ニュートン重力でのGS方程式の解法

藤澤幸太郎

東京大学総合文化研究科

まずは自己重力のある GS 方程式を導出する．ここで導出する GS 方程式の定式化及び解法は Tomimura & Eriguchi(2005) によっている (Yoshida & Eriguchi(2006)，Yoshida, Yoshida & Eriguchi (2006), Otani, Takahashi, Eriguchi(2009) なども参照)．まず，系は定常で軸対称 ($\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$) であり，流体の流れは回転方向 ($\varphi$ 方向) だけで，子午面内に流れは無いとする ($v_R = v_z = 0$)．また，流体の状態方程式はバロトロープであるとする ($p = p(\rho)$)．さらに，ideal MHD を仮定する．この時，電磁流体の基礎方程式は以下のようになる．(なお，(R, z, φ) を円筒座標，(r, θ, φ) を球座標とする)

- 連続の式，

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{1}$$

- 運動方程式

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla \phi_g + \Omega^2 R\, \boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c} \times \boldsymbol{H}\right). \tag{2}$$

- ポアソン方程式

$$\Delta \phi_g = 4\pi G \rho. \tag{3}$$

- Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi \rho_e, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 4\pi \frac{\boldsymbol{j}}{c}. \tag{7}$$

- Ideal MHD 条件 (一般化された Ohm の式)

$$\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} = 0. \tag{8}$$

- 状態方程式 (ポリトロープなど)

$$p = K \rho^{1+1/N}. \tag{9}$$

ここで，ρ, $\boldsymbol{v}$, p, ϕ_g, Ω, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{H}$, G, $\boldsymbol{E}$, ρ_e, はそれぞれ，密度，流体の速度，圧力，重力ポテンシャル，回転の角速度，電流密度，磁場, 万有引力定数，電場，電荷密度である．単位系は CGS-Gauss 単位系を用いる．式 (5) から, 軸対称の場合，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_R) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

であるので，flux function Ψ を以下のように定義する．

$$H_z \equiv \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad H_R \equiv -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{11}$$

一方で，磁場 $\boldsymbol{H}$ に対して，

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{H} = \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi), \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) \tag{12}$$

となるベクトルポテンシャルを導入すると，A_φ と Ψ は

$$\Psi = RA_\varphi, \tag{13}$$

という関係で結ばれている．ここで，(7) 式の磁場を flux function で書き直し，φ 成分だけを考えると，

$$\Delta^* \Psi = -4\pi R \frac{j_\varphi}{c}, \tag{14}$$

$$\Delta^* \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} = R\frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \tag{15}$$

と書ける (Shafranov(1966) 式 (4.18) 参照)．この微分方程式を Grad-Shafranov 方程式 (GS 方程式) と呼ぶ．右辺の電流密度に具体的な関数形を与えることで磁場構造が決定し，この方程式を解くことができる．今回の定式化では，電流密度の形を運動方程式の積分可能条件より導く．

まず，(6) 式と (8) 式より，$v_\varphi = R\Omega$ を用いて φ 成分を考えると，

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial z}(v_\varphi H_z) + \frac{\partial}{\partial R}(v_\varphi H_R) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial z}\left(R\Omega \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial R}\left(R\Omega \cdot -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Omega}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

となるので，

$$\Omega \equiv \Omega(\Psi), \tag{17}$$

という関係が導かれる．次に，Lorentz 力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{j}/c\times\boldsymbol{H}$ を考える．Lorentz 力の φ 成分は，軸対称の仮定と運動方程式より

$$F_\varphi = \frac{j_z}{c}H_R - \frac{j_R}{c}H_z = 0, \tag{18}$$

となる．(7) 式から，

$$\frac{j_R}{c} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad \frac{j_z}{c} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi), \tag{19}$$

であるので，

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}(RH_\varphi)\frac{\partial\Psi}{\partial R} = 0, \\ &\Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(RH_\varphi)\frac{\partial\Psi}{\partial R} = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

となる．よって，Ψ の任意関数 κ を用いて

$$RH_\varphi \equiv \kappa(\Psi), \tag{21}$$

と書ける．

ここで，この 2 つの任意関数を使って，運動方程式が積分可能になる条件を考える．運動方程式の右辺第 1 項は ∇ がかかっているのでそのまま積分可能である．問題は第 2 項と第 3 項で，この 2 つの項の R 成分と z 成分が，ある関数 ν を使って，

$$\Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) + \frac{\partial\nu}{\partial R}\right\}\boldsymbol{e}_R + \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) + \frac{\partial\nu}{\partial z}\right\}\boldsymbol{e}_z, \tag{22}$$

と書くことができる場合に積分が可能となる．実際，運動方程式の φ 成分は 0 であるので，

$$\Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2(\Psi)R^2\right) + \nabla\left(\nu(\Psi)\right), \tag{23}$$

となるからである．このような ν という Ψ の任意関数が存在することを，以下で導出していく．式 (11) と式 (19) と式 (21) を代入して，Ω が Ψ の任意関数であることに注意すると，運動方程式の第 2 項と第 3 項は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} \Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) &= \left\{\Omega^2 R + \frac{1}{\rho}\left(\frac{j_\varphi}{c}H_z - \frac{j_z}{c}H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_R + \left\{\frac{1}{\rho}\left(-\frac{j_\varphi}{c}H_R + \frac{j_R}{c}H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_z \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) - \frac{1}{2}R^2\frac{\partial\Omega^2}{\partial R} + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial R} - \frac{1}{4\pi\rho R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)H_\varphi\right\}\boldsymbol{e}_R \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) - \frac{1}{2}R^2\frac{\partial\Omega^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\rho R}\frac{\partial}{\partial z}(RH_\varphi)H_\varphi\right\}\boldsymbol{e}_z \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right) - \frac{1}{2}R^2\frac{d\Omega^2}{d\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial R} - \frac{1}{4\pi\rho R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\kappa' H_\varphi\right\}\boldsymbol{e}_R \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\quad \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right)-\frac{1}{2}R^2\frac{d\Omega^2}{d\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{1}{4\pi\rho R}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\kappa' H_\varphi\right\}\boldsymbol{e}_z \\
&=\quad \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial R}\left(-R^2\Omega\Omega'+\frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c}-\frac{1}{4\pi\rho R}\kappa'(\Psi)H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_R \\
&+\quad \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\left(-R^2\Omega\Omega'+\frac{1}{\rho R}\frac{j_\varphi}{c}-\frac{1}{4\pi\rho R}\kappa'(\Psi)H_\varphi\right)\right\}\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}
$$

ただし，$\frac{d}{d\Psi}=$「$'$」とした．ここで，Ψ の任意関数 μ を

$$
\mu(\Psi)\equiv\frac{1}{\rho R}\left(\frac{j_\varphi}{c}-\frac{1}{4\pi}\kappa' H_\varphi\right)-R^2\Omega\Omega' \tag{24}
$$

と定義すると，

$$
\begin{aligned}
\Omega^2R\,\boldsymbol{e}_R+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\boldsymbol{j}}{c}\times\boldsymbol{H}\right) &= \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial R}\mu(\Psi)\right\}\boldsymbol{e}_R+\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Omega^2R^2\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mu(\Psi)\right\}\boldsymbol{e}_z, \\
&= \nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2(\Psi)R^2\right)+\nabla\left(\int\mu(\Psi)\,d\Psi\right),
\end{aligned} \tag{25}
$$

となり，このような Ψ の任意関数 μ が存在すれば運動方程式が積分可能であるということが分かった．よって以上から，運動方程式の積分が可能になり，次のような拡張されたベルヌーイの式を得ることができる．

$$
\int\frac{dp}{\rho}=-\phi_g+R\Omega^2(\Psi)+\int\mu(\Psi)\,d\Psi+C. \tag{26}
$$

ただし，C は積分定数である．

一方で，μ の式の形から j_φ/c は

$$
\frac{j_\varphi}{c}=\frac{1}{4\pi}\kappa' H_\varphi+\rho R\mu+\rho R^3\Omega\Omega', \tag{27}
$$

であり，j_R/c，j_z/c も

$$
\frac{j_R}{c}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\kappa' H_R, \tag{28}
$$

$$
\frac{j_z}{c}=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\varphi)=\frac{1}{4\pi}\kappa' H_z, \tag{29}
$$

と変形できるので，電流密度が以下のように得られる．

$$
\frac{\boldsymbol{j}}{c}=\frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H}+\rho R\left(\mu(\Psi)+R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\,\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{30}
$$

これを (14) 式に代入することで GS 方程式を計算することができる．ここで，(14) 式の両辺を R で割り，Ψ を A_φ に書き直し $\sin\varphi$ をかけると，

$$
\Delta(A_\varphi\sin\varphi)=-4\pi\frac{j_\varphi}{c}\sin\varphi, \tag{31}
$$

となる．ただし，Δ は 3 次元の Laplacian で，

$$\begin{aligned}\Delta(A_\varphi \sin\varphi) &= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left\{R\frac{\partial}{\partial R}(A_\varphi\sin\varphi)\right\} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_\varphi\sin\varphi) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(A_\varphi\sin\varphi) && (32)\\ &= \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial R} - \frac{A_\varphi}{R^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}\right)\sin\varphi && (33)\end{aligned}$$

となる．(31) の右辺に (30) 式を代入して j_φ を消去すると，

$$\Delta(A_\varphi\sin\varphi) = S\sin\varphi, \tag{34}$$

$$S = -\left(\kappa' H_\varphi + 4\pi\rho R\mu + 4\pi\rho R^3\Omega\Omega'\right), \tag{35}$$

という Poisson 型の方程式が得られる．これを一般化された GS 方程式として，この方程式を解いて Ψ を求める．poloidal 磁場 H_p の境界条件として，$r \to \infty$ で

$$H_p \Rightarrow \frac{1}{r^2}(O), \tag{36}$$

という条件を課すと，A_φ の方は

$$A_\varphi \Rightarrow \frac{1}{r}(O), \tag{37}$$

となるので，適切な Green 関数を用いて (31) を次の形のような積分型に書き直すことができる．

$$A_\varphi(\boldsymbol{r})\sin\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\sin\varphi' d^3\boldsymbol{r}'. \tag{38}$$

重力ポテンシャルの Poisson 方程式に関しても同様に, $r \to \infty$ での境界条件，

$$\phi_g \Rightarrow \frac{1}{r}(O) \tag{39}$$

を課して，適切な Green 関数を用いることで次のような積分型に書き直すことができる．

$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'. \tag{40}$$

この積分を適当な関数 (Legendre 関数など) で展開して足し合わせれば，ϕ_g，A_φ，Ψ が求まり，(26) 式から ρ が求まるので，自己重力のある GS 方程式の解を得ることができる．実際の数値計算では，赤道面対称も仮定して，Legendre 陪関数を用いて次のように球座標で展開して足し合わせている．

$$\begin{aligned}A_\varphi(r,\theta) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}^1_{2n-1}(\cos\theta)}{2n(2n-1)}\int_0^\infty r'^2 f_{2n-1}(r,r')\,dr'\int_0^{\pi/2}\sin\theta'\mathrm{P}^1_{2n-1}(\cos\theta')\,d\theta'\times S(r',\theta'), && (41)\\ f_{2n}(r,r') &= \begin{cases} r'^{2n}/r^{2n+1}, & (r \geq r') \\ r^{2n}/r'^{2n+1}, & (r \leq r'). \end{cases} && (42)\end{aligned}$$

まとめ

1. 仮定
    - 系は定常である ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).
    - 系は軸対称である ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$).
    - 状態方程式はバロトロープである ($p = p(\rho)$).
    - ideal MHD であるとする.
2. 境界条件
    - ベクトルポテンシャル：$A_\varphi \Rightarrow 1r(O)$,
    - 重力ポテンシャル：$\phi_g \Rightarrow 1r(O)$,
3. 電流密度の形

$$\frac{\boldsymbol{j}}{c} = \frac{\kappa'(\Psi)}{4\pi}\boldsymbol{H} + \rho R\left(\mu(\Psi) + R^2\Omega(\Psi)\Omega'(\Psi)\right)\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

4. Ψ の任意関数
    - 角速度：$\Omega(\Psi)$
    - 電流密度の磁場に平行な成分：$\kappa(\Psi)$
    - 遠心力と Lorentz 力の可積分条件：$\mu(\Psi)$
5. 未知量と基本方程式
    - 密度 ρ

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\phi_g + R\Omega^2(\Psi) + \int \mu(\Psi)\,d\Psi + C.$$

    - ベクトルポテンシャルの φ 成分 (flux fuxtion Ψ)

$$A_\varphi(\boldsymbol{r})\sin\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\sin\varphi' d^3\boldsymbol{r}'.$$

参考文献

Otani, J., Takahashi, R., & Eriguchi, Y. 2009, MNRAS, 396, 2152
Shafranov, V.D. 1966, Reviews of Plasma Physics, 2, 103
Tomimura, Y., & Eriguchi, Y. 2005, MNRAS, 359, 1117
Yoshida, S., & Eriguchi, Y. 2006, ApJ, 164, 156
Yoshida, S., Yoshida, S., & Eriguchi, Y. 2006, ApJ, 651, 462