輻射の非平衡物理

— 光学的に薄い/時間変動が速い系 の輻射輸送の未解決問題 —

斉田 浩見 （大同大学 教養部）

- Christopher Essex

  Radiation and the Violation of Bilinearity in the Thermodynamics of Irreversible Processes, Planet.Space Sci.**32** (1984) 1035

  Radiation and the Continuing Failure of the Bilinear Formalism, Advances in Thermodynamics **3** (1990) 435

- Hiromi Saida

  Two-Temperature Steady State Thermodynamics for a Radiation Field, Physica A**356** (2005) 481 (arXiv: cond-mat/0505223)

1. 導入

1.1 宇宙物理と輻射場・輻射輸送

- 地上の実験室系：天体現象のような莫大な発光現象は作れない

  → 熱・粘性・電流・化学反応などの散逸的エネルギー輸送 > 輻射輸送

  → 今の非平衡物理学・物性物理学の主な研究対象は散逸を伴う物質系
  （輻射輸送は 無視する・考えない のが普通）

- 宇宙物理の系：「見える」ためには莫大な発光現象が嬉しい

  → **散逸輸送だけでなく輻射輸送も重要！**

  → 状況として『**輻射輸送** > **散逸輸送**』もありえる！

- 輻射場 = 光子ガス $\cdots$ **無衝突粒子の気体**（輻射場だけでは散逸なし）

  → 散逸系で培った物理的センスが輻射場にも適用可能か分からない
  （適用可能と仮定した上での研究が多い？）

1.2 輻射輸送について定性的に考えてみる $\cdots$

- まず、星の内部構造の理論では $\cdots$

太陽：
- 表面からの輻射を観測するとプランク分布（熱的）
- 十分濃いプラズマ流体： $\rho_\odot \sim 1.3$ g/cm^3（ $\rho_\oplus \sim 5.5$ g/cm^3 ）
- 光子の平均自由行程が短い： $l_{\rm mfp} \sim 2$ cm（ $R_\odot \sim 10^{11}$ cm ）
- 中心と表面で小さな温度勾配： $\Delta T / R_\odot \sim 1.4 \times 10^{-4}$ K/cm

$\Downarrow$ 星の構造に対する一般的な仮定

- 星内部の流体と輻射場は **局所平衡状態** $\rightarrow$ 光学的に厚い
  （注：温度勾配によって星全体は 大域的非平衡状態）
- 小さな温度勾配で、ほぼ**定常なエネルギー輸送**
  $\rightarrow$ 流体に速い時間変動を引き起こすほど輸送強度は強くない

1g 1s 当りの発熱量
太陽： 2 erg/g s
人間：10^6 erg/g s

$\rightarrow$ 進化は **準定常過程 quasi-steady process**（輻射と**熱**は拡散方程式）

$$\text{Energy Flux } \vec{F} = -(\lambda_{\rm rad} + \lambda_{\rm cd})\,\vec{\nabla} T \quad \cdots \text{ 時間微分なし！}$$

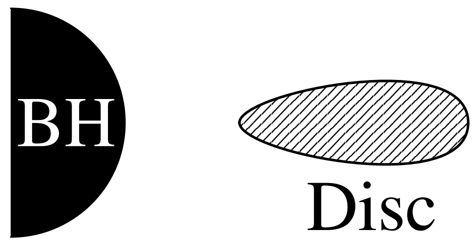
- では、一般に "光学的に薄い" / "輻射輸送の強度が強い" 場合はどうか？

$\rightarrow \begin{cases} \text{ブラックホール降着流} \\ \text{降着流からのジェット} \end{cases}$ など？

$\rightarrow$ 光学的に薄い・輻射輸送が支配的 という状況は

宇宙物理学的な興味の対象にあり得る状況 $\cdots$ ですよね？

◇ 光学的に薄い場合 = 光子の平均自由行程が長い



$\rightarrow$ 十分離れた流体要素が輻射で相互作用

（**非局所的な輻射輸送**）

$\rightarrow$ たとえ流体は局所平衡でも、**輻射場は局所平衡になれない！**

$\rightarrow$ 輻射輸送は局所的な温度変化 $\vec{\nabla} T$ だけに依存する

拡散方程式 $\vec{F}_{\rm rad} = -\lambda_{\rm rad} \vec{\nabla} T$ で表せないだろう。

◇ 輻射輸送の強度が強い場合 ＝ 温度勾配が大きい

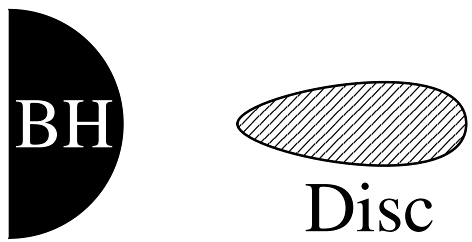
→ 大きな温度勾配で熱伝導も強くなり流体は局所平衡になれない。
（ただし、流体の熱伝導率は極端に小さくないとして）

→ **輻射場も局所平衡になれない！**
（輻射場の熱力学状態は流体との相互作用で決まるので）

→ 流体と輻射場の両方に非平衡状態の理論が必要 · · · **未完成！**

→ さらに、輸送強度が強いにも関わらず大きな温度勾配を維持できる機構がない場合、**非定常なエネルギー輸送** になるだろう。

→ 温度勾配が大きい場合の輻射輸送は、
時間微分を含まない拡散方程式では
表せないだろう。



$\Downarrow$

$\begin{cases} \text{光子の平均自由行程が長い} \\ \text{温度勾配が大きい} \end{cases}$ という状況では $\cdots$

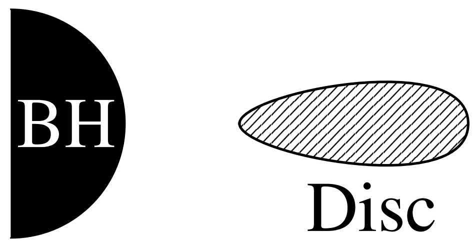
輻射場は $\begin{cases} \text{局所的に}\underline{\text{非}}\text{平衡状態} \\ \underline{\text{非}}\text{局所・}\underline{\text{非}}\text{定常な輻射輸送} \end{cases}$ と考えるのが妥当

$\diamond$ 補足：

光子が放出されてから一度もイオンと相互作用せずに系の外部に逃げるときは、光子が放出されたときのスペクトルだけで局所的に輻射場を扱える。（非平衡スペクトルを決めるのは難しいが。）

$\rightarrow$ 中途半端に長い平均自由行程はやっかいかも !?

（微分方程式で輻射輸送が表されるか不明）



1.3 問題点の整理 と 話のプラン

- 問題： 非平衡・非定常・非局所な輻射場をどう扱うか？

非平衡 → 既存の非平衡熱力学のアプローチが参考になるか？
非定常 → Flux の時間微分を含むような理論？
非局所 → Bi-Positon / 積分方程式の理論？

→ この3つの問題点のどれも**未解決！**

- 後の話のプラン

◇ 第2節 エントロピー生成率の Bilinear Form：散逸物質と輻射場

→ 輻射場の **非平衡** 問題に対して既存の非平衡熱力学は使えない！

◇ 第3節 輻射場の非平衡定常状態の熱力学

→ **非平衡** な輻射場の理論の現状 → **非局所** 問題とも関係？

◇ 第4節 議論：実は何一つ解決していない。どうしましょう？

（Boltzmann 方程式を正確に書き下す努力をし、可能な限り厳密に解くしかないか？）

2. エントロピー生成率の Bilinear Form：散逸物質と輻射場

2.1 何を考えるか？

● 輻射場の問題点の一つ **非平衡性** について考える。

→ 一般の非平衡状態の大きな特徴（熱力学第2法則）：
平衡状態へ向かう緩和過程（不可逆進化）でエントロピー増加！

→ 非平衡性を考える上でのキーポイント：**エントロピー生成率**

→ **事実**：散逸物質系ではエントロピー生成率が Bilinear Form で書ける
（ Bilinear Form：エントロピー生成率 = [Force]×[Flux] ）

→ **論点**：**非平衡な輻射場のエントロピー生成率も Biliniear Form か？**

→ No！ であることを、この第2節で解説

◇ 補足：**非定常性**と**非局所性**の論点は未整備

2.2 散逸物質の例：Navier-Stokes と Fourier 則（局所平衡な理論）

- 散逸流体を記述する物理量（局所平衡状態を仮定）→ **16個**

$$
\begin{cases}
\vec{v} & ：流体要素の速度（速度場）\ [\mathrm{cm/s}] \\
\rho & ：質量密度\ [\mathrm{g/cm^3}] \quad \rightarrow \text{Specific Volume } V = 1/\rho\ [\mathrm{cm^3/g}] \\
u & ：\text{Specific Internal Energy } [\mathrm{erg/g}] \\
\vec{q} & ：\text{Heat Flux}（熱流）\quad [\mathrm{erg/cm^2\ s}] \\
T & ：流体要素の温度（局所的な温度）\ [\mathrm{erg}] \quad \rightarrow 単位系\ k_B = 1 \\
\mathbf{P} & ：応力テンソル\ [\mathrm{dyn/cm^2}] \quad \rightarrow 対称である\ \mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji}\ \ (ij = 1,2,3)
\end{cases}
$$

$$\downarrow$$

$$
\mathbf{P} = p\,\mathbf{U} + p^{\mathrm{v}}\,\mathbf{U} + \mathring{\mathbf{P}}^{\mathrm{v}} ：
\begin{cases}
p & : \ 圧力 \\
p^{\mathrm{v}} & : \ \text{Bulk Viscosity}（体積粘性） \\
\mathring{\mathbf{P}}^{\mathrm{v}} & : \ \text{Shear Viscosity}（ずれ粘性） \quad \longleftarrow \mathrm{Tr}\mathring{\mathbf{P}}^{\mathrm{v}} = 0
\end{cases}
$$

($\mathbf{U}$ ：Unit tensor)

→ **散逸（ $\vec{q}$, p^{v} , $\mathring{\mathbf{P}}^{\mathrm{v}}$ ）で系の非平衡性を表しているつもり**

• 局所平衡を仮定した上での現象論

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{q} = -\lambda \nabla T & : \text{Fourier 則}（\lambda：\text{熱伝導率}）\\
p^{\mathrm{V}} = -\zeta\, \partial_i v^i & : \text{Stokes 則}（\zeta：\text{体積粘性率}）\\
\overset{\circ}{\mathbf{P}}{}^{\mathrm{V}} = -2\eta\, \overset{\circ}{\mathbf{V}} & : \text{Newton 則}（\eta：\text{ずれ粘性率}）
\end{cases}
$$

（補足1： これは9本の方程式 → 閉じた方程式系には あと7本必要）

（補足2： 時間微分がないので時間変動が速い散逸現象は記述できない）

→ 実際、散逸の変動は無限の速さで伝搬、つまり緩和時間ゼロの現象論的な関係式になっている。

散逸の緩和時間程度で変動する速い非平衡現象は記述できない。

• Bilinear Form を示す準備 $\cdots$ 2つ

[**準備1**] 保存側と運動方程式

流体全体の Energy Balance： $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ $\cdots$ 熱力学第1法則

$$\begin{cases} E := \displaystyle\int_{V(t)} \left(\rho\, u + \frac{1}{2}\rho\, |\overrightarrow{v}|^2 \right) dV & , \quad V(t)\text{：流体の体積} \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} := -\displaystyle\int_{\Sigma(t)} \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n}\, d\Sigma & , \quad \Sigma(t)\text{：流体の表面}\ ,\ \overrightarrow{n} \perp \Sigma(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} := -\displaystyle\int_{\Sigma(t)} \mathbf{P}_{ij} n^i v^j\, d\Sigma + \int_{V(t)} \rho\, \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\, dV & (\overrightarrow{F}\ [\mathrm{dyn/g}]\text{：外力}) \end{cases}$$

$\rightarrow$ これにガリレイ変換（$\overrightarrow{v} \rightarrow \overrightarrow{v} + \mathrm{const.}$）に対する普遍性を要求して

5本の方程式を得る（相対論では $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, $N^{\mu}{}_{;\mu} = 0$） $\cdots$

流体全体の Energy Balance + Galilean Invariance

$$\Downarrow$$

5本の方程式：

質量保存 : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\,\partial_i\,v^i$

運動方程式 : $\rho\,\dfrac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = -\partial_j\,\mathbf{P}^{ij} + \rho\,F^i$

エネルギー保存 : $\rho\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\partial_i\,q^i - \mathbf{P}^{ij}\,\partial_i\,v_j$

$$\left(\text{Lagrange 微分：} \quad \frac{\mathrm{d}\bigcirc}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\bigcirc}{\partial t} + v^i\,\partial_i\bigcirc \right)$$

$\to$ 運動方程式 ＋ Stokes 則 + Newton 則 = Navier-Stokes 方程式

（補足：以上の5本＋現象論の7本＋状態方程式2本 $\to$ 閉じた方程式系）

[**準備2**] 流体の Entropy Balance

新たに考える量：**前出の「流体の物理量」で与えられる状態量**

$$
\begin{cases}
s & ：\text{Specific Entropy} \ [\text{entropy/g}] \qquad （\text{次元} \ [\text{entropy}] = [1] \ \because k_B = 1 ） \\
\overrightarrow{J}_s & ：\text{Entropy Flux} \ [\text{entropy/cm}^2 \text{ s}] \\
\sigma_s & ：\textbf{局所的なエントロピー生成率} \ [\text{entropy/cm}^3 \text{ s}] \\
 & \qquad \to \text{流体要素の内部で生成されるエントロピー}
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

局所的な Entropy Balance ： $\rho \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\partial_i \, {J_s}^i + \sigma_s$

→ 準備1で得た方程式系を Entropy Balance と同じ形にまとめて、
そこから σ_s を読み取ると、σ_s が Bilinear Form だと分かる。

• 局所エントロピー生成率 σ_s の Bilinear Form

流体要素に対して熱力学第1法則を適用

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{p}{T}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \quad , \text{ただし } V = \frac{1}{\rho}\ [\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}] \cdots \ \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{V^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{さらに} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \text{ に 質量保存を適用} \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \text{ に エネルギー保存を適用} \\ \text{テンソル } \partial_i v_j \text{ の分解（下を参照）を導入} \end{cases} \quad \text{すると} \cdots$$

◇ $\partial_i v_j = \frac{1}{3}(\partial_k v^k)\,\delta_{ij} + \mathring{\mathbf{V}}_{ij} + \mathbf{W}_{ij}$ ：Velocity Gradient Tensor

$$\begin{cases} \mathring{\mathbf{V}}_{ij} := \partial_{(i} v_{j)} - \frac{1}{3}(\partial_k v^k)\,\delta_{ij} & : \text{ Shear Velocity Tensor (Traceless)} \\ \mathbf{W}_{ij} := \partial_{[i} v_{j]} & : \text{ Vorticity Velocity Tensor} \end{cases}$$

流体要素の熱力学第1法則 + 質量・エネルギー保存

$$\Downarrow$$

Entropy Balance ： $\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\partial_i J_s{}^i + \sigma_s$

"Bilinear Form"

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \frac{1}{T} \vec{q} \\ \sigma_s = -\frac{1}{T^2} q^i \partial_i T - \frac{1}{T} p^{\mathrm{V}} \partial_i v^i - \frac{1}{T} \mathring{\mathbf{P}}^{\mathrm{V}}{}_{ij} \mathring{\mathbf{V}}^{ij} = \underline{\text{Flux} \times \text{Force}} \end{cases}$$

Thermodynamic Force	$-\frac{1}{T^2} \nabla T$	$-\frac{1}{T} \partial_i v^i$	$-\frac{1}{T} \mathring{\mathbf{V}}$
Dissipative Flux	$\vec{q}$	p^{V}	$\mathring{\mathbf{P}}^{\mathrm{V}}$

$\rightarrow$
- **Force** ： **"示強性"量の勾配**
- **Flux** ： **"示量性"量（熱・仕事）の輸送**

• **”Navier-Stokes 方程式 + Fourier 則” の系の 非平衡 第２法則**

σ_s の Bilinear Form に Fourier, Stokes, Newton 則を代入：

$$\sigma_s \;=\; \frac{\lambda}{T^2}\left(\vec{\nabla}T\right)^2 + \frac{\zeta}{T}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right)^2 + \frac{2\eta}{T}\left(\mathring{\mathbf{V}}\right)^2 \;\geq\; 0$$

→ **非平衡 第２法則：局所エントロピー生成率が非負** $\sigma_s \geq 0$

$$\Downarrow$$

局所エントロピー生成率の Bilinear Form と適切な現象論的関係で、
緩和過程におけるエントロピー増加（非平衡第２法則）が満たされる！

→ **散逸物質系の非平衡物理の重要な認識**

→ ”Onsager の相反定理” はまさにコレ！

2.3 散逸物質の他の例：Bilinear Form は重要な仮定の一つ

- Extended Irreversible Thermodynamics (EIT)

  ($\approx$ Israel の相対論的な散逸流体力学)

  $\rightarrow$ Navier-Stokes + Fourier 則では因果律が満たされないが、

  $$\left\{\begin{array}{l}\text{流体要素に局所非平衡状態を仮定}\\ \text{現象論的関係式に時間微分を付加して修正}\\ \text{エントロピー生成率の }\underline{\textbf{Bilinear Form}}\text{ を仮定}\end{array}\right.$$

  によって因果律を満たすように拡張した散逸流体力学

- 熱伝導・ずれ運動・電気伝導の非平衡定常状態の熱力学（佐々& 田崎）

  $\rightarrow$ （カオスにならない程度の）大きな温度差、強い散逸、強い電流などがある、定常な非平衡状態の熱力学。

  $\rightarrow$ エントロピー生成率に定常性と **Bilinear Form** を仮定

  $\rightarrow$ 特徴：SST より強い非平衡状態を扱えるはず

2.4 非平衡輻射場のエントロピー生成率：Bilinear Form はダメ！

(Ref: C. Essex)

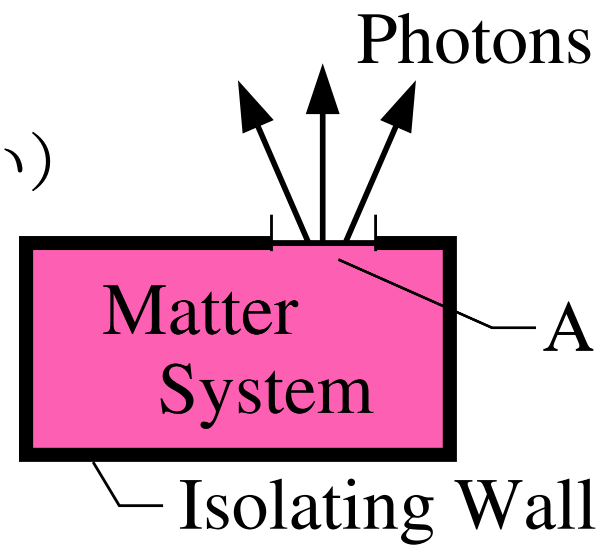
- 単純な状況設定：**右図** → Planck の実験と類似

Matter System： 平衡でも非平衡でもどんな状態でもOK（ Planck との違い）

Isolating Wall ： 熱も物質も何も通さない壁

窓 A ： 輻射（光子）だけ透過OK

Wall の外は真空（Photons は "Free Streaming"）



→ 考える系：**Matter System ＋ 窓 A から出た輻射場（光子ガス）**

→ 窓A近傍の Matter System が非平衡状態なら放出される輻射のスペクトルは非熱的

→ **輻射場は非平衡状態のまま緩和せずに Free Streaming**

（輻射は物質との相互作用なしには緩和できない）

- 全系のエントロピー生成率 $\Sigma_{\rm tot} = \Sigma_{\rm MS} + \Sigma_{\rm rad}$

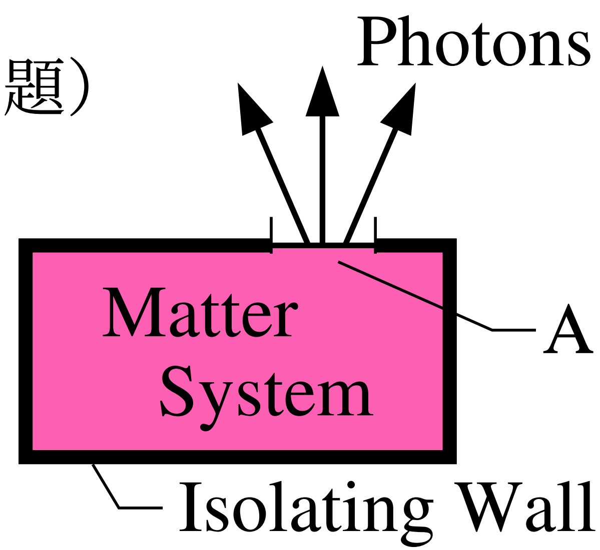
$$\begin{cases} \Sigma_{\rm MS} = [\ \text{輻射の放出で生じる Matter System 内部のエントロピー生成}\ ] \\ \Sigma_{\rm rad} = [\ \text{外に出た輻射場が持ち出すエントロピー}\ ] \end{cases}$$

$\rightarrow\ \Sigma_{\rm MS} = \displaystyle\int_{\rm MS} \mathrm{d}x^3\, \sigma_s(\vec{x}) \cdots$ Bilinear Form で書ける

($\sigma_s(\vec{x})$ ： 位置 $\vec{x}$ での局所エントロピー生成率 $\cdots$ Bilinear Form)

$\rightarrow$ では $\Sigma_{\rm rad}$ は Bilinear Form で書けるか？

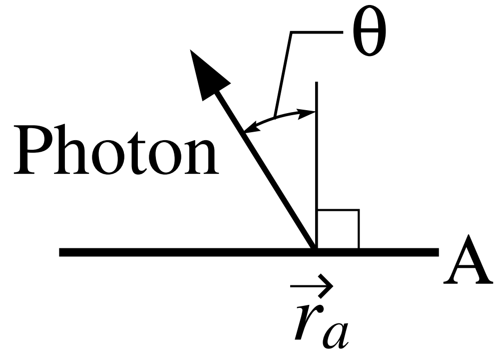
(非平衡物理の専門家はあまり考えていない問題)



• Free Streaming 輻射場が持ち出すエントロピー $\Sigma_{\rm rad}$ は $\cdots$

$$\Sigma_{\rm rad} \;=\; \int_A \mathrm{d}A\, S \quad , \quad S = \int J_\nu(\vec{r}_a)\,\cos\theta\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\nu$$

ただし：$\begin{cases} \theta & ： \text{右図の角} \\ \nu & ： \text{光子（電磁波）の周波数} \\ \vec{r}_a & ： \text{窓A上の位置} \end{cases}$



かつ：$J_\nu(\vec{r}_a) \;=\; -\dfrac{2k_B\,\nu^2}{c^2}\Big[\,X\,\ln X \;-\; (1+X)\,\ln(1+X)\,\Big]$

$\uparrow$

Boson ガスのエントロピーから得る

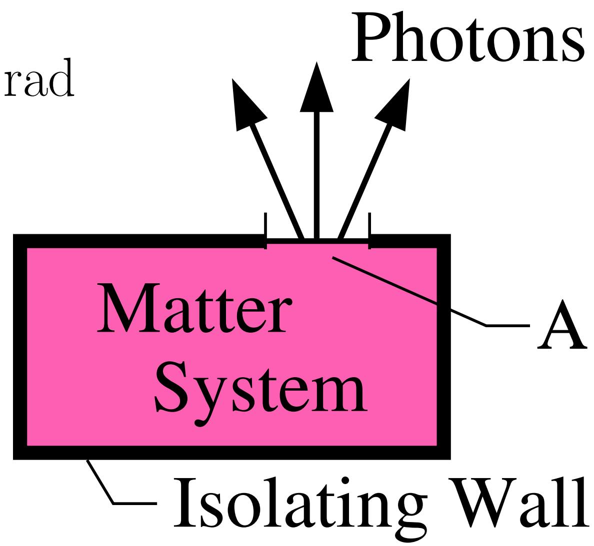
$$\begin{cases} X \;=\; \dfrac{c^2\, I_\nu(\vec{r}_a)}{2h\nu^3} \\ I_\nu(\vec{r}_a) \;：\; \text{位置 } \vec{r}_a \text{ での輻射のエネルギー・スペクトル} \end{cases}$$

（ $I_\nu(\vec{r}_a)$ は原理的には Boltzmann 方程式から得られる（難しい）が、今は必要ない。）

J_ν は示強性・示量性の分離不能なので Bilinear Form で表せない！

- 再び：全系のエントロピー生成率 $\Sigma_{\rm tot} = \Sigma_{\rm MS} + \Sigma_{\rm rad}$

  $\rightarrow$ $\Sigma_{\rm rad}$ は Bilinear Form で表せない！



$\Downarrow$ **分かること**

◇ **輻射の Free Streaming が無視できないとき**
エントロピー生成率に Bilinear Form が使えない。

$\rightarrow$ 光子の平均自由行程が大きいとき、散逸物質系の非平衡状態へのアプローチは輻射場に適用できない。

$\rightarrow$ 1.2節の「光学的に薄い場合」の考察が正しいことを意味する。

$\rightarrow$ 星の内部構造と同じ輻射輸送（拡散方程式の近似）は使えない。
（注：星内部の光子の平均自由行程は短く、かつ定常な輸送）

◇ 以上では、1.2節の「温度勾配が大きい場合」の考察はできない。

3．輻射場の ”二温度 非平衡 定常状態” の熱力学（ Ref: H.S. ）

何がダメかは分かった。次は「どうすれば良いか？」という問題。

3.1 何を考えるか？

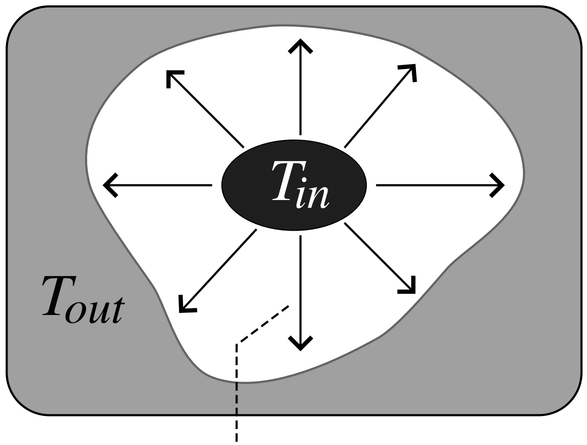
$\begin{cases} \text{エントロピー生成率の Bilinear Form に基づかない}\textbf{非平衡}\text{輻射場の理論} \\ \text{非定常性は扱いが分からんので、まずは } \textbf{非局所性} \text{ に注目} \end{cases}$

→ 非平衡輻射場の最初の理論として考える系：

温度が異なる２つの黒体に挟まれた輻射場

↓２つの温度を固定して $\cdots$

二温度の非平衡で定常な状態



Stationary Energy Flow
（$T_{in} > T_{out}$）

温度 T_{out} の黒体空洞の中に温度 T_{in} の黒体を置く

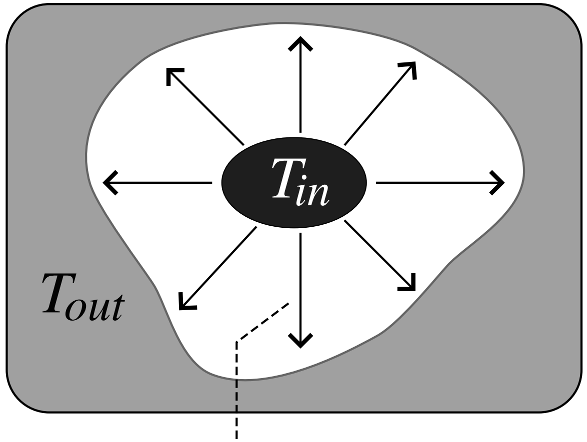
$\begin{cases} T_{in} \neq T_{out} \quad (\text{ex. } T_{in} > T_{out}) & \rightarrow \ \textbf{非平衡} \\ \text{空洞の存在（長い平均自由行程）} & \rightarrow \ \textbf{非局所的な輻射輸送} \end{cases}$

3.2 狙い

輻射場の**二温度 非平衡 定常状態**の熱力学形式（第0 ～ 3法則）を作る

（詳しくは論文： H.S. Physica A356(2005) 481 , cond-mat/050523 ）

$\Downarrow$



Stationary Energy Flow
($T_{in} > T_{out}$)

非平衡熱力学を作ることで・・・

(1) **非平衡輻射場のエントロピー**が得られる

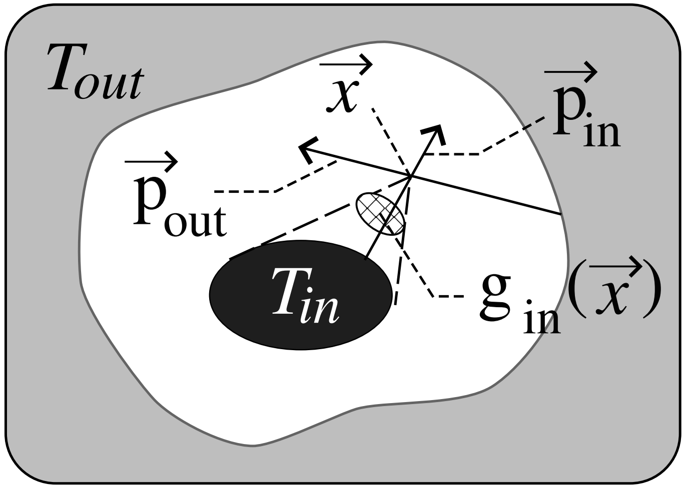
(2) **非平衡状態を特徴づける状態量**が分かる

(3) **非局所的な輻射エネルギー流束**が分かる

$\longrightarrow$ **輻射場の非平衡性（非平衡・非局所・非定常な輻射輸送）の定量的な扱いに道が開けるかも !?**

◇ 後の話：熱力学形式には触れずに
非平衡エントロピー と 非平衡状態量 を概説

3.3 準備1：分布関数 $f(\vec{x}, \vec{p})$



光子は無衝突粒子

→ 2つの温度のプランク分布の重ね合わせ

$$f(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{\exp\left[\hbar\omega / T(\vec{x}, \vec{p})\right] - 1}$$

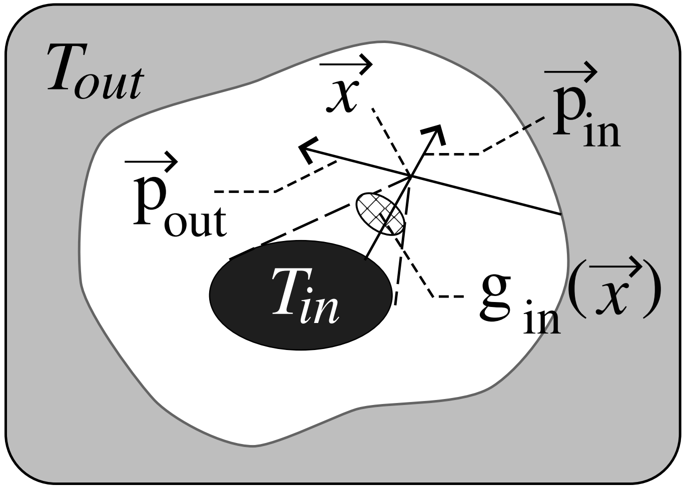
$$\begin{cases} \hbar\omega = |\vec{p}|\, c & : \text{ 光子の角振動数 } \omega \text{ と運動量 } \vec{p} \\ T(\vec{x}, \vec{p}_{in}) = T_{in} & : \ \vec{p}_{in} = \text{"}T_{in}\text{"から出る光子の運動量} \\ T(\vec{x}, \vec{p}_{out}) = T_{out} & : \ \vec{p}_{in} = \text{"}T_{out}\text{"から出る光子の運動量} \end{cases}$$

→ 分布関数に空間依存性 $\vec{x}$ がある

→ 空洞内の場所ごとに非平衡輻射場の状態量の値は異なるだろう

→ 場所ごとに異なる非平衡状態：**「局所」非平衡状態** である！

3.4 準備2：内部エネルギー密度 $e_{rad}(\overrightarrow{x})$



◇ 注意：「局所」非平衡状態

$\longrightarrow$ 示量性の状態量は**密度**になる

● 内部エネルギー密度

$$e_{rad}(\overrightarrow{x}) = 2\int \frac{dp^3}{(2\pi\hbar)^3}\,\hbar\omega\, f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) = \frac{4\sigma}{c}\left[g_{in}(\overrightarrow{x})\, T_{in}^4 + g_{out}(\overrightarrow{x})\, T_{out}^4 \right]$$

$$\begin{cases} \left. \begin{array}{l} g_{in}(\overrightarrow{x}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\overrightarrow{p}_{in}} d\Omega_{xp} \\ g_{out}(\overrightarrow{x}) = g_{in}\,(\overrightarrow{p}_{in} \leftrightarrow \overrightarrow{p}_{out}) \end{array} \right] \longrightarrow \text{系の幾何形状への依存性} \\ \Omega_{xp}：\ \text{位置}\ \overrightarrow{x}\ \text{での}\ \overrightarrow{p}\ \text{空間の立体角} \\ \sigma = \dfrac{\pi^2}{60h^3c^2}：\ \text{Stefan-Boltzmann 定数} \end{cases}$$

3.5 狙い1：エントロピー密度 $s_{rad}(\overrightarrow{x})$

- 例えば Landau-Lifshitz "統計物理学（第1部）" §55 を参照して

→「任意」のボゾン系のエントロピー（"H-関数"）：

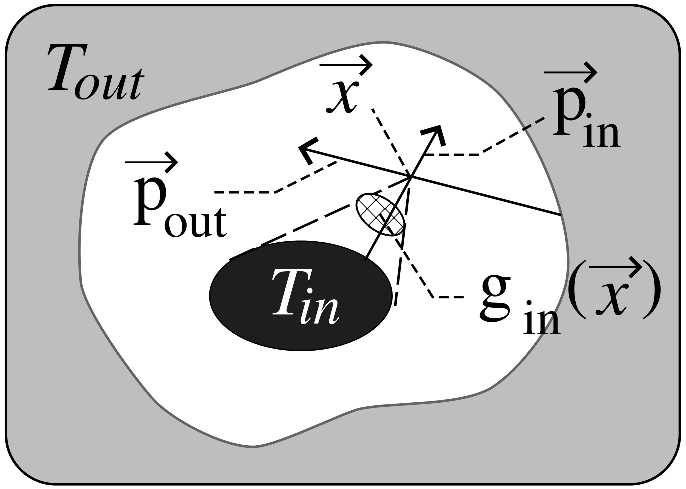
$$s_{rad}(\overrightarrow{x}) = 2\int \frac{dp^3}{(2\pi\hbar)^3}\left[(1+f)\ \ln(1+f) - f\ \ln f\right]$$

$$= \frac{16\,\sigma}{3}\left[g_{in}(\overrightarrow{x})\,T_{in}^3 + g_{out}(\overrightarrow{x})\,T_{out}^3\right]$$

→ 系の全エネルギーと全エントロピー：

$$E_{tot} \;=\; E_{in} + E_{out} + \int dx^3 e_{rad}(\overrightarrow{x})$$

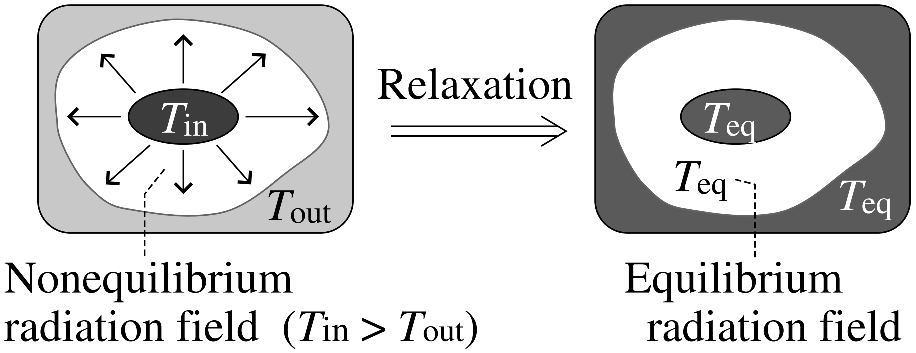
$$S_{tot} \;=\; S_{in} + S_{out} + \int dx^3 s_{rad}(\overrightarrow{x})$$



では、S_{tot} は「エントロピー」として妥当か？

（確かめないとダメ）

● 緩和過程 $\longrightarrow$ 非平衡熱力学 第2法則 が満たされるかどうかテスト



$\longrightarrow$ 孤立系の緩和（ $dE_{tot} = 0$, $T_{in} > T_{out}$ ）

$$dS_{tot} = \left[C_{in} + \frac{16\,\sigma}{c} T_{in}^3 \int dx^3 g_{in}(\vec{x}) \right] \left(\frac{1}{T_{in}} - \frac{1}{T_{out}} \right) dT_{in}$$

ただし $C_{in} = \dfrac{dE_{in}}{dT_{in}} > 0$ ： 内側の黒体の熱容量

$\longrightarrow$ $dS_{tot} \geq 0$ （"=" for $T_{in} = T_{out}$ ）$\cdots$ S_{rad} **は Well-Defined！**

◇ 第0 ∼ 3法則が満たされることも示される

$\longrightarrow$ **二温度非平衡状態の熱力学形式はOK**（論文参照）

3.6 狙い2：非平衡性のオーダーパラメータとなる状態量 τ , $\psi(\overrightarrow{x})$

- 非平衡オーダーの示強性量を τ ，示量性量を ψ として

  非平衡状態の熱力学形式が無矛盾になることを要請 $\cdots$

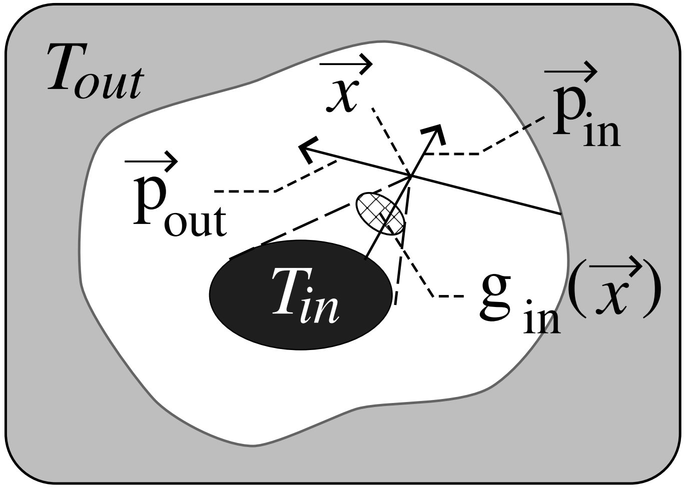
$$\begin{cases} \text{熱平衡極限} & : \ \tau \to 0 \ , \ \psi \to 0 \ \text{ as } \ T_{in} - T_{out} \to 0 \\ \text{自由エネルギー} & : \ f_{rad} := e_{rad}(P_{rad}, s_{rad}, \psi) - T_{rad}\, s_{rad} - \tau\, \psi \\ \text{熱力学的双対性} & : \ \psi = -\dfrac{\partial f_{rad}}{\partial \tau} \end{cases}$$

$\to$ τ , ψ さらに非平衡温度 $T_{rad}(\overrightarrow{x})$ も決まる：

$$\tau = T_{in} - T_{out}$$

$$\psi(\overrightarrow{x}) = \frac{16\sigma}{3c} g_{in}(\overrightarrow{x})\, g_{out}(\overrightarrow{x}) \left(T_{in}^3 - T_{out}^3 \right)$$

$$T_{rad}(\overrightarrow{x}) = g_{in}(\overrightarrow{x})\, T_{in} - g_{out}(\overrightarrow{x})\, T_{out}$$



3.7 狙い3：輻射エネルギー流束 $\vec{j}\,(\vec{x}\,)$

$$\begin{cases} \vec{p}_{tot} = \text{位置 } \vec{x} \text{ をある瞬間に通過する全光子の運動量の和} \\ \vec{n} = \vec{p}_{tot} \text{ 方向の単位ベクトル} \end{cases}$$ として

→ 輻射エネルギー流束 $\vec{j}\,(\vec{x}\,) = j(\vec{x}\,)\,\vec{n}$

$$j(\vec{x}\,) = 2\int \frac{dp^3}{(2\pi\hbar)^3}\,\hbar\,\omega\,c\,f(\vec{x}\,,\vec{p}\,)\,\cos\phi$$

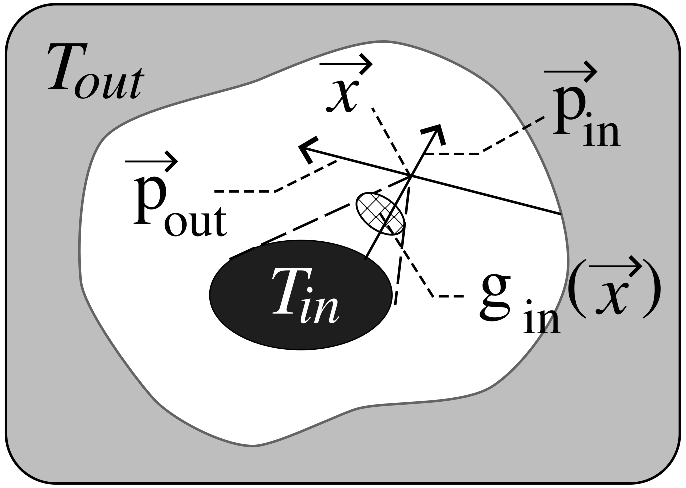
（ϕ：$\vec{n}$ と $\vec{p}_{in/out}$ の間の角）

$$= \sigma\left(\gamma_{in}(\vec{x}\,)\,T_{in}^4 - \gamma_{out}(\vec{x}\,)\,T_{out}^4\right)$$

$$\begin{cases} \gamma_{in}(\vec{x}\,) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\vec{p}_{in}} d\Omega_{xp}\,\cos\phi \\ \gamma_{out}(\vec{x}\,) = \gamma_{in}\,(\vec{p}_{in} \leftrightarrow \vec{p}_{out}) \end{cases}$$

→ $g_{in}(\vec{x}\,)$，$g_{out}(\vec{x}\,)$ **とは違う、**

系の幾何形状への依存性



3.8 結果

内部エネルギー密度 : $e_{rad}(\overrightarrow{x}) = g_{in}(\overrightarrow{x})\, e_{eq}(T_{in}) + g_{out}(\overrightarrow{x})\, e_{eq}(T_{out})$

エントロピー密度 : $s_{rad}(\overrightarrow{x}) = g_{in}(\overrightarrow{x})\, s_{eq}(T_{in}) + g_{out}(\overrightarrow{x})\, s_{eq}(T_{out})$

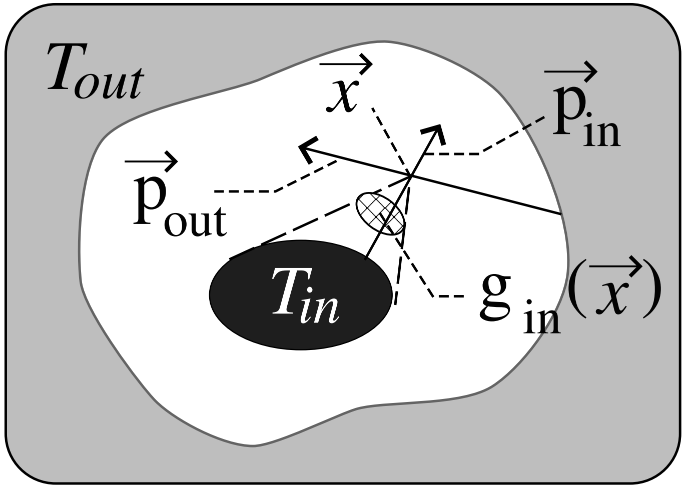
非平衡温度 : $T_{rad}(\overrightarrow{x}) = g_{in}(\overrightarrow{x})\, T_{in} - g_{out}(\overrightarrow{x})\, T_{out}$

非平衡オーダー（示強） : $\tau = T_{in} - T_{out}$

非平衡オーダー（示量） : $\psi(\overrightarrow{x}) = g_{in}(\overrightarrow{x})\, g_{out}(\overrightarrow{x})\, \left[s_{eq}(T_{in}) - s_{eq}(T_{out}) \right]$

輻射エネルギー流束 : $j(\overrightarrow{x}) = \sigma \left(\gamma_{in}(\overrightarrow{x})\, T_{in}^4 - \gamma_{out}(\overrightarrow{x})\, T_{out}^4 \right)$

ただし
$$\begin{cases} e_{eq}(T) & \text{：平衡状態のエネルギー密度} \\ s_{eq}(T) & \text{：平衡状態のエントロピー} \end{cases}$$



さあ、これからどうしたら良いか？

4. 議論・雑感

- Essex さんの洞察から $\cdots$ **輻射輸送の扱いは要注意かもしれませんよ !?**

- 二温度の非平衡定常状態の熱力学では、

  まだ非平衡・非局所・非定常な輻射輸送への適用は無理

  $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\textbf{多温度への拡張}\\ \textbf{非定常への拡張}\\ \textbf{輻射源が非平衡状態の場合への拡張}\end{array}\right.$ が次の課題か？

  $\rightarrow$ 多温度はなんとかなりそうだけど、非定常は $\cdots$

  $\rightarrow$ ましてや、非平衡物質からの輻射スペクトルなんて !?

  （ Boltzmann 方程式にドップリ浸るしかないか $\cdots$ ？）

- 僕はボチボチ考えるけど、誰かやってみますか？

  $\cdots$ ハイリスク・ハイリターンの研究かもしれんけど !?