

近似リーマン解法を用いた相対論的 Sweet-Parker 型磁気 リコネクションシミュレーション

高橋博之¹、松本仁²、政田洋平¹、工藤哲洋¹

1. 国立天文台、2. 京都大学

第三回ブラックホール磁気圏勉強会@大阪市立大学

2010年3月2日

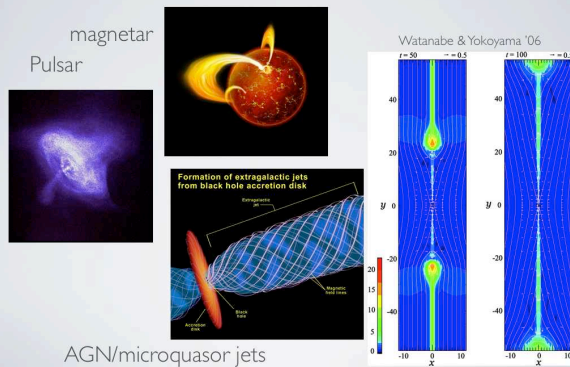
相対論的抵抗性磁気流体 方程式の近似リーマン解法

高橋 博之
松本仁、政田洋平、工藤哲洋

OUTLINE

1. 相対論的散逸性磁気流体方程式(RRMHD)の導入
2. RRMHDの数値解法
 1. HLL法に基づくRRMHDの数値解法
3. (preliminary)相対論的Sweet-Parker型磁気リコネクションの数値実験

ASTROPHYSICAL INTEREST



1. 相対論的散逸性磁気流体 方程式の導入

IDEAL / RESISTIVE

ideal MHD

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

$$e = \rho h \gamma^2 - p + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}$$

$$\mathbf{m} = \rho h \gamma^2 \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{\Pi} = \rho h \gamma^2 \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{E} \mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \delta \left[p + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \right]$$

resistive MHD

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

電流を決める式->Ohm's law

OHM'S LAW

- ・最も簡単な相対論的オームの法則を考える
- 等方的な抵抗、Hall等は考えない (e.g. Lichnerowicz '67, Ardanian '76)

$$u^\nu F_\nu^\mu = \eta [j^\mu + (u^\nu j_\nu) u^\mu]$$

comoving系(K)で等方散逸を考える

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$$

観測者系(K)にローレンツ変換

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{j} - q\mathbf{v}}{\sigma \gamma}$$

- ・理想流体では

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

オームの法則($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$)から電流が消える

AGAIN, OHM'S LAW

- comovingで等方散逸

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$$

- 観測者系へローレンツ変換

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j} - q\mathbf{v}}{\sigma\gamma}$$

-vに平行な電場 $E_{\parallel} = \frac{\gamma j_{\parallel}}{\sigma}$

-vに垂直な電場 $\mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma\gamma}$

comoving系で等方散逸でも観測者系から見ると非等方な散逸になる(Lorentz contraction)

IDEAL / RESISTIVE MHD

相対論においてidealとresistiveの違い

- 電磁場の時間発展

ideal

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Ampereの法則を解く必要がない
(ohmの式に電流が入らない)

resistive

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}$$

+ オームの法則
方程式が三本増える

-> 電磁波モードが現れる

resistive MHDはクーラン条件で損をする

さらに電場も解くので拘束条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$ も増える

2. 相対論的散逸性磁気流体 方程式の数値解法

RRMHDの進展

- Watanabe & Yokoyama ('06)
 - 相対論的Petscheck型磁気リコネクションのシミュレーション
Modified Lax-Wendroff法
- Komissarov ('07)
 - HLL法に基づくRRMHD数値解法を示した
- Palenzuela et al. ('09)
 - Implicit-Explicit (IMEX)スキームを構築
- Dumber et al. ('09)
 - PMPNスキームを構築

RELATIVISTIC IDEAL/RESISTIVE MAGNETOHYDRODYNAMICS

ideal MHD

$$\frac{\partial \rho\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

$$e = \rho h \gamma^2 - p + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}$$

$$\mathbf{m} = \rho h \gamma^2 \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{\Pi} = \rho h \gamma^2 \mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{E}\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{B} + \delta \left[p + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \right]$$

resistive MHD

$$\frac{\partial \rho\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \quad \text{双曲型方程式}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} =$$

$$-\frac{q\mathbf{v}}{\sigma} - \sigma\gamma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}]$$

固い式 S_c

ソース項 S

計算の流れ

物理量

基本量 $\mathcal{P} = (\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, p)$

保存量 $\mathcal{U} = (\rho\gamma, \mathbf{m}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, e)$

フラックス $\mathcal{F} = (\rho\gamma\mathbf{v}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{m})$

ソース項 $\mathcal{S} = (0, 0, -q\mathbf{v}, 0, 0)$

$\mathcal{S}_c = (0, 0, -\mathbf{J}_c, 0, 0)$

$\mathbf{J}_c = \sigma\gamma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}]$

解くべき方程式

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} = \mathcal{S} + \mathcal{S}_c$$

$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} = \mathcal{S}$ 固い項を含む式を別に解く

$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{S}_c$ operator splitting

1. 基本量を cell centre から cell surface へ

2. cell surface でフラックス \mathcal{F} を計算

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$$

3. 双曲型方程式を積分->保存量を求める

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} = \mathcal{S}$$

4. 電場の固い式の部分を積分

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{S}_c$$

5. 保存量から基本量へ変換

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$$

近似リーマン解法

双曲型方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} = \mathcal{S}$$

基本量 $\mathcal{P} = (\rho, v, B, E, p)$

保存量 $U = (\rho\gamma, m, B, E, e)$

フラックス $\mathcal{F} = (\rho\gamma v, \Pi, E, B, m)$

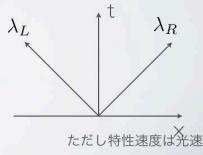
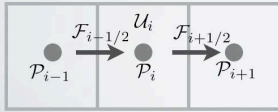
λ_R, λ_L 一番大きい固有値

$$\lambda_R = \max(\lambda_R, 0) \rightarrow \text{特性速度は光速}$$

$$\lambda_L = \min(\lambda_L, 0)$$

HLL flux

$$\mathcal{F}^{\text{HLL}} = \frac{\lambda_R \mathcal{F}_L - \lambda_L \mathcal{F}_R + \lambda_R \lambda_L (U_R - U_L)}{\lambda_R - \lambda_L}$$



RRMHDの面倒なところ

1. constraint

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q$$

これらの条件をみたしながら解く

2. Ampereの式

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \rho_e \mathbf{v} - 4\pi \sigma \gamma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}]$$

high conductivity では式が固くなる

3. クーラン条件

電磁波モードが現れるため、最大特性速度が光速になる各点で固有値を計算する必要がない

I. DIVERGENCE

Komissarov '07

Divergence条件を満たさないノイズは移流させながら拡散させる。
(similar to divergence-cleaning in ideal MHD)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{B} = -\kappa \Phi$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \kappa \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0$$

同様に電場の式も

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E} = q - \kappa \Psi$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \Psi = -\mathbf{j}$$

I. DIVERGENCE

div B条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{B} = -\kappa \Phi$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \Phi = 0$$

div E条件

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E} = q - \kappa \Psi$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \Psi = -\mathbf{j}$$

Φ, Ψ に関する式2本が増えた → 合計8+3+2=13本の方程式

電荷密度を決める式が必要

電荷密度に関する連続の式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

- 連続の式x2
- 運動量保存x3
- エネルギー保存x1
- Faradayの式x3
- Ampereの式x3
- divergenceの補正x2

これで合計14本の方程式 (ideal MHDの倍近い!)

2. STIFF EQUATION

Komissarov '07

problem comes from the difference between the dynamical times scale and diffusive time scale → use analytical solutions

Ampere's law

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \rho_e \mathbf{v} - 4\pi \sigma \gamma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}]$$

diffusion term

splitting

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \rho_e \mathbf{v}$$

analytical solution

note: diffusion is anisotropic!

$$\frac{\partial E_{\parallel}}{\partial t} = -4\pi \gamma \sigma [E_{\parallel} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}]$$

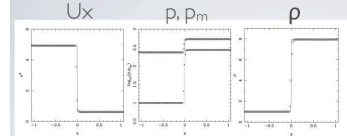
$$E_{\parallel} = E_{\parallel}^0 \exp\left(-\frac{4\pi \sigma t}{\gamma}\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} = -4\pi \gamma \sigma [\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\mathbf{E}_{\perp}^0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}^0) \exp(-4\pi \sigma \gamma t)$$

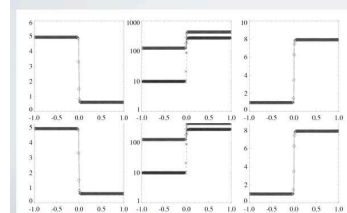
Advantage of solving relativistic resistive MHD !!

STATIONARY FAST SHOCK



Komissarov '08

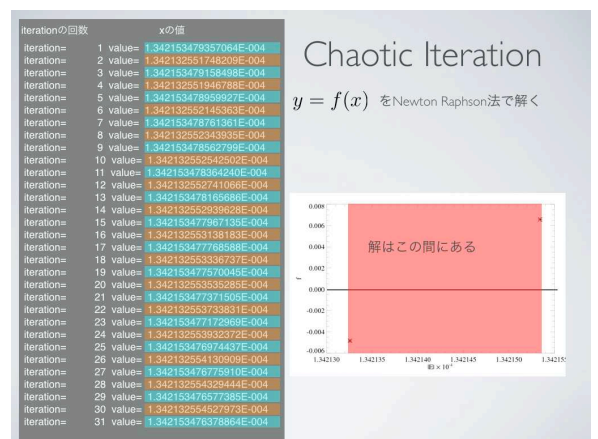
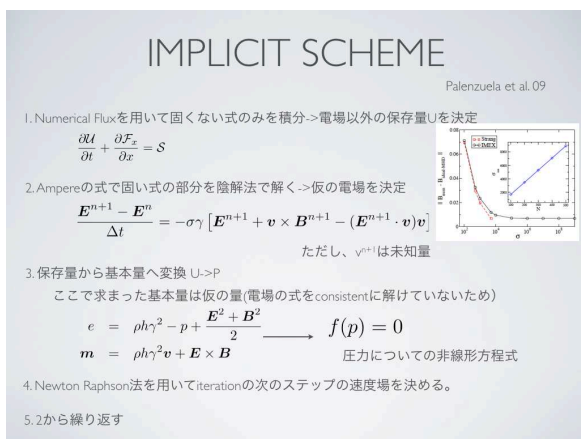
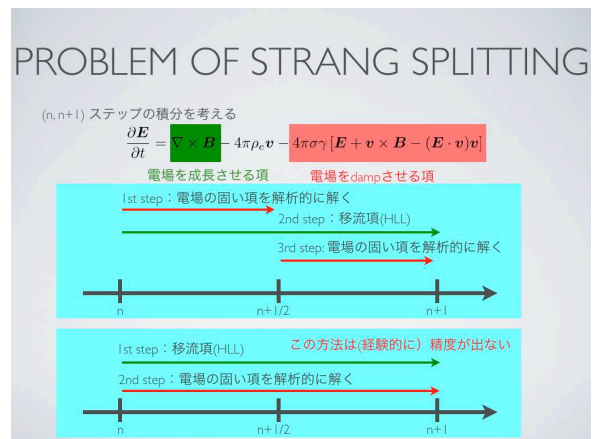
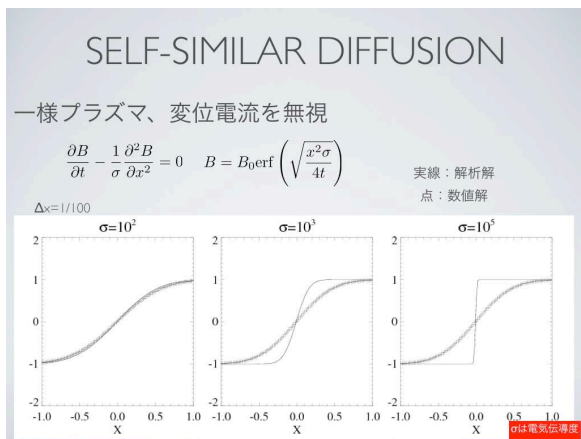
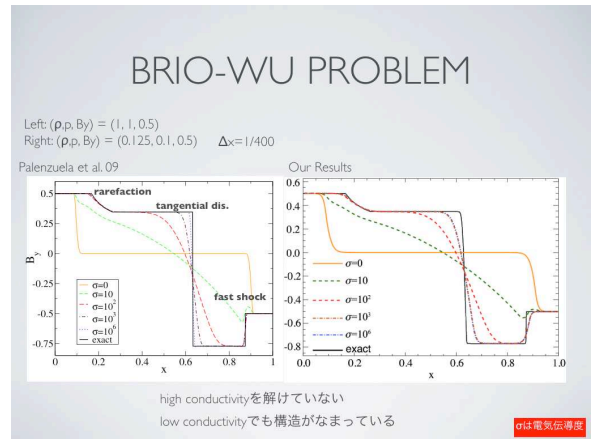
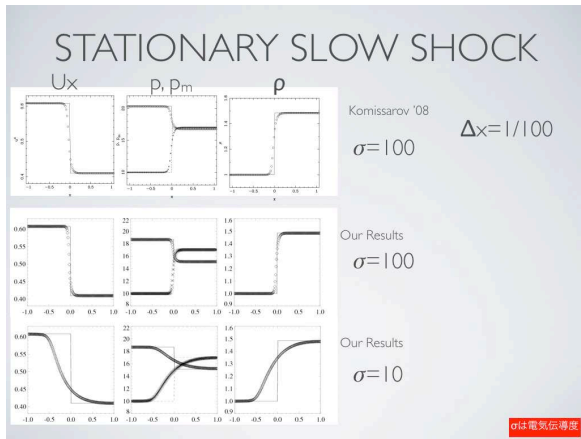
$$\sigma = 100 \quad \Delta x = 1/100$$



$$\sigma = 100$$

$$\sigma = 10$$

sigmaは電気伝導度

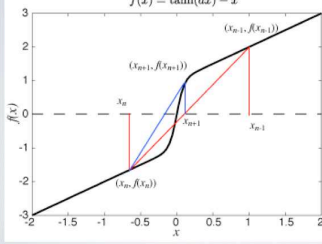


Chaotic Iteration

収束しない関数の例

$$f(x) = \tanh(ax) - x$$

$$f'(x) = \frac{a}{\cosh^2(ax)} - 1 \approx a - 1$$



Newton-Raphson method

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Secant method

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

secant methodの利点:

- 収束しやすい(絶対収束ではない)
- 2分法より収束が速い(二次収束)
- 微分値を必要としない

解析解Newton-Raphson, secant, bisection methodを併用する

PRIMITIVE RECOVERYの式

$$e = \rho h \gamma^2 - p + \frac{E^2 + B^2}{2}$$

$$m = \rho h \gamma^2 v + E \times B$$

Palenzuela(09) $f(p) = 0$ 圧力についての非線形方程式

Zentani et al. (09)

変数変換 $e' = e - \frac{E^2 + B^2}{2}$

$$m' = m - E \times B^2$$

として上式に代入すると

$$\Gamma_1^2 (e'^2 - |m'|^2) \gamma^4 - 2\Gamma_1 e' D \gamma^3 + (D^2 + 2\Gamma_1 |m'|^2 - \Gamma_1^2 e'^2) \gamma^2 + 2\Gamma_1 e' D \gamma - (D^2 + |m'|^2) = 0$$

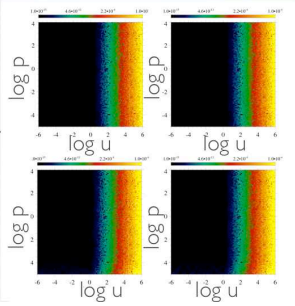
γ についての4次方程式

4次方程式の解法

1. 4次方程式を解析的に解く

- 4次方程式をNewton-Raphsonで解くと収束しない事がある
- 4次方程式の解法はFerrariの公式、Brown法などがあるがあまり変わらない印象

Ferrariの式 Brown法



2. 精度が悪い場合には解析解を初期推量にしてNewton-Raphson

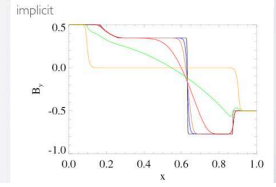
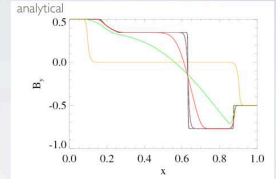
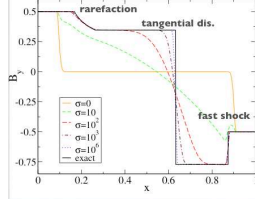
3. 収束しない場合にはSecant, Bisection法を用いる(Bisectionまで用いることはめったにない)

ANALYTICAL VS. IMPLICIT

Brio-Wu shocktube

fast wave (x2) + tangential discontinuity

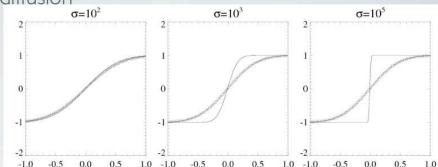
Palenzuela et al. 09



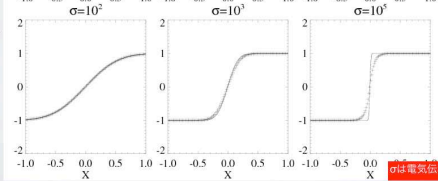
ANALYTICAL VS. IMPLICIT

self-similar diffusion

analytical



implicit



σ は電気伝導度

CONCLUSION

- ・ 近似リーマン解法(HLL)を用いたRRMHDコードを開発した。
- ・ Ampereの式の固い式の積分方法をimplicit + iteration
- ・ shock tube問題、自己相似的散逸などの1次元問題はクリア
- ・ 2次元Petschek問題も解けている
- ・ 問題点
 - ・ low β プラズマの計算はあまりうまくいっていない
 - ・ 数値拡散のために電場が成長することがある
 - ・ クーラン条件を小さくするか、 Δx を小さくしないと解が収束しない

3. SWEET-PARKER RECONNECTION

SETUP

2次元X-Y平面
 (Nx,Ny)=(2000,400), (Lx,Ly) = (100, 100)
 x方向は非一様グリッド (min(Δx)) = 0.01

initial condition : Harris sheet

$$B_y = B_0 \tanh\left(\frac{2x}{\lambda}\right) \quad p = p_0 + \frac{B_0^2 - B_y(x)^2}{2}$$

$$\rho = \frac{p}{T} \quad T = 1 \quad \Gamma = \frac{4}{3}$$

plasma beta@ sheath

$$\beta = \frac{2p_0}{B_0^2}$$

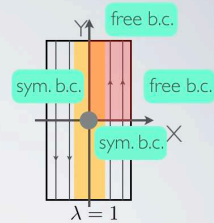
$$\beta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6$$

$$\sigma_M \equiv \frac{B^2}{4\pi w \gamma} = 20, 10, 5, 2.5, 1.25$$

$$\sigma_i \equiv \frac{B^2}{4\pi w \gamma} = 4, 2, 1, 0.5, 0.25$$

resistivity

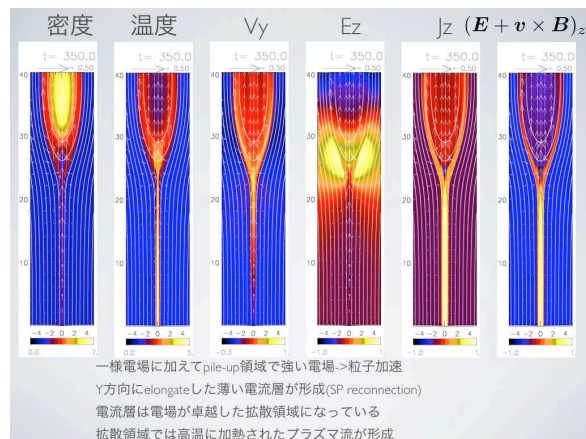
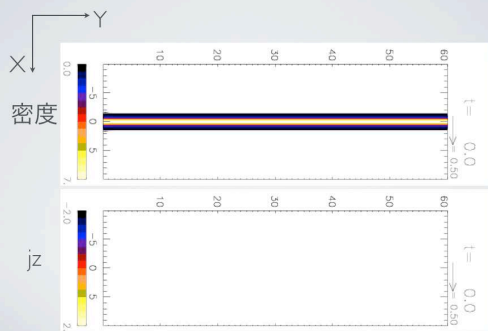
$$\eta = 5 \times 10^{-3} \text{ の一様抵抗モデル}$$



ctsmagnetization parameter

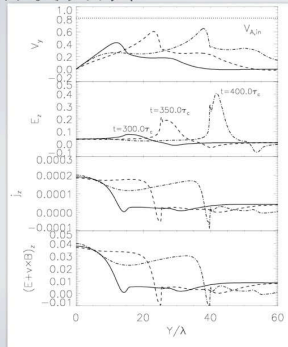
$\beta = 0.2, (\sigma_M = 10)$

$\eta = 5 \times 10^{-3}$



OUTFLOWの構造

X=0でプロット



- アウトフロー速度はsub Alvenic $\gamma \sim 2$
- upstreamからみてfast shock、tangential discontinuity(weak shock?)が形成
- 電流構造~MHD条件とほぼ一致
- 拡散領域を $E+V \times B$ で定義。原点の $(E+V \times B)_z$ に対してその1/eの値になるYをシートの長さとして仮定すると数十 λ 程度

RECONNECTION RATE

outflow: $V_o \rho_i$ mass conservation $\nabla \cdot (\rho \gamma \mathbf{v}) = \text{const}$

reconnection rate

$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{\delta \rho_{out} \gamma_{out}}{\rho_{in} \gamma_{in}}$$

- もし $\gamma \gg 1$ となればリコネクションレートがある (ローレンツ収縮による効果) (Blackman & Field '93, Lyutikov & Uzdensky '03)
- もし $\gamma \sim 1$ ならばインフロー速度はresistivityと関係づけられる

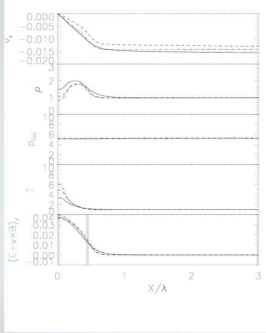
conventional SP model

$$V_{in} \simeq R_M^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\eta}{4\pi c l}}$$

Lyubarsky '05

INFLOW

Y=0でプロット



ほぼ定常を達成 $V_x \sim 0.14$

conventional SP model

$$V_{in} \approx R_M^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\eta}{4\pi cl}}$$

$l \approx 40, \eta = 5 \times 10^{-3}$ より $V_{in} \sim 0.01$

電流層の厚み $\delta \approx 0.5$

$$\frac{\delta}{l} \approx 0.01$$

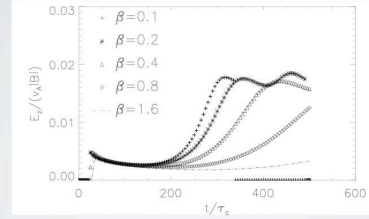
$$\frac{V_{in}}{V_{out}} \approx 0.01$$

従って $\frac{V_{in}}{V_{out}} \approx \frac{\delta}{l} \gamma_{out}$

- 圧縮はきいていない
- 相対論的效果も ($\sigma_m=2$)
- ほぼ非相対論的な結果と同じ
- Lyubarsky '05の議論と consistent

RECONNECTION RATE

reconnection rate $r = \frac{E_z}{V_A |B|}$ @ (x,y)=(20,0)



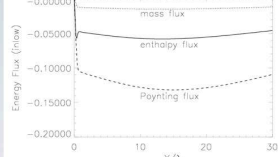
reconnection rateは β によらずほぼ一定

reconnection rate $\sim R_M^{-0.5}$

相対論的な効果は(このパラメータ範囲では)見られない

ENERGY FLUX

Y=0面でのエネルギーフラックス



mass flux $= \rho \gamma u_y$

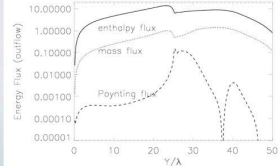
enthalpy flux $= 4p \gamma u_y$

Poynting flux $= \frac{E \times B}{4\pi}$

- inflowのエネルギーフラックス

- Poynting flux dominant
- ほぼ一定の割合でフラックスが拡散領域へ流入 = インフロー領域はほぼ定常

X=0面でのエネルギーフラックス



- outflowのエネルギーフラックス

- enthalpy flux dominant
- 磁気エネルギーはほぼ使い果たして熱に転化 -> enthalpyの上昇による実効的な質量の増加が $V_{out} < V_A$ を引き起こした?

相対論的SWEET PARKER

リコネクションのまとめ

- ついに相対論的Sweet-Parker型磁気リコネクションのシミュレーションが可能になってきた
- リコネクションレートはインフロープラズマ β によらずほぼ一定。相対論的效果は今のところ見られていない
- アウトフローのエネルギーフラックスはエンタルピーフラックスが dominant
- アウトフロー速度 < アルヴェーン速度はエンタルピー上昇によるものか