ニュートン重力での GS 方程式の解法

藤澤幸太郎

東京大学総合文化研究科

大谷潤　吉田慎一郎　江里口良治 **(東大総合文化)**　高橋労太 **(理研)**

平成 22 年 3 月 3 日 (水) @ 第 3 回 BH 磁気圏勉強会

目次

1. GS 方程式の導出
2. 運動方程式の積分可能条件と電流密度の形
3. GS 方程式の解法
4. 具体的な計算結果
5. 今後への展望

1.GS方程式の 導出

Grad-Shafranov 方程式

- H. Grad & H. Rubin (1958)，Shafranov (1966) によって導かれた方程式．flux function Ψを用いて書ける楕円型方程式.

$$\Delta^* \Psi = -4\pi R \frac{j_\varphi}{c},$$

$$\Delta^* \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} = R \frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2},$$

- 右辺の電流密度の形を与えることで，釣り合い状態の磁場構造が得られる．

基礎方程式と 仮定

- 定常 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) で 軸対称 ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) を 仮定.
  - Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e, \ \ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \ \ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \ \ \nabla \times \boldsymbol{H} = 4\pi\frac{\boldsymbol{j}}{c}.$$

- ideal MHD を 仮定
  - 一般化された Ohm の 法則

$$\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} = 0.$$

- ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

flux function Ψ

- $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ から導かれる．等高線が磁力線を表す．

$$H_z \equiv \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi(R,z)}{\partial R}, \quad H_R \equiv -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi(R,z)}{\partial z}.$$

- ベクトルポテンシャルとの関係.

$$\Psi(R,z) = RA_\varphi(R,z).$$

- 磁場構造を決定する関数.

GS 方程式

- Ψを 使っ て 磁場を 書き 直す.

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi), \frac{\partial H_R}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial R}\right).$$

$$\{\nabla \times \boldsymbol{H}\}_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$

- $-R$を かけ て. Maxwell 方程式に 代入し, 電流 と 関係付ける.

$$\Delta^* \Psi = -4\pi R \frac{j_\varphi}{c}.$$

2. 運動方程式の積分可能条件と電流密度の形

自己重力電磁流体

- 自己重力がある 流体の GS 方程式を 考える .
  - 基礎方程式

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \quad \frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + \Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c} \times \boldsymbol{H}\right),$$

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho,$$

- Maxwell 方程式，自己重力流体の 式，適切な 境界条件の 全てを 満たした 釣り 合い 状態を 求める .
- 以下，Tomimura & Eriguchi(2005) らの 定式化に 基づく (参考文献参照).

積分可能条件と 電流密度の 形

運動方定式が

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\phi_g + R\Omega^2(\Psi) + \int \mu(\Psi)\, d\Psi + C,$$

という 形に 積分が 可能な 時，電流密度は

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$\kappa(\Psi)$，$\mu(\Psi)$，$\Omega(\Psi)$ は Ψ の 任意関数.
それぞれの 任意関数に 具体的な 関数形を 与えることで，様々な 磁場構造が 得られる .

Ψの任意関数Ω

$v_\varphi = R\Omega$を用いてφ成分を考えると，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Omega}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

となるので，

$$\Omega \equiv \Omega(\Psi).$$

$\boxed{\text{回転は}\ \Psi\ \text{によって決まる．}}$

Ψの任意関数κ

Lorentz力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j}/c \times \boldsymbol{H}$ の φ 成分を考える．

$$F_\varphi = \frac{j_z}{c} H_R - \frac{j_R}{c} H_z = 0,$$

となる． 電流密度を Ψ で書き直す．

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(RH_\varphi)\frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0.$$

よって，Ψ の任意関数 κ を用いて

$$RH_\varphi \equiv \kappa(\Psi).$$

トロイダル磁場は $\kappa(\Psi)$ によって決まる．

Ψの任意関数μその1

運動方程式の遠心力とLorentz力の項が，

$$\Omega^2 R\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2(\Psi)R^2\right) + \nabla(\nu(\Psi)),$$

と書くことができると，運動方程式が積分できる．今までの任意関数を用いて計算してみると，

$$\begin{aligned}
&\Omega^2 R\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) \\
= &\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial R}\left(-R^2\Omega\Omega' + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c} - \frac{1}{4\pi\rho R}\kappa'(\Psi)H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_R \\
+ &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(-R^2\Omega\Omega' + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c} - \frac{1}{4\pi\rho R}\kappa'(\Psi)H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

Ψの任意関数μその2

$$\mu(\Psi) \equiv \frac{1}{\rho R}\left(\frac{j_\varphi}{c} - \frac{1}{4\pi}\kappa' H_\varphi\right) - R^2\Omega\Omega'$$

と定義すると,

$$\Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c} \times \boldsymbol{H}\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2(\Psi)R^2\right) + \nabla\left(\int \mu(\Psi)\,d\Psi\right).$$

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$\boxed{\mu(\Psi)\text{は poloidal 磁場の偏り具合を表す.}}$

運動方程式の積分

以上のような任意関数を用いて.

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + \Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right),$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{dp}{\rho} = K(N+1)\rho^{1/N} = -\phi_g + R\Omega^2(\Psi) + \int\mu(\Psi)\,d\Psi + C.$$

拡張されたベルヌーイの式が得られた．釣り合い状態の磁場からの影響を組み込んで物質 (ρ) を決定できる.

3.GS方程式の 解法

GS 方定式の左辺

- ここまでで，GS 方定式の右辺 (電流密度) は決まった．

$$\Delta^*\Psi = -4\pi R\frac{j_\varphi}{c},$$

$$\Delta^*\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} = R\frac{\partial\Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2},$$

- 左辺の Ψ を $A_\varphi(=\Psi/R)$ に，微分演算子をラプラシアンに書き換える．

$$\Delta(A_\varphi\sin\varphi) = \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial R}-\frac{A_\varphi}{R^2}+\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}\right)\sin\varphi.$$

一般化されたGS方定式

以上から，次のようなPoisson型方定式が得られる．

$$\Delta(A_\varphi \sin\varphi) = S \sin\varphi,$$

$$S = -\left(\kappa' H_\varphi + 4\pi\rho R\mu + 4\pi\rho R^3 \Omega\Omega'\right).$$

この方定式を一般化されたGS方定式として，A_φ に関して解き，そこから Ψ を求める．

無限遠での境界条件の取り込み

- 2つの Poisson 方定式

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad \Delta(A_\varphi \sin\varphi) = S \sin\varphi,$$

- 磁場: $A_\varphi \Rightarrow \frac{1}{r}(O)$ $(H_p \Rightarrow \frac{1}{r^2}(O))$,
- 重力ポテンシャル: $\phi_g \Rightarrow \frac{1}{r}(O)$

$$\Downarrow$$

$$A_\varphi(\boldsymbol{r})\sin\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\sin\varphi' d^3\boldsymbol{r}'.$$

$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}'.$$

まとめ

- 解くべき微分方程式

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\phi_g + \Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right).$$

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho, \quad \Delta(A_\varphi \sin\varphi) = S\,\sin\varphi.$$

- 積分形

$$\int\frac{dp}{\rho} = -\phi_g + R\Omega^2(\Psi) + \int\mu(\Psi)\,d\Psi + C.$$

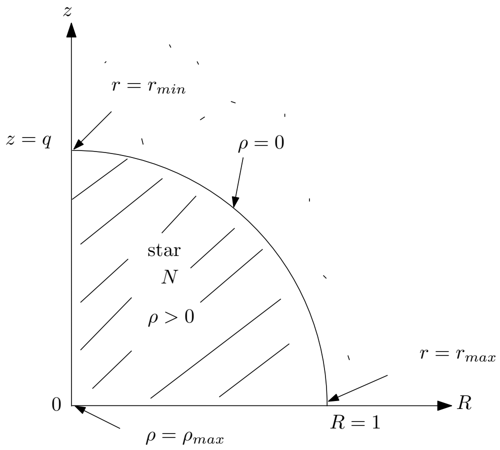
$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'.$$

$$A_\varphi(\boldsymbol{r})\sin\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\sin\varphi' d^3\boldsymbol{r}'.$$

4. 具体的な計算結果

数値計算スキーム

- HSCF Scheme (Hachisu 1986(a,b)) を使用.



- 軸比 q を固定することで，他のパラメータを決定する.

具体的な 任意関数の 形

電流密度

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

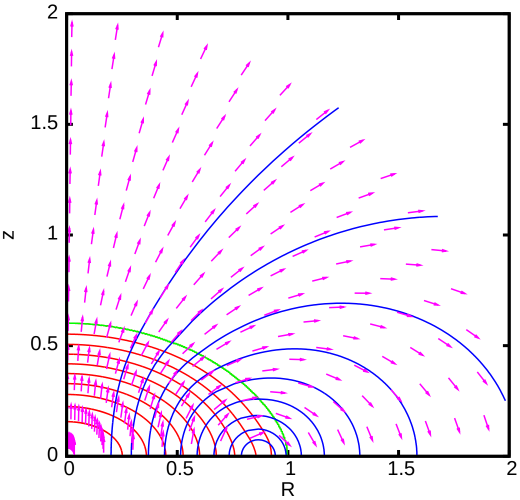
に 対し て，

$$\begin{aligned} \kappa(\Psi) &= \frac{a}{k+1}(\Psi - \Psi_{\max})^{k+1} Y(\Psi - \Psi_{\max}), \\ \Omega(\Psi) &= \Omega_0(\Psi^2 + d^2)^{\alpha}, \\ \mu(\Psi) &= \mu_0(\Psi + \epsilon_\mu)^m. \end{aligned}$$

ただし， $\Psi_{\max}$ は 真空 (密度 0) で 最も 大きい Ψ

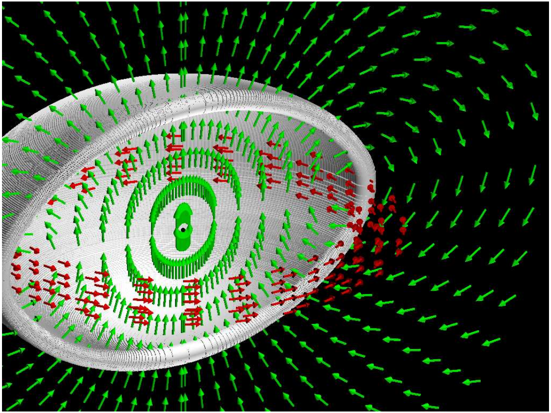
$$Y(x) = \begin{cases} 0, & (x \le 0) \\ 1, & (x > 0) \end{cases}$$

flux function Ψ の例



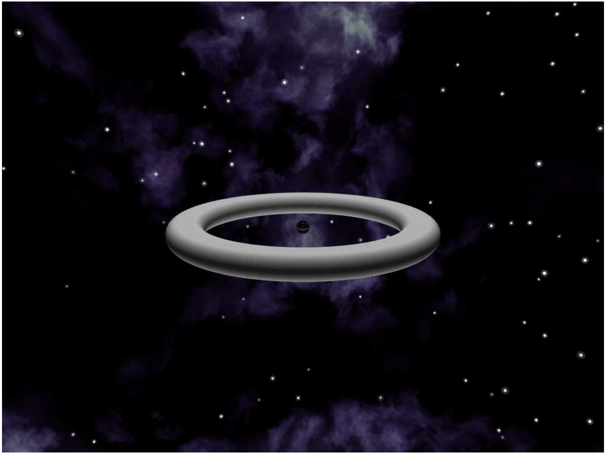
- Ψ の等高線 (青) と星の表面 (緑)，密度 (赤)，poloidal 磁場 (ピンク)

磁場構造の 例

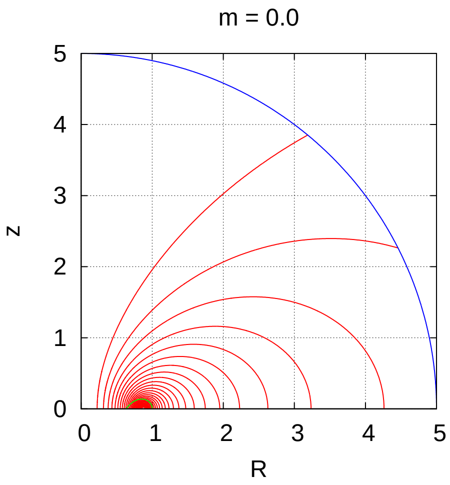


- 赤が toroidal 磁場，緑が poloidal 磁場.

BHとトーラス



Ψの等高線



５．今後への展望

今後への展望

まずは Newton 重力で

- 星とウインドの系の計算.
  - Sakurai(1985) 解など.
- BH(質点)とトーラスとウインドの系の計算.

次に一般相対論に拡張して,

- magnetar の磁場構造の計算.
- BH(質点では無い)とトーラスの計算.
- 星とウインドの計算.
- BH も含めた磁気圏の GS 方程式の計算.

次回へ続く？