha (\overline{B}_a/\mu)_{,\alpha} = 0. \quad (a = t, \phi) \quad (\text{C.19})$$

From the definitions of \overline{B}^α , η , we obtain

$$\overline{B}^A = - \left(\frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{\eta} \right) N^A. \quad (\text{C.20})$$

Then, equation (C.19) can be expressed as

$$N^A \left[\tilde{\mu} u_a + \frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{4\pi\eta} \overline{B}_a \right]_{,A} = 0, \quad (\text{C.21})$$

where $\tilde{\mu} \equiv \mu - \frac{1}{4\pi\eta} (\overline{B}_t + \Omega_F \overline{B}_\phi)$. That is, for the ideal MHD flow, the ‘total energy’ E and the ‘total angular momentum’ L , which are defined as

$$E \equiv \tilde{\mu} u_t + \frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{4\pi\eta} \overline{B}_t = \mu u_t - \frac{u_t \Omega_F}{4\pi\eta} (\overline{B}_\phi + \ell \overline{B}_t) \quad (\text{C.22})$$

and

$$-L \equiv \tilde{\mu} u_\phi + \frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{4\pi\eta} \overline{B}_\phi = \mu u_\phi + \frac{u_t}{4\pi\eta} (\overline{B}_\phi + \ell \overline{B}_t), \quad (\text{C.23})$$

are conserved along the stream lines, where $\ell \equiv -u_\phi/u_t$.³

³ $u_t(\overline{B}_\phi + \ell \overline{B}_t) = B_\phi$ の関係が成り立つことを示せ。

C.2 Derivation of Poloidal Eq.

See [9][50]

From the definitions of \bar{B}^α and η , we also obtain

$$\sqrt{-g}\bar{B}^t = \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}u^r u_r + \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}u^\theta u_\theta - u_\phi F_{r\theta} , \quad (24a)$$

$$\sqrt{-g}\bar{B}^\phi = \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}\Omega_F u^r u_r + \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}\Omega_F u^\theta u_\theta + u_t F_{r\theta} , \quad (24b)$$

where $F_{r\theta}$ can be expressed

$$F_{r\theta} = -\frac{n\sqrt{-g}}{\eta} [u^\phi - \Omega_r u^t] \quad (24c)$$

Then we obtain the next relations,

$$u_t(\bar{B}_\phi + l\bar{B}_t) = \frac{n}{\eta}(u_t G_\phi - u_\phi G_t) \quad (C.25)$$

with

$$G_t \equiv (g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F) ,$$

$$G_\phi \equiv (g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega_F) .$$

By using above relations, we can rewrite equations (C.22), (C.23) as

$$E = \mu u_t - \frac{\Omega_F}{M^2} [\mu u_t G_\phi - \mu u_\phi G_t] \quad (C.26)$$

$$-L = \mu u_\phi + \frac{1}{M^2} [\mu u_t G_\phi - \mu u_\phi G_t] \quad (C.27)$$

The two eqs.(C.26) and (C.27) can be combined into the convenient relation

$$E - \Omega_F L = \mu(u_t + \Omega_F u_\phi) \equiv e , \quad (C.28)$$

where e is also a conserved quantity related to the corotating observer with a magnetic field line of Ω_F .

From (C.26) and (C.27), we obtain

$$\mu u_t = \frac{A}{M^2 - \alpha} , \quad (C.29)$$

$$\mu u_\phi = -\frac{B}{M^2 - \alpha} . \quad (C.30)$$

where

$$\alpha \equiv G_t + \Omega_F G_\phi , \quad (C.31)$$

$$A \equiv EM^2 - eG_t , \quad (C.32)$$

$$B \equiv LM^2 + eG_\phi , \quad (C.33)$$

and we also see the following relations:

$$A - B\Omega_F = e(M^2 - \alpha) . \quad (C.34)$$

At the Alfvén point on the flow solution (see § 2.2), where $M^2 = \alpha$, we must require $A = B = 0$. Then, we obtain

$$E = e(G_t/\alpha)_A, \quad (\text{C.35})$$

$$L = -e(G_\phi/\alpha)_A, \quad (\text{C.36})$$

where the label ‘A’ indicates the quantities at the Alfvén point.

By using the relation $u_\alpha u^\alpha = 1$, we obtain

$$\mu^2(1 + u_p^2) = \mu^2(u^t u_t + u^\phi u_\phi) \quad (\text{C.37})$$

$$= \frac{1}{\rho_w^2 \Omega_F^2} [-\alpha(\mu u_t)^2 + 2eG_t(\mu u_t) - e^2 g_{tt}] \quad (\text{C.38})$$

$$= \frac{1}{\rho_w^2} [-\alpha(\mu u_\phi)^2 + 2eG_\phi(\mu u_\phi) - e^2 g_{\phi\phi}] , \quad (\text{C.39})$$

Then, by using equations (C.29) and (C.30), the above equation can be reduced as follows;

$$\mu^2(1 + u_p^2) = \frac{g^{tt} A^2 - 2g^{t\phi} AB + g^{\phi\phi} B^2}{(M^2 - \alpha)^2} . \quad (\text{C.40})$$

This equation is the relativistic Bernoulli equation, and is called the poloidal equation.

C.3 Derivation of Trans-field Eq.

The momentum equation in hot plasma reduces to

$$\mu n u^\beta u_{;\beta}^\alpha - P_{,\beta} g^{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta} j_\beta = 0 . \quad (\text{C.41})$$

The GS equation dedrives a force balance in the transfield directions. The transfield component of the momentum equation is given by

$$\frac{F^A_\phi}{\tilde{B}_p^2} [\mu n u^\beta u_{A;\beta} + (n u_A u^\beta \mu_{,\beta} - P_{,A}) - F_{A\beta} j^\beta] = 0 , \quad (\text{C.42})$$

and is rewritten in the form

$$\begin{aligned} \frac{F^A_\phi}{\tilde{B}_p^2} \{ \mu n [-u^B (u_{B;A} - u_{A;B}) - u^t \partial_A u_t - u^\phi \partial_A u_\phi] \\ + (n u_A u^B \mu_{,B} - P_{,A}) - F_{AB} j^B - F_{A\phi} j^\phi - F_{At} j^t \} = 0 , \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

where $\tilde{B}_p^2 \equiv F_{B\phi} F^B_\phi$ ($A, B = r, \theta$). We can pick up the toroidal current density j^ϕ from each term in the lefthand side of eq.(C.43) as

$$-\frac{\mu n F^A_\phi u^B (u_{B;A} - u_{A;B})}{\tilde{B}_p^2} = \frac{M^2}{G_t} j^\phi + \mu \eta G_t B_p^2 \partial_\Psi \left(\frac{\eta}{G_t n} \right) , \quad (\text{C.44})$$

$$-\frac{\mu n}{\tilde{B}_p^2} F^A_\phi (u^t \partial_A u_t + u^\phi \partial_A u_\phi) = -\mu n (u^t \partial_\Psi u_t + u^\phi \partial_\Psi u_\phi) , \quad (\text{C.45})$$

$$-\frac{F^A_\phi}{\tilde{B}_p^2} (F_{AB} j^B + F_{A\phi} j^\phi) = -j^\phi - \frac{F_{r\theta}}{4\pi\sqrt{-g}} \partial_\Psi (\sqrt{-g} F^{r\theta}) , \quad (\text{C.46})$$

$$-\frac{F^A_\phi}{\tilde{B}_p^2} F_{At} j^t = -\frac{G_\phi \Omega_F}{G_t} j^\phi - \frac{\Omega_F G_t B_p^2}{4\pi} \partial_\Psi \left(\frac{G_\phi}{G_t} \right) , \quad (\text{C.47})$$

$$-\frac{F^A_\phi}{\tilde{B}_p^2} P_{,\beta} = n \mu C_{\text{sw}}^2 \partial_\Psi [\ln(\mu/n)] = -n \partial_\Psi \mu , \quad (\text{C.48})$$

where we use the relation

$$P_{,\beta} = P \Gamma (\ln n)_{,\beta} = \frac{P \Gamma}{a_{\text{sw}}^2} (\ln \mu)_{,\beta} = n \mu [-C_{\text{sw}}^2 (\ln M^2)_{,\beta} + 2 C_{\text{sw}} (\ln \eta)_{,\beta}] = n \mu_{,\beta} , \quad (\text{C.49})$$

and we define $\partial_\Psi \equiv (F^A_\phi / \tilde{B}_p^2) \partial_A = (1 / \tilde{B}_p^2) (g^{rr} \partial_r \Psi \partial_r + g^{\theta\theta} \partial_\theta \Psi \partial_\theta)$ and $B_p \equiv -B^A B_A G_t^{-2}$ (NOTE: $B_p \equiv -B^A B_A$ in Nitta et al. 1991).

Consequently, eq.(C.43) is rewritten as the equation for j^ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - M^2}{G_t} j^\phi = & -\mu n (u^t \partial_\Psi u_t + u^\phi \partial_\Psi u_\phi) - \frac{F_{r\theta}}{4\pi\sqrt{-g}} \partial_\Psi (\sqrt{-g} F^{r\theta}) \\ & + \mu \eta G_t B_p^2 \partial_\Psi \left(\frac{\eta}{G_t n} \right) - \frac{\Omega_F G_t B_p^2}{4\pi} \partial_\Psi \left(\frac{G_\phi}{G_t} \right) - n \partial_\Psi \mu . \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

By using the relations

$$\partial_\Psi e = \mu (\partial_\Psi u_t + \Omega_F \partial_\Psi u_\phi + u_\phi \partial_\Psi \Omega_F) + \frac{e}{\mu} \partial_\Psi \mu \quad (\text{C.51})$$

and

$$\partial_{\Psi} L = -\mu \partial_{\Psi} u_{\phi} - u_{\phi} \partial_{\Psi} \mu + \frac{1}{4\pi\eta} \partial_{\Psi} \sqrt{-g} F^{r\theta} + \frac{\sqrt{-g}}{4\pi} F^{r\theta} \partial_{\Psi} \left(\frac{1}{\eta} \right), \quad (\text{C.52})$$

we can arrive at the final form

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - M^2}{G_t} j^{\phi} &= -nu^t \partial_{\Psi} e + \mu nu^t u_{\phi} \partial_{\Psi} \Omega_F + \frac{\eta B_{\phi}}{\rho_w^2} \partial_{\Psi} L + \frac{\eta B_{\phi}^2}{4\pi \rho_w^2} \partial_{\Psi} \left(\frac{1}{\eta} \right) \\ &\quad + \mu \eta G_t B_p^2 \partial_{\Psi} \left(\frac{\eta}{G_t n} \right) - \frac{\Omega_F G_t B_p^2}{4\pi} \partial_{\Psi} \left(\frac{G_{\phi}}{G_t} \right) \\ &\quad + \left(\frac{n}{\mu} e u^t + \frac{\eta}{\rho_w^2} u_{\phi} B_{\phi} - n \right) \partial_{\Psi} \mu. \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

Because the Maxwell equation gives

$$j^{\phi} = \frac{-1}{4\pi\sqrt{-g}} \left[\partial_r \left(\frac{\sqrt{-g} G_t}{g_{rr} \rho_w^2} \partial_r \Psi \right) + \partial_{\theta} \left(\frac{\sqrt{-g} G_t}{g_{\theta\theta} \rho_w^2} \partial_{\theta} \Psi \right) \right], \quad (\text{C.54})$$

we can eliminate j^{ϕ} from eqs.(C.53) and (C.54) to obtain the GS equation for hot plasma;⁴

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_w^2 (\alpha - M^2)}{4\pi\sqrt{-g}} \left\{ \partial_r \left[\frac{\sqrt{-g} (\alpha - M^2)}{\rho_w^2 g_{rr}} \partial_r \Psi \right] + \partial_{\theta} \left[\frac{\sqrt{-g} (\alpha - M^2)}{\rho_w^2 g_{\theta\theta}} \partial_{\theta} \Psi \right] \right\} \\ &= -2\pi \left[\frac{\rho_w^2}{M^2} (e^2 \eta^2)' + g_{tt} (L^2 \eta^2)' + 2g_{t\phi} (EL \eta^2)' + g_{\phi\phi} (E^2 \eta^2)' \right] \\ &\quad + \frac{4\pi \mu^2 \rho_w^2 (\alpha - M^2)}{M^2} \eta \eta' + \frac{4\pi \mu^2 \rho_w^2}{M^4} G_{\phi} \eta^2 \left[\left(\frac{e}{\mu} \right)^2 - (\alpha - M^2) \right] \Omega_F' \\ &\quad + \rho_w^2 (\alpha - M^2) \left(\frac{n}{\mu} e u^t + \frac{\eta}{\rho_w^2} u_{\phi} B_{\phi} - n \right) \mu'. \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

⁴ This is the *hot* flow version of the GS equation originally derived in Nitta et al. [36].

関連図書

- [1] Appl, S., & Camenzind, M. 1988, A&A, 206, 258
- [2] Asseo, E., & Sol, H., 1987, Phys. Report, 148, 307
- [3] Bardeen, J.M., Press, W.H., & Teukolsky, S.A., 1972, ApJ, 178, 347
- [4] Bekenstein, J.D., & Oron, E., 1978, Phys.Rev., D18, 1809
- [5] Blandford, R.D., 1990, in *Active Galactic Nuclei* (Springer, New York), p.161
- [6] “Testing Cowling’s Antidynamo Theorem near a Rotating Black Hole”
Brandenburg, A., 1996, ApJ, 465, L115-L118
- [7] “Electromagnetic Extraction of Energy from Kerr Black Holes” Blandford, R.D., & Znajek, R.L. 1977, MNRAS, 179, 433
- [8] “Centrifugally Driven MHD-Winds in Active Galactic Nuclei”
Camenzind, M., 1986a, A& A, 156, 137
- [9] “Hydromagnetic Flows from Rapidly Rotating Compact Objects
I. Cold Relativistic Flows from Rapid Rotators”
Camenzind, M., 1986a, A& A, 162, 32
- [10] “Hydromagnetic Flows from Rapidly Rotating Compact Objects
II. The Relativistic Axisymmetric Jet Equilibrium”
Camenzind, M., 1987, A& A, 184, 341
- [11] 加藤正二, 1989, 天体物理学基礎理論 (ごとう書房)
- [12] Chakrabarti, S.K., 1990, MNRAS, 246,134
- [13] Chitre, D.M., & Vishveshwara C.V., 1975, Phys. Rev., D12, 1538
- [14] “Dynamics of Plasma close to the Horizon of a Schwarzschild Black Hole”
Chou, W. & Tajima, T. 1999, ApJ, 513, 401-408
- [15] “Black-Hole Eddy Current”
Damour, T., Phys.Rev., D18, 1978
- [16] “The Dynamo Effect in Magnetohydrodynamic Accretion onto a Rotating Black Hole”
Egi, M., Tomimatsu, A., & Takahashi, M., 1997, Plasma Phys. Control. Fusion, 39, A117-A183
- [17] “Electron-Positron Pairs in Hot Accretion Flows and Thin Disk Coronae”
Esin, A.A. 1999, ApJ, 517, 381-395

- [18] “Efficiency of Magnetized Thin Accretion Disks in the Kerr Metric”
Gammie, C.F., 1999, ApJ, 522, L57-L60
- [19] “Electromagnetic extraction of rotational energy from disk-fed black holes: the strength of the Blandford-Znajek process”
Ghosh, P., & Abramowicz, M.A. 1997, MNRAS, 292, 887-895
- [20] Ginzburg, V.L., & Ozernoi, I.M., 1965, Sov. Phys. JETP, 20, 689
- [21] “Flares on the Black Holes”
Gruzinov, A. astro-ph/9908101
- [22] “活動銀河核の X 線時間変動とブラックホール質量”
林田 清、2000, 天文月報 (11 月号), 93, 656
- [23] Hirovani, K., Takahashi, M., Nitta, S., & Tomimatsu, A. 1992, ApJ., 386, 455
- [24] “磁力線の運動に意味があるか?”
今井 功、Parity Books 続・間違いだらけの物理概念 (丸善)、p123
- [25] Iwasawa K. et al. 1996, MNRAS, 282, 1038
- [26] “The $\omega\Omega$ Dynamo in Accretion Disks of Rotating Black Holes”
Khhanna, R., & Camenzind, M., 1996, A&A, 307, 665-685
- [27] King, A.R., Lasota, J.P., & Kundt, W., 1975, Phys. Rev., D12, 3037
- [28] “Magnetized Accretion inside the Marginally Stable Orbit around a Black Hole”
Krolik, J.H. 1999, ApJ, 515, L73-L76
- [29] Landau, L.D., & Lifshitz, E.M., 1978, Fluid Mechanics 2nd ed. Pergamon Press, Oxford
- [30] ランダウ、リフシッツ、1878, 場の古典論 (東京図書)
- [31] “Stationary Axisymmetric Electromagnetic Fields in the Kerr Metric”
Linet, B., 1979, J. Phys. A Math. Gen., 12, 839
- [32] Lichnerowicz, A., 1967, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, (Benjamin Press, New York)
- [33] “Extracting Energy from Black Holes: the Relativistic Importance of the Blandford-Znajek Mechanism”
Livio, M., Ogilvie, G.I. & Pringle, J.E. 1999, ApJ, 512, 100-104
- [34] “Sound Horizon of Accretion onto a Kerr Black Hole”
Lu. J.F., 1986, Gen.Relat.Grav., 18,45
- [35] 西川恭治、大林康二、若谷誠宏、1981, 連続流体物理学 (朝倉書店)
- [36] Nitta, S, Takahashi, M. & Tomimatsu, A. 1991, Phys.Rev., D44, 2295
- [37] “Energy Transport in a Rotation-Modulated Pulsar Wind”
Melatos, A., & Melrose, D.B., 1996, MNRAS, 279, 1168

- [38] Padovani, P., Burg, R., & Edelson, A.S., 1990, ApJ, 353, 438
- [39] Phinney, E.S., 1983, Ph.D. thesis (*Unpublished thesis*) (Cambridge University)
- [40] Shapiro, S.L., & Teukolsky, S.A., 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron stars* (Wiley, New York)
- [41] “Magnetically Dominated Accretion onto Black Holes”
Punsly, B.1991, ApJ, 372, 424-447
- [42] “Minimum Torque and Minimum Dissipation Black Hole-Driven Winds”
Punsly, B. 1998, ApJ, 506, 790-804
- [43] Petterson, J.A., 1975, Phys. Rev., D12, 2218
- [44] “MHD Shock Conditions for Accreting Plasma onto Kerr Black Holes - II ”
Rilett D., Takahashi M., Fukumura K., & Tsuruta S., 2001, in preparation
- [45] Soltan, A., 1982, MNRAS, 200, 115
- [46] Sakurai, T. 1985, A& A, 152, 121
- [47] Sakurai, T. 1987, PASJ, 39, 821
- [48] Sakurai, T. 1990, Computer Phys. Report, 12, 247
- [49] Straumann, N. 1984, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Text and Monographs in Physics (Springer, Berlin)
- [50] “Magnetohydrodynamic Flows in Kerr Geometry: Energy Extraction from Black Holes”
Takahashi, M., Nitta, S., Tatematsu, Y., & Tomimatsu, A. 1990, ApJ, 363, 206.
- [51] Takahashi, M. 1994, in Proceedings of the Seventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, ed. R. T. Jantzen, & G. M. Keiser (Singapore: World Scientific), 1298
- [52] “Trans-Fast MHD Winds in a Pulsar Magnetosphere”
Takahashi, M., 1998, PASJ, 50, 271-283
- [53] “Accreting Plasmas in Black Hole Magnetosphere”
Takahashi, M., 1999, *Highly Energetic Physical Process and Mechanisms for Emission from Astrophysical Plasmas, IAU Symp. 195*, ed. P.C.H.Martens & S.Tsuruta (ASP Conference Series)
- [54] Takahashi, M. 2000a, in Proceedings of the 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology, ed. E. Aubourg, T. Montmerle, L. Paul & P. Peter (North-Holland, Amsterdam) CD-ROM 01/27.
- [55] Takahashi, M. 2000b, Il Nuovo Cimento, 115, 843
- [56] “Trans-magnetosonic Accretion in a Black Hole Magnetosphere”
Takahashi M., 2002, ApJ, 570, 264

- [57] “MHD Shock Conditions for Accreting Plasma onto Kerr Black Holes - I ”
Takahashi M., Rilett D., Fukumura K., & Tsuruta S., 2002, ApJ, 572, 950
- [58] Tanaka Y. et al. 1996, Nature, 375, 659
- [59] “Black Hole Magnetospheres around Thin Disks Driving Inward and Outward Winds” Tomimatsu, A., & Takahashi, M. 2001, ApJ, 552, 710
- [60] Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A., ed. 1986, *Black Holes: The Membrane Paradigm* (New Haven: Yale Univ. Press)
- [61] “Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity” Tooper, R.F., 1965, ApJ, 142, 1541
- [62] “The Energetics of Black Holes in Electromagnetic Fields by the Penrose Process”
Wagh, S.M., & Dadhich, N., 1989, Phys. Rep., 183, 137-192
- [63] Wald, R.M., 1974, Phys. Rev., D10, 1680
- [64] “The Angular Momentum of the Solar Wind”
Weber, E.J., & Davis ,L.Jr., 1967, ApJ, 148, 217-227
- [65] “Magnetohydrodynamic Accretion and the Instability of Smooth Trans-Alfvénic Flow”
Williams, D.F., 1975, MNRAS, 171, 537-549
- [66] “Black Hole Electrodynamics and the Carter Tetrad”
Znajek, R.L., 1977, MNRAS, 179, 457
- [67] “The Electric and Magnetic Conductivity of a Kerr Hole”
Znajek, R.L., 1978, MNRAS, 185, 833