磁場を持つ回転星の平衡解を求めるための**GS方程式の解法**

吉田至順

東北大学大学院天文学専攻

Table of Contents

1. Introduction
2. 定式化
3. 数値計算法
4. 数値解
5. 今後の課題

1. Introduction

強い磁場が観測されている星

- **Ap/Bp Star: 200—3000 G**
- **White Dwarf: 10^4—10^9 G**
- **Neutron Star: 10^11—10^15 G**

■**磁場はほぼ安定 ➡ 平衡状態？**

■Magnetic flux~10^26—10^27 G cm^2
(at the high field end)

■**強磁場だが $H/|W| \sim B^2R^4/(3GM^2)$ は小さい。**

超強磁場中性子星でも $H/|W| \sim 10^{-4}$

■**内部の磁場構造などは不明。内部磁場は強い可能性あり**

なぜ、強磁場星を考えるのか？

- マグネターの存在

  10^15 G程度の磁場を持つ中性子星

  soft gamma repeater(SGR), anomalous X-ray pulsar (AXP) として観測される。

・この超強磁場は星の *平衡状態*、*振動*、*安定性*に影響？

・超強磁場は高エネルギー現象と強く関係

強磁場星の平衡形状とその安定性は、マグネター周りの高エネルギー現象研究の基本

しかし、強磁場星とその安定性の研究は、これまでに十分に行われていない。

これまでの強磁場星平衡解の研究

・ニュートン力学

ほぼ任意の磁場形状

Miketic(1973,1975),
Tominaga&Eriguchi(2005),
Yoshida&Eriguchi(2006),
Yoshida,Yoshida&Eriguchi(2006)

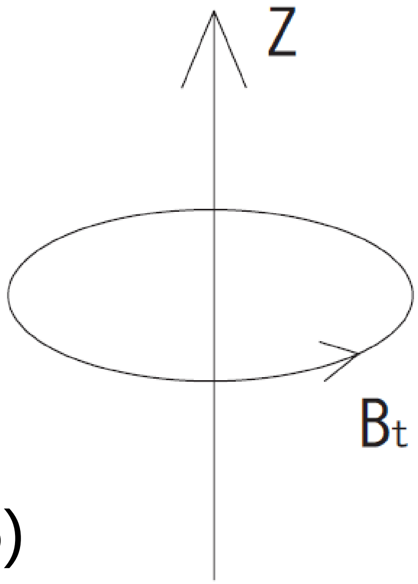
・一般相対論

ポロイダル磁場のみ

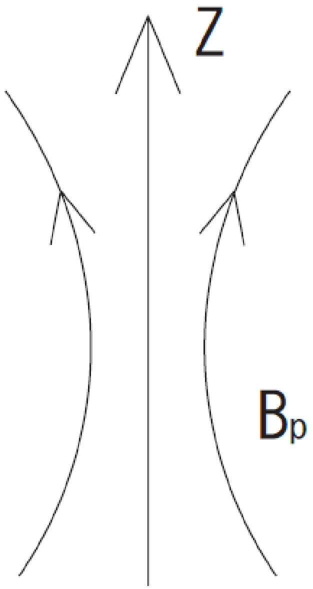
Bocquet et al.(1995),
Cardall, Prakash&Lattimer(2001)

トロイダル磁場のみ

Kiuchi&Yoshida(2008)



トロイダル:
φ方向の磁場



ポロイダル:
子午面内の磁場

・相対論で任意の磁場は非常に難しい

Metric の扱いが難しい。

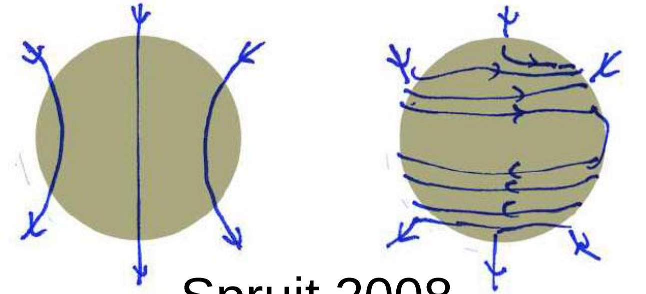
・中性子星内部磁場の予測

・中性子星はCore-Collapseで誕生
・Coreは一般に収縮と共に高速回転、当然、差動回転

ポロイダル磁場 → 凍結磁場が回転軸に巻きつき強いトロイダル磁場を生成

多くの数値シミュレーションで確認 e.g. Sawai et al.(2005)

$$
\begin{aligned}
B^T &\sim B^{\varpi}\Omega t \\
&= 10^{15}\left(\frac{B^{\varpi}}{10^{12}\ \mathrm{G}}\right)\left(\frac{\Omega}{10^{2}\ \mathrm{rad/s}}\right)\left(\frac{t}{10\ \mathrm{s}}\right)\ \mathrm{G}
\end{aligned}
$$



Spruit 2008

中性子星内部ではトロイダル磁場が支配的な可能性大

・富村&江里口以前の研究の問題点

・磁場を摂動で扱った場合

Ioka&Sasaki, ApJ, Vol. 600, 296(2004)

相対論で任意の磁場形状

・摂動解では、磁力線が星の外に出ない。

磁気圏が当然あるはずで不自然

・離散的な磁場形状のみが許される。

・磁場を非摂動で扱った場合

Bocquet et al., A&A, Vol. 301, 757(1995),

ポロイダル磁場だけを扱ったもの

中性子星では、少なくとも、初期は
強いトロイダル磁場があるはず。

・なぜポロイダル＋トロイダル磁場が必要か（1）

・ポロイダル磁場のみの星は不安定

Wright, MNRAS, Vol. 162, 339(1973)
Markey&Tayler, MNRAS, Vol. 168, 505(1974)

・同程度の強さのトロイダル磁場は安定化に効く

Braithwaite&Spruit, Nature, Vol. 431, 819(2004)

散逸のある磁気流体シミュレーションで

(1)ポロイダル磁場だけの場合、Alfven time 程度で、磁場が散逸

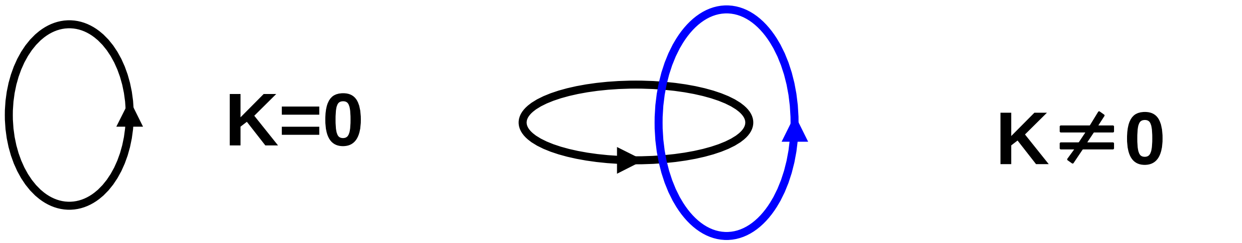
(2)強いトロイダル磁場がある場合、Alfven time 程度より長く磁場が安定に存在

・なぜポロイダル＋トロイダル磁場が必要か（2）

・magnetic helicity の保存

$$K = \int A_i B^i d^3\mathbf{r}$$

Magnetic helicity は磁力線の絡み度の指標



理想MHDでは K は保存される。

実験、数値シミュレーションから、散逸があっても

全系のKはほぼ保存されることが予想される。

星でも、K=0 が実現されるのは不自然

ポロイダル＋トロイダル磁場を持つのが自然

本日のお話：Newton 重力でのポロイダル＋
トロイダル磁場を持つ星の平衡解
の求め方

相対論好きな方、ごめんなさい。

磁気流体の式の相対論化は簡単。
しかし、重力場の扱いは非常に複雑になる。

参考文献

GS eq ：Lovelace, Mehanian, Mobarry,& Sulkanen
ApJS, Vol. 62, 1 (1986)

数値計算：Tomimura & Eriguchi
MNRAS, Vol. 359, 1117 (2005)
Yoshida & Eriguchi
ApJS, Vol. 164, 156 (2006)
Yoshida, Yoshida, & Eriguchi
ApJ, Vol. 651, 462 (2006)

2. 定式化

・理想MHD基礎方程式： 定常状態

1. Maxwell's equations:

$$\nabla_a E^a = 4\pi\rho_e,$$ ⇒ 電荷分布を決める式

$$\epsilon^{abe}\nabla_b B_e = \frac{4\pi}{c} j^a,$$ ⇒ GS eq.

$$\epsilon^{abe}\nabla_b E_e = 0,$$

$$\nabla_a B^a = 0,$$

⇒ 拘束条件

2. Perfect conductivity equations:

$$E_a + \epsilon_{abe} \frac{v^b}{c} B^e = 0,$$

3. Mass conservation:

$$\nabla_a (\rho v^a) = 0,$$

4. Euler equations:

$$\rho v^b \nabla_b v_a + \nabla_a p + \rho \nabla_a \Phi - \frac{1}{c} \epsilon_{abe} j^b B^e = 0,$$

$$\frac{1}{c} \epsilon_{abe} j^b B^e = \frac{1}{4\pi} \left(B^b \nabla_b B_a - B^b \nabla_a B_b \right)$$

クーロン力は無視: slow motion 近似

5. Poisson equation for the gravitational potential:

$$\nabla^a \nabla_a \Phi = 4\pi G \rho,$$

6. 状態方程式

バロトロープとして与えると必要な式はこれで全て。

$$p = p(\rho)$$

・元々の式から時間微分を落とした式

・一般に、解が存在するか不明

・適当な仮定を置き、解が存在するようにする

・可積分条件から解の自由度である任意関数が決まる

・磁場回転星の平衡状態の仮定

・磁場の対称軸と流体の回転軸が一致

電磁波が出ない条件

パルサーは一般に満たしていない条件

・物質、電磁場分布は、回転軸に対して対称

φ依存性なし

・星の外部は真空（絶縁体、電流ゼロ）

通常は、磁気圏を形成。非現実的？

・子午面流なし

$$v^a = \Omega \varphi^a$$

MHDでは、子午面流を入れるのは簡単

・磁場回転星の基礎方程式

円筒座標 (R, ϕ, z) を用いる。

・連続の式は自動的に満足

・ $\nabla_a B^a = 0$

$$B^R = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\Psi, \quad B^z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Psi$$

Flux function Ψの導入で、自動的に満足

Ψは A_ϕ　Ψ=一定 は磁力線になる。

・ $E_a + \epsilon_{abe}\frac{v^b}{c}B^e = 0$

$$E_a = -\frac{\Omega}{c}\nabla_a \Psi$$

導体の回転は電場を生成

- $\epsilon^{abe}\nabla_b E_e = 0$

$$\Omega = \Omega(\Psi)$$:Ferraro's iso rotation law

回転角速度が磁力線に沿って一定

- **Euler eq の可積分条件**

P,zR－P,Rz＝0 など

$$B^\phi = \frac{S(\Psi)}{R^2},$$ Dynamical torque-free 条件

$$\frac{j^a}{c} = \frac{\kappa}{4\pi} B^a + \rho\left(\mu + R^2 \Omega' \Omega\right) \varphi^a$$

$$\kappa(\Psi) \equiv S'(\Psi)$$

Ω, κ, S, μが、Ψの(任意)関数の時、解が存在可能

・静水圧平衡の式

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\Phi + \frac{1}{2} R^2 \Omega^2 + \int^{\Psi} \mu(u)\, du + C$$

・Grad-Shafranov eq.

$$\epsilon^{abe} \nabla_b B_e = \frac{4\pi}{c} j^a$$ の ϕ 成分

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -4\pi \rho R^2 \left[R^2 \Omega \Omega' + \mu(\Psi) \right] - \kappa(\Psi) S(\Psi),$$

子午面内の速度がゼロなので、常に楕円型の偏微分方程式。簡単に解ける。

・Poisson eq.

$$\nabla^a \nabla_a \Phi = 4\pi G \rho$$

・静水圧平衡の式、GS eq., Poisson eq. を連立して数値的に解けばよい。

・しかし、任意関数 S, κ をうまく与えないと星表面での境界条件を満足しない。

最近まで、ポロイダル磁場とトロイダル磁場を持つ星の解が得られていない理由？

・任意関数の物理的意味

・Ω : 流体の回転角速度、静電ポテンシャル

$$E_a = -\frac{\Omega}{c}\nabla_a \Psi$$

・S:トロイダル磁場分布

$$B^{\phi} = \frac{S(\Psi)}{R^2},$$

・μ :トロイダル電流密度分布

$$\frac{j^a}{c} = \frac{\kappa}{4\pi}B^a + \rho(\mu + R^2\Omega'\Omega)\varphi^a$$

密度に比例した電流成分

・ $\kappa(\Psi) \equiv S'(\Psi)$

磁場に比例した電流成分

・星表面での条件

軸対称定常磁場

$$B^R = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\Psi, \quad B^z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\Psi. \quad B^\phi = \frac{S(\Psi)}{R^2},$$

電流密度

$$\frac{j^a}{c} = \frac{\kappa}{4\pi}B^a + \rho\left(\mu + R^2\Omega'\Omega\right)\varphi^a$$

・孤立星の条件　　星外部は真空

j^a　B^ϕ　が、星外部でゼロ

S(Ψ)は磁力線に沿って一定なので、結構面倒

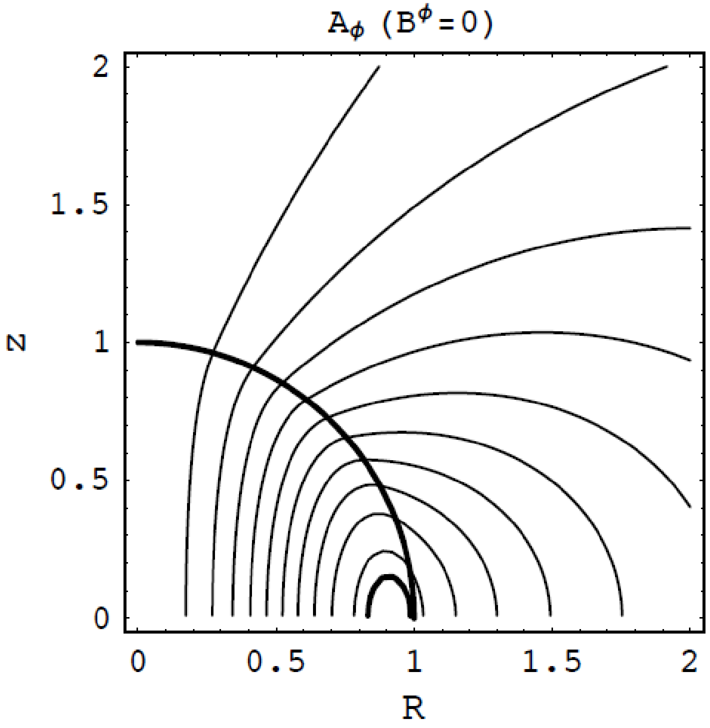
・Pure poloidal だと S=0 で問題なし

・摂動解では $S = \beta A_\phi$ として

磁力線を星内部に制限する。

・摂動解の例　μ=一定

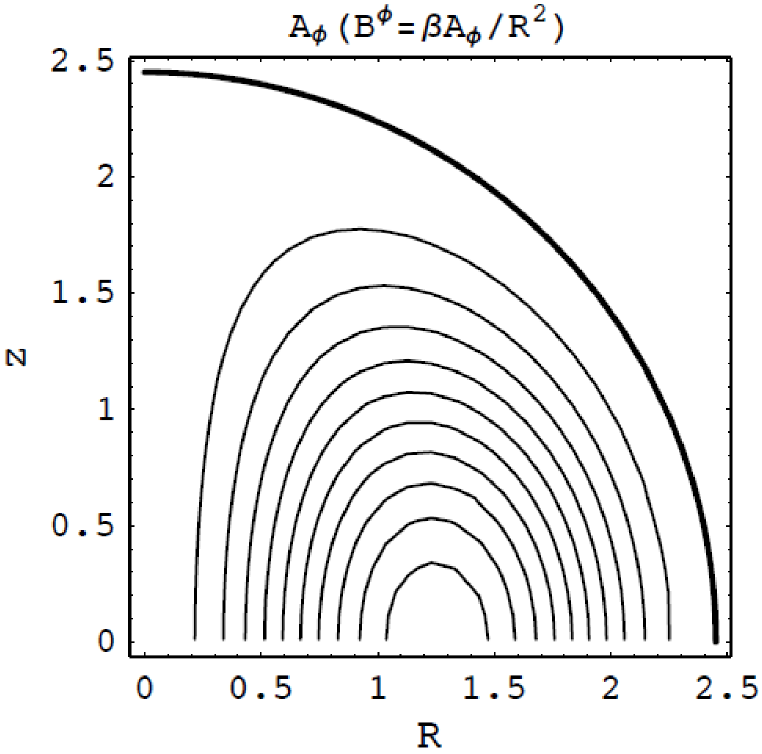
S=0



必然的に磁場は星外部に出る。

磁場分布がS のヒント

$$S = \beta A_\phi$$

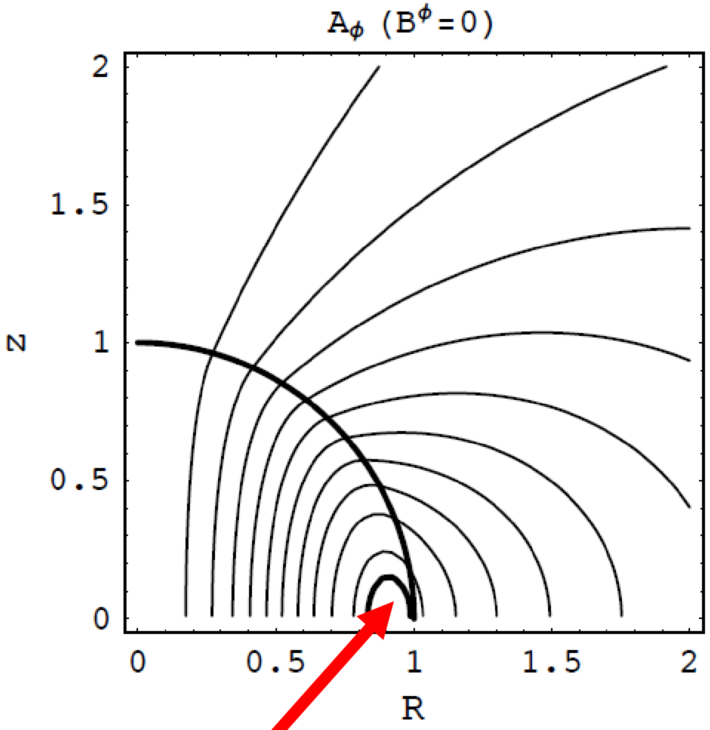


表面で $A_\phi = 0,\ \nabla A_\phi = 0$

β は離散的

特別な磁場形状のみ可能

･任意関数 S　富村＆江里口の方法



$$\mu(u) = \mu,$$

$$S(u) = \frac{a}{k+1}(u - u_{\max})^{k+1}\theta(u - u_{\max}),$$

$$\kappa(u) = S' = a(u - u_{\max})^{k}\theta(u - u_{\max}),$$

Umax は星表面でのΨの最大値

ここの部分だけで値を持つようにすれば良い。

μ=一定の場合はこれでうまく計算可能

3. 数値解法

基本的には、回転星の数値解法を使う。

・回転星の数値解法

Hachisu’s Self Consistent Field scheme

最も簡単で、効果的な解法

Hachisu, ApJS, Vol. 61, 475 (1986)

・基礎方程式をグリッド上で離散化すると
非線形代数方程式を解く問題となる。

・反復法で解に収束させる場合、反復中に
固定する変数の選択が、数値計算効率に
大きく影響。うまく選べるかが問題。

・一様回転ポリトロープ星の場合

$$p = p_{\max}(\rho/\rho_{\max})^{1+1/N}$$

無次元量

$$\hat{\rho} \equiv \rho/\rho_{\max},$$

$$\hat{\kappa} \equiv \frac{\kappa}{1/r_e},$$

$$\hat{r} \equiv \frac{r}{r_e} = \frac{r}{\sqrt{(1/\beta)(p_{\max}/4\pi G\rho_{\max}^2)}}$$

$$\hat{\mu} \equiv \frac{\mu}{\sqrt{4\pi G}/r_e},$$

$$\hat{\Omega} \equiv \Omega/\sqrt{4\pi G\rho_{\max}},$$

$$\hat{A}_\phi \equiv \frac{A_{\hat{\phi}}}{\sqrt{4\pi G}\rho_{\max} r_e^2} = \frac{\Psi/R}{\sqrt{4\pi G}\rho_{\max} r_e^2},$$

$$\hat{C} \equiv C/(4\pi G\rho_{\max} r_e^2),$$

$$\hat{B}^a \equiv B_{\hat{a}}/\left(\sqrt{4\pi G}\rho_{\max} r_e\right),$$

β の導入が重要:

赤道面半径が1になるように決める。

・基礎方程式とHSCF scheme

$$\hat{\Phi} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\hat{\rho}}{|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'|} d^3\hat{\mathbf{r}}'$$

$$\hat{A}_\phi \sin\phi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\hat{\kappa}\hat{S} + 4\pi\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{R}'}{\hat{R}'|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'|} \sin\phi' d^3\hat{\mathbf{r}}'$$

Green 関数で、境界条件を取り込んだ形

Initial guess として $\hat{\rho}$ $\hat{A}_\phi$ を与えると

新しい $\hat{\Phi}$ $\hat{A}_\phi$ が得られる。

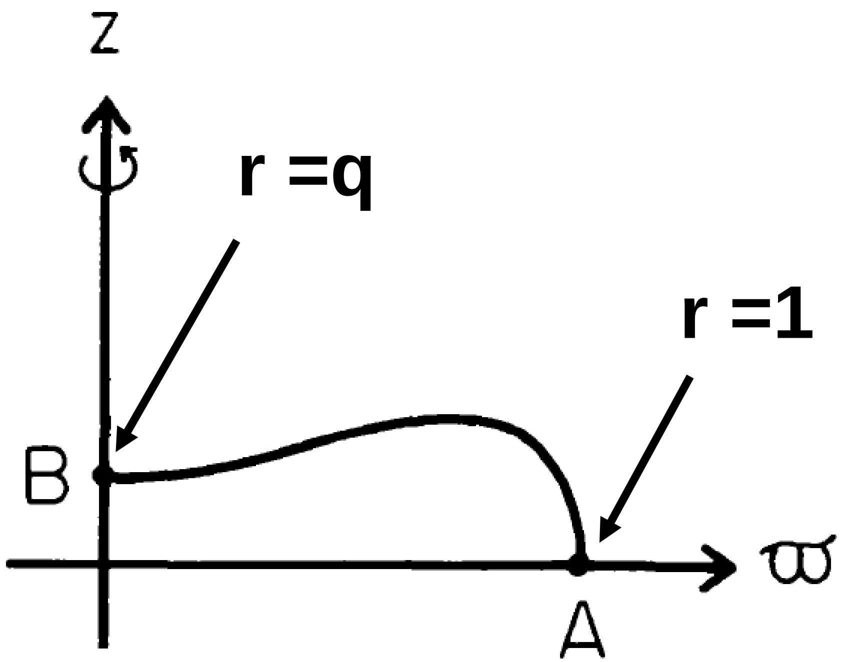
$$\frac{1}{|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

を用いて計算。 積分公式は何でも良い。

静水圧平衡の式

$$(N+1)\beta\,\hat{\rho}^{1/N} = -\hat{\Phi} + \frac{1}{2}\hat{R}^2\hat{\Omega}^2 + \hat{\mu}\hat{R}\hat{A}_\phi + \hat{C}$$

新しい $\hat{\rho}$ を得る式



・β、Ω、μ, C の決め方

HSCF法では3点を固定

(1)B点が半径q の表面

$$0 = -\hat{\Phi}_B + \hat{C}$$

(2)A点が半径1の表面

$$0 = -\hat{\Phi}_A + \frac{1}{2}\hat{\Omega}^2 + \hat{\mu}\hat{A}_{\phi A} + \hat{C}$$

(3)原点が最大密度の点（原点の必要なし）

$$(N+1)\beta = -\hat{\Phi}_o + \hat{C}$$

・磁場が無い場合

μ =0 なので、3つの条件から β , C, Ω が決まる。

・磁場がある場合

Ω or μ を与え、固定し、その他の定数を決める。

・β 、Ω 、μ , C が決まったので

$$(N+1)\beta\,\hat{\rho}^{1/N} = -\hat{\Phi} + \frac{1}{2}\hat{R}^2\hat{\Omega}^2 + \hat{\mu}\hat{R}\hat{A}_\phi + \hat{C}$$

を用いて、全ての点で新しい $\hat{\rho}$ が得られる。

また、$\hat{\Phi} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\hat{\rho}}{|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}'|} d^3\hat{\mathbf{r}}'$ などへ戻る。

$\hat{\rho}$ $\hat{A}_\phi$ の変化が小さければ、全ての式を満たし解

・今紹介した方法で大体解は求まる。

しかし、不十分。

・元々のHSCF法は、磁場なしなので、3点固定による方法で、どんな解でも求められる非常に強固な方法。

$$\mu(u) = \mu,$$

・磁場星の場合は、

$$S(u) = \frac{a}{k+1}(u - u_{\max})^{k+1}\theta(u - u_{\max}),$$

$$\kappa(u) = S' = a(u - u_{\max})^k \theta(u - u_{\max}),$$

・Ω=0, a=0 ：非回転、pure poloidal　のときは非常に強固な方法

・Ω=0　でも、poloidal+toroidal のときは磁場が強くなると収束しなくなる。

磁場はどこまで強くなれるか？などに答えられない。

4. 数値解

・メッシュの数: $(r \times \theta) = (200 \times 200)$

・解の精度:ヴィリアル方程式でチェック

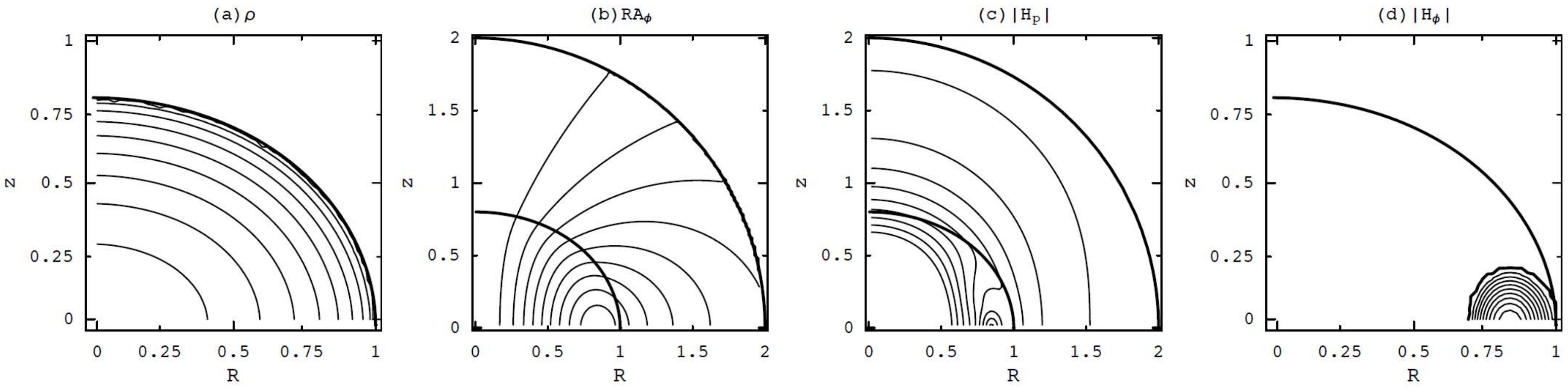
$$\mathrm{VC} = |2T + W + 3U + H| \;/\; |W|$$

悪くても 10^-3 程度で満足

・軸比 q を固定して、$\rho,\ A_\phi,\ \beta,\ C,\ \mathbf{and}\ \Omega$ (μ) を反復法で収束させる。

・典型的な磁場星の物質分布、磁場分布（回転なし）

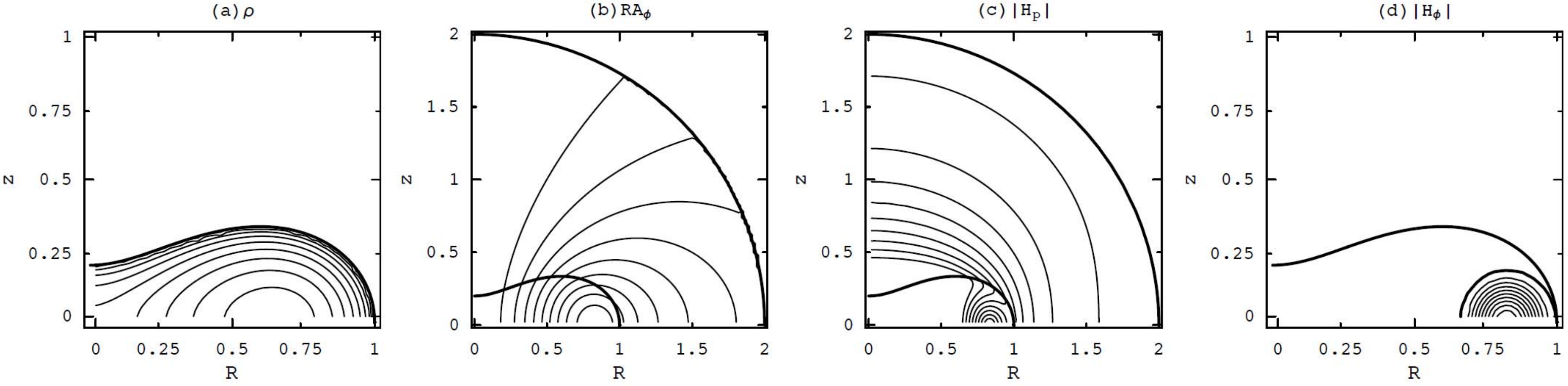
N=1 のポリトロープ、k=0.1



$$q = 0.8,\ a = 15,\ \mu = 0.204,\ H_{\rm pole} = 1.47 \times 10^{17} \left(\frac{M}{1.4M_\odot}\right) \left(\frac{13{\rm Km}}{R}\right)^2\ {\rm G},$$
$$H/|W| = 0.0508$$

$$H_{\rm T,max}/H_{\rm P,max} = 0.218$$ 同程度の大きさ

・非等方な磁気応力によって、Oblate になっている。



$q = 0.2,\ a = 15,\ \mu = 0.333,\ H_{\rm pole} = 7.55 \times 10^{17} \left(\frac{M}{1.4M_\odot}\right)\left(\frac{13{\rm Km}}{R}\right)^2\ {\rm G},$
$H/|W| = 0.2975$

$H_{\rm T,max}/H_{\rm P,max} = 0.439$ 同程度の大きさ

- 星外部では、ダイポール的な磁場が支配的
- 星内部にはトロイダル磁場があるが、狭い領域に制限されている。

- 磁場形状：ねじれた磁力線でできた対称軸周りのトーラス＋それを貫き無限遠に続くポロイダル磁場

・得られた磁場形状は Braithwaite&Spruit の安定な磁場分布と類似。

球対称の平衡解にランダムで小さい磁場を適当に与えるとその後、自己組織化して、右図のような磁場分布が得られるという計算

我々の平衡解が安定かどうか？
知りたい！

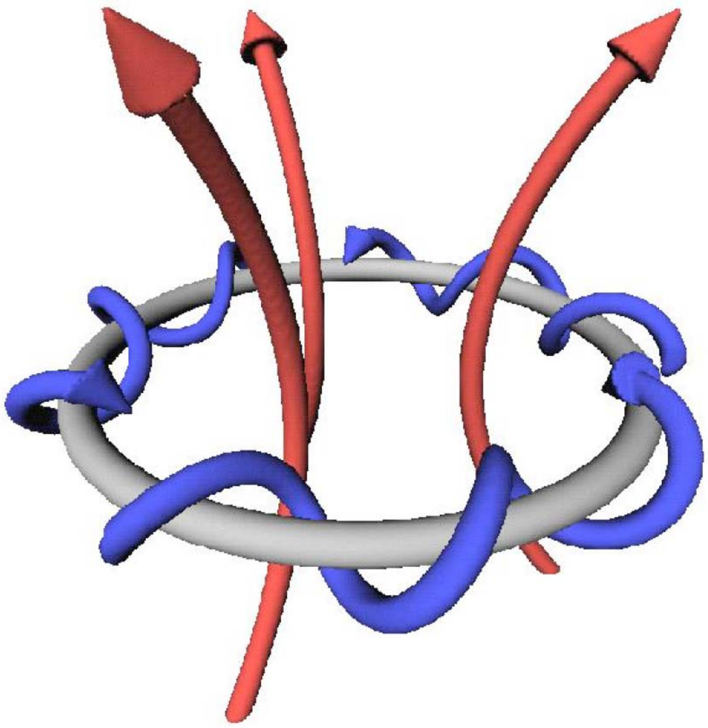


FIG.3: Schematic diagram of the typical configuration of stable magnetic fields obtained by Braithwaite & Spruit (2004) with MHD simulations.

5.今後の課題

・富村＆江里口の方法でも不十分

中性子星では、トロイダル磁場が支配的な
モデルがもっともらしい。

しかし、現状では、ポロイダル磁場が支配的な
モデルしか計算できない。

実際の星の構造もポロイダル磁場が
大体決めている。

トロイダル磁場が支配的なモデルを計算する
手法の確立。

・一般相対論的な扱い

本当に強磁場なのは中性子星だけ
定量的には、一般相対論で扱う必要がある。

・MHDの式は、拡張可能（拡張済み）

・問題は重力場

軸対称でも一般の磁場分布では
circularity condition

$$t_\alpha T^{\alpha[\beta} t^\gamma \varphi^{\delta]} = \varphi_\alpha T^{\alpha[\beta} t^\gamma \varphi^{\delta]} = 0$$

を満たさないので、回転星のmetric が使えない。

座標条件も含めて、解く必要がある。

連星中性子星の準定常状態で使っている
座標を使う（擬ローレンツ条件）など

・固有振動、安定性解析

平衡解があるので、安定性を知りたい。

・磁場は、とにかく不安定で、星内部での安定性がどうなるのかは、非常に重要

・ジャイアントフレアーで、固有振動らしきものがX-線で観測されている。

固有振動観測から星の構造に制限。

・線形摂動解析による固有値問題を解くのは非常に困難。

シミュレーションが有効な方法？

どうもありがとうございました。

吉田至順@東北大天文