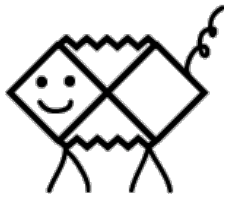
極限ブラックホール近傍の高エネルギー粒子衝突における“バックリアクション“の影響について

Phys.RevD.83.044013 (2011)

木村 匡志
(大阪市立大)



共同研究者 :中尾憲一　田越秀行

PRL 103, 111102 (2009) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 11 SEPTEMBER 2009

Kerr Black Holes as Particle Accelerators to Arbitrarily High Energy

(BSW)

Máximo Bañados,[1,2,*] Joseph Silk,[2,†] and Stephen M. West[3,4,‡]

[1]Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, Avenida Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile
[2]Physics Department, University of Oxford, Oxford, OX1 3RH, United Kingdom
[3]Royal Holloway, University of London, Egham, TW20 0EX, United Kingdom
[4]Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Didcot, OX11 0QX, United Kingdom

(Received 12 June 2009; published 10 September 2009)

We show that intermediate mass black holes conjectured to be the early precursors of supermassive black holes and surrounded by relic cold dark matter density spikes can act as particle accelerators with collisions, in principle, at arbitrarily high center-of-mass energies in the case of Kerr black holes. While the ejecta from such interactions will be highly redshifted, we may anticipate the possibility of a unique probe of Planck-scale physics.

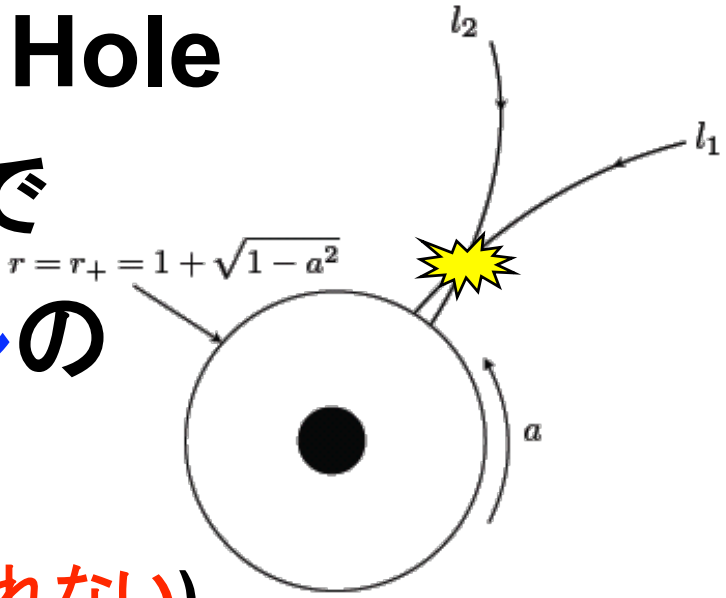
BSWの主張：Kerr Black Hole

周りにおける2粒子の衝突で

任意のエネルギースケールの

素粒子反応が起こせる

(Planck scale physics が見えるかもしれない)



Kerr時空で 2つのテスト粒子が衝突したときの

$E_{\rm cm}$ を求め, ある条件下で発散することを示した

- BHは最大回転 (M = a , 極限BH)
- 事象の地平面 のごく近傍で衝突
- 粒子の角運動量が特別な値にfine tune

これは現実の宇宙で実現可能なのだろうか？

- そもそも extremal Kerr が実現するのか
- バックリアクションの効果は無視出来るのか etc

今日の発表ではバックリアクションの効果を考慮したときの $E_{\rm cm}$ について議論する

発表内容

- BH まわりにおける高エネルギー粒子衝突
  - Kerr BH　(BSW のレビュー)
  - 荷電 BHの場合

- ”バックリアクション”を考慮した場合
  - Charged shell (荷電球殻) の衝突
  - 最大の衝突エネルギー

- まとめ

BH周りにおける
高エネルギー粒子衝突

center of mass energyの公式

同じ質量の2粒子の衝突を考える

$$p^{\mu}_{(1)} = mu^{\mu}_{(1)} \qquad p^{\mu}_{(2)} = mu^{\mu}_{(2)}$$

$p^{\mu} = p^{\mu}_{(1)} + p^{\mu}_{(2)}$ として

$$E^2_{\mathrm{cm}} = -p^{\mu}p_{\mu} = 2m^2(1 - g_{\mu\nu}u^{\mu}_{(1)}u^{\nu}_{(2)})$$

$$\therefore E_{\mathrm{cm}} = m\sqrt{2}\sqrt{1 - g_{\mu\nu}u^{\mu}_{(1)}u^{\nu}_{(2)}}$$

Kerr BH周りでの粒子の衝突 (赤道面上)

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2}{r^2}\right)dt^2 - \frac{2a(r^2+a^2-\Delta)}{r^2}dtd\phi + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + \left[\frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2}{r^2}\right]d\phi^2$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\tau} = \pm\dfrac{1}{r^2}\sqrt{T^2 - \Delta(r^2 + (\ell - aE)^2)} \\ \dfrac{d\phi}{d\tau} = -\dfrac{1}{r^2}\left[aE - \ell - \dfrac{aT}{\Delta}\right] \\ \dfrac{dt}{d\tau} = -\dfrac{1}{r^2}\left[a(aE-\ell) - \dfrac{(r^2+a^2)T}{\Delta}\right] \\ T = E(r^2+a^2) - \ell a \end{cases}$$

2つの保存量

$$E = -\frac{p_t}{m}$$

$$\ell = \frac{p_\phi}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad E_{\rm cm} = m\sqrt{2}\sqrt{1 - g_{\mu\nu}u^\mu_{(1)}u^\nu_{(2)}}$$

代入する

$$\left(E_{cm}^{Kerr}\right)^2 = \frac{2\,m_0^2}{r(r^2-2r+a^2)}\Big(2a^2(1+r)-2a(l_2+l_1)-l_2l_1(-2+r)+2(-1+r)r^2 - \sqrt{2(a-l_2)^2-l_2^2r+2r^2}\sqrt{2(a-l_1)^2-l_1^2r+2r^2}\Big)$$

Extremal なときに horizon では

$$E_{\rm cm}(r\to r_+) = \sqrt{2}m\sqrt{\frac{\ell_2-2}{\ell_1-2}+\frac{\ell_1-2}{\ell_2-2}}$$

例えば

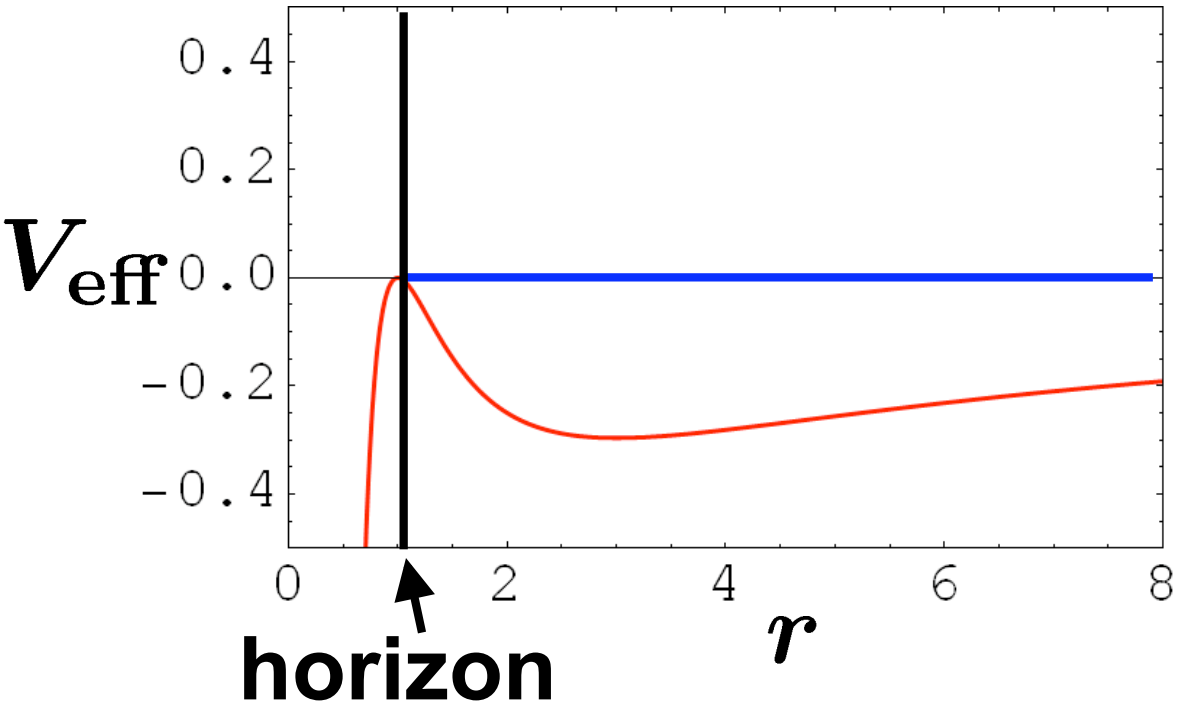
$\ell_1 = 2$

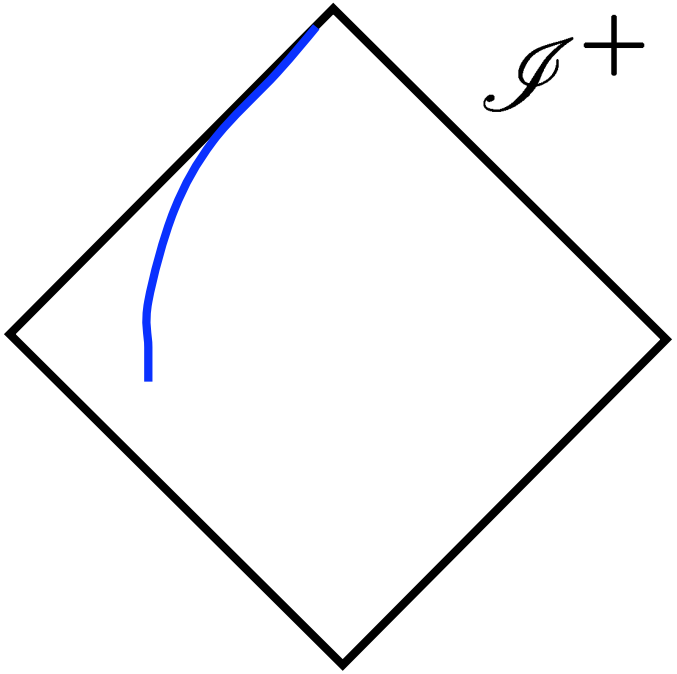
$\ell_2 = -2(1+\sqrt{2})$

で発散する!!　(Banados et. al. 2009)

なぜこのようなことが起きるのか？

実はExtremal Kerr BHでは $\ell = 2$ の軌道は horizon に漸近する





horizon はnull hyper surface なので

気持ちとしては粒子は “null” に漸近している

これは現実の宇宙で実現可能か？

→ 無理そうに思える

Berti et al (09)

Jacobson et al (09)

理由）

・そもそもextremal Kerr が実現しないのでは？

・バックリアクションを考慮すると無理に思える

(ただし具体的な計算で示されたわけではない)

BSWの結果 「任意に大きな $E_{\rm cm}$ を取れる」の相対論的な側面

$$E_{\rm cm}(r_+) = \sqrt{2} m_0 \sqrt{\frac{\ell_2 - 2}{\ell_1 - 2} + \frac{\ell_1 - 2}{\ell_2 - 2}}$$

- 任意に大きく出来るなら原理的には $E_{\rm cm} \sim M_{\rm Kerr}$ にも出来る
- 無限小の m_0 の粒子でも $E_{\rm cm} \sim M_{\rm Kerr}$ に出来る
- これのバックリアクションの影響は線形摂動では取り扱えそうにない 気がする

無限小の質量の粒子を用いて線形摂動では取り扱えない摂動を生み出せる ように思える

いずれにしても

・BSW効果による高エネルギー粒子衝突が
本当に可能かを知りたい

・相対論的な側面をより深く理解したい

テスト粒子近似 を超える議論が必要

“バックリアクション”を考慮

“バックリアクションで”考慮すべきこと

・重力波の効果

・粒子が点ではなく大きさを持つこと

・horizon の位置が変わる効果　etc

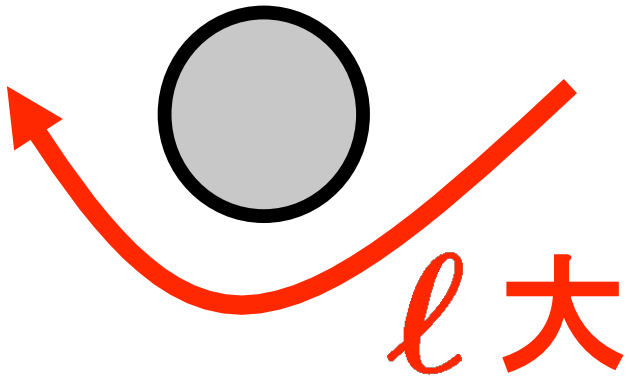
バックリアクションまで含めて考えたいが
Kerr バックグラウンドだと非常に難しい

より対称性の高い 球対称な荷電BH
(extreme Reissner-Nordstroem BH)
周りで同様の議論を行えないか？

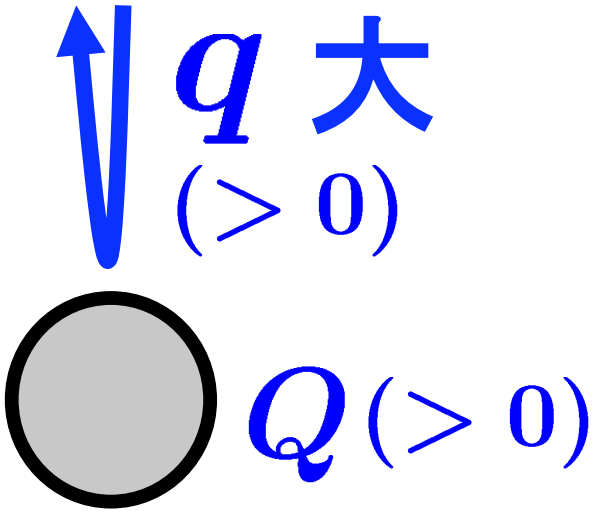
回転BHと荷電BHの対応の気持ち

[テスト粒子]

角運動量が
大きいと散乱



電荷が大きいと
斥力で散乱



[時空構造]

$a=M$ で極限BH $Q=M$ で極限BH

RN BH周りでの荷電粒子の運動/衝突

- metric $ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{S^2}$

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

- gauge 1-form $A_\mu dx^\mu = -\frac{Q}{r} dt$

- test charged particle の 運動

$$S = m \int d\tau + q \int A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau$$

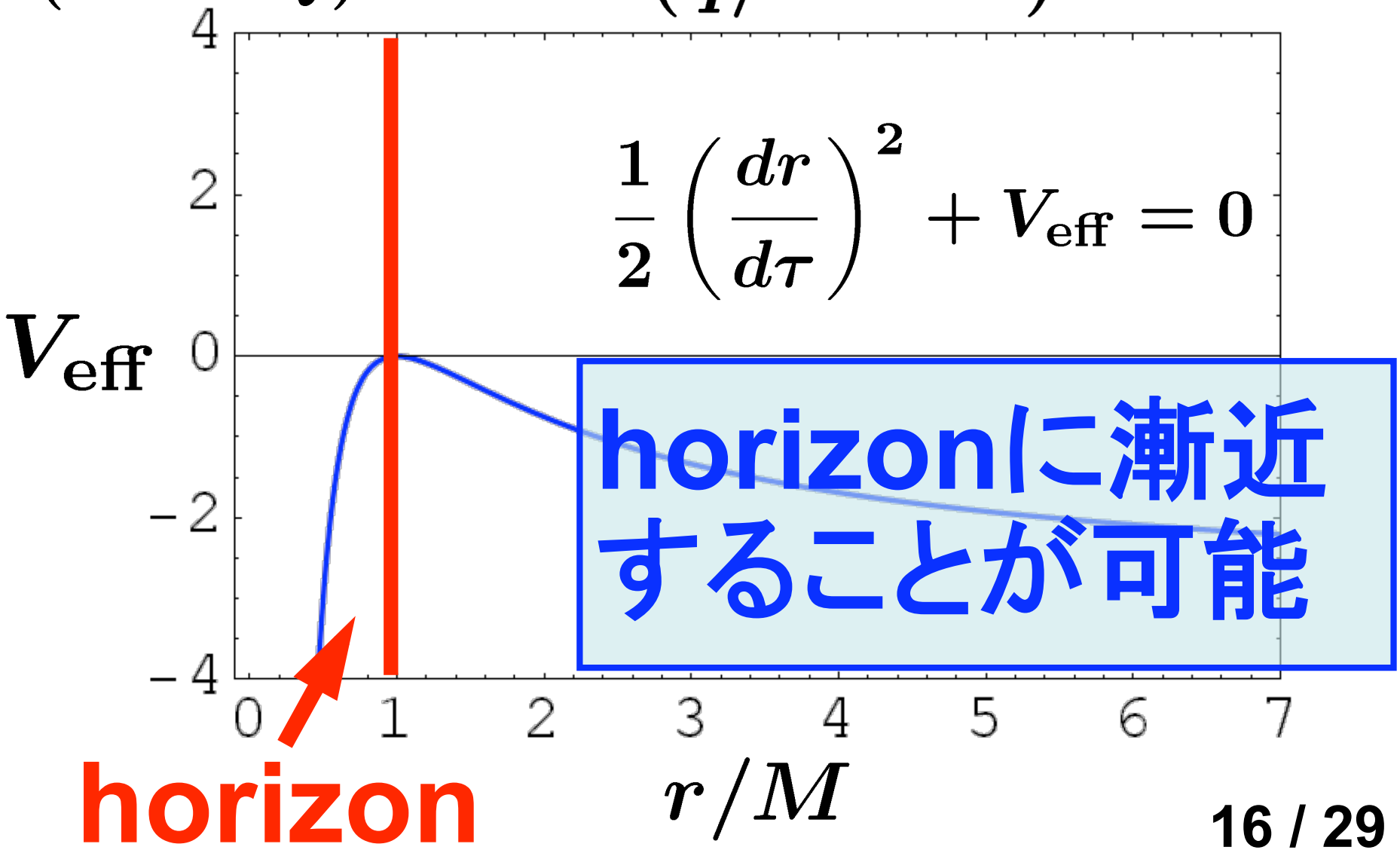
赤道面 $\theta = \pi/2$ に限って考えると

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\rm eff} = 0$$

$$V_{\rm eff} = -\left(E - \frac{qQ}{mr}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)$$

荷電BH周りの荷電粒子

$(M = Q)$ $(q/m = e)$



しかし，RN 周りの粒子のバックリアクション
の効果を取り扱うのも まだ 難しい

球対称 shell の衝突の問題になら
バックリアクション込みで厳密に解ける
ここから示唆を得たい

(test shell だと test particle
と同じ運動になる)

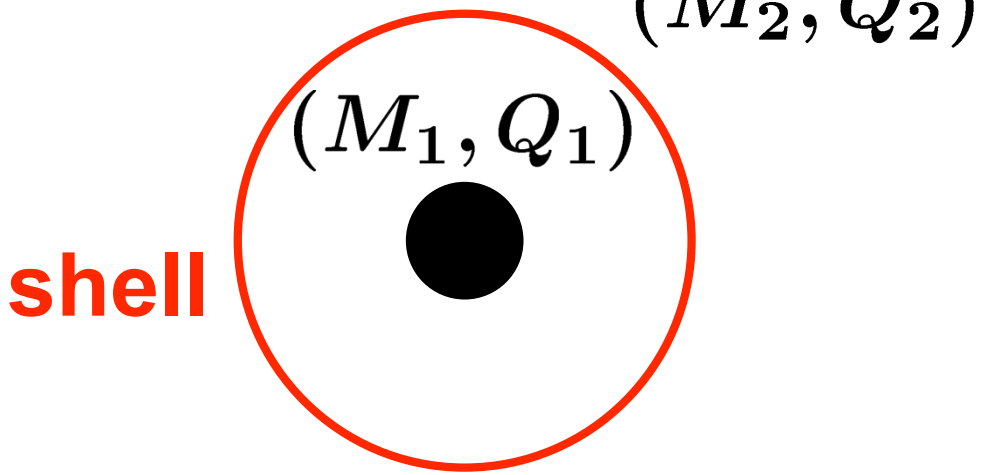
”バックリアクション”を
考慮した場合

Charged shell の運動

球対称 charged shell の場合 shell 以外
の部分は Birkhoff の定理よりRN 時空になる

$$ds^2 = -f_{(i)}dt^2_{(i)} + f^{-1}_{(i)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$f_{(i)} = 1 - \frac{2M_i}{r} + \frac{Q_i^2}{r^2}$$



charged dust shell を仮定すると

$$S^{\mu\nu} = \sigma u^\mu u^\nu$$

Einstein eq の $(n,)$ 成分か

$$\tilde{D^\mu} S_{\mu\nu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu := 4\pi\sigma r^2 = \text{const.}$$

(shell の固有質量一定)

球対称shell だと energy式は

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\Big[\delta K_{\mu\nu} - (Tr\delta K)h_{\mu\nu}\Big]$$

の (θ,θ) 成分だけから導出できる

・energy 式は

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \boxed{-\left(E-\frac{qQ}{\mu r}\right)^2+1-\frac{2\langle M\rangle}{r} +\frac{1}{r^2}\left[\langle Q\rangle^2+\left(\frac{\mu}{2}\right)^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]} = 0$$

V_{eff}

$$\left[\begin{array}{cc} E:=(M_2-M_1)/\mu & q:=Q_2-Q_1 \\ \langle M\rangle:=(M_2+M_1)/2 & \langle Q\rangle:=(Q_2+Q_1)/2 \end{array}\right]$$

test particle のときとほどんど同じ

$$V_{\mathrm{eff}}^{\text{test particle}} = -\left(E-\frac{qQ}{mr}\right)^2+1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}$$

漸近的に”null” に近づくような運動が
あるかどうかを考える

外側から見たときの horizon 以外の場所
に漸近しても明らかにnull にはならない

外側から見たときの仮想的な
horizon の場所 $r = M_2 + \sqrt{M_2^2 - Q_2^2}$
で $\partial_r V = 0$ と $V = 0$ が一致する条件を
課すと $Q_2 = M_2$, $\dfrac{1 - q^2}{2(E - q)} = M_2$ を得る

このとき effective potential は

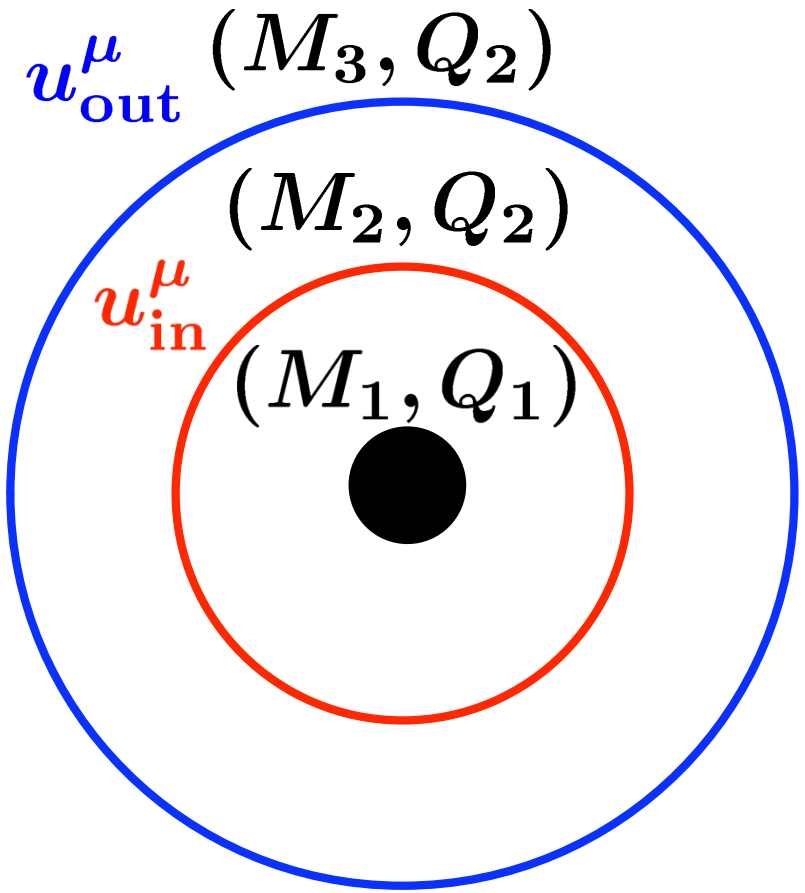
$$V_{\rm eff} = -(E^2 - 1)\frac{(r - M_2)^2}{r^2}$$

自己重力の効果も考慮しても
1枚のshell がnull に漸近することは可能

Charged shell の衝突

null に漸近するcharged shell

と中性のshell の衝突を考える (同じE)



$$E_{\rm cm} = \sqrt{2}\mu\sqrt{1 - g_{\mu\nu}u^\mu_{\rm in}u^\nu_{\rm out}}$$

へ代入し，2枚目のshell によるhorizon

$$r = M_3 + \sqrt{M_3^2 - Q_2^2}$$

で評価する

$$E_{\rm cm} = \sqrt{2}\mu\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{Y}{2\sqrt{(3E\mu + 2M_1)} + 2E\sqrt{\mu}}}$$

ここで

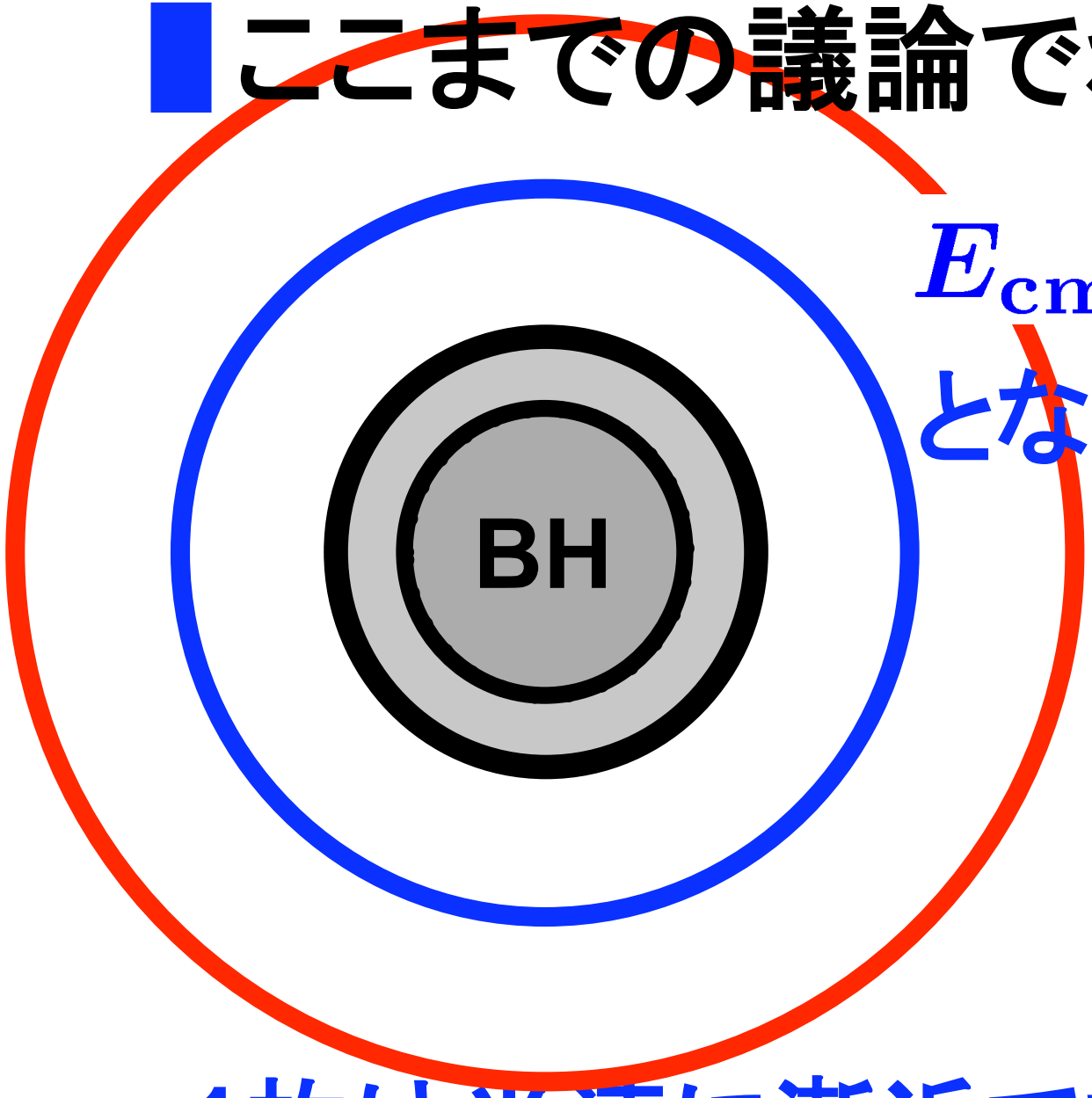
$$Y = \sqrt{E^2-1}\sqrt{2(E\mu + M_1) + 2(E-1)\left(\sqrt{E\mu(3E\mu + 2M_1)} + 2E\mu + M_1\right) + \mu}$$
$$\times\sqrt{-2(E\mu + M_1) + 2(E+1)\left(\sqrt{E\mu(3E\mu + 2M_1)} + 2E\mu + M_1\right) + \mu}$$
$$-E\left(2E\left(\sqrt{E\mu(3E\mu + 2M_1)} + 2E\mu + M_1\right) + \mu\right)$$

となり，発散しない

中心の BH のmass が大きい $(M_1 \gg \mu)$ ときには

$$E_{\rm cm} \simeq 2^{1/4}E^{1/4}\sqrt{E - \sqrt{E^2-1}}\ M_1^{1/4}\mu^{3/4}$$

ここまでの議論でわかったこと



$$E_{\rm cm} \sim M^{1/4}\mu^{3/4}$$

となり発散しない

1枚は光速に漸近できる が…

どれくらいの衝突が起きるのか？

- $M_1 \gg \mu$で$E \simeq 1$ のとき$E_{\rm cm} \simeq 2^{1/4} M_1^{1/4} \mu^{3/4}$
- shellの構成粒子の質量を m として
  1枚のshell の粒子数： $N = \mu/m$
- 構成粒子の center of mass energyは
  $E_{\rm cm}^{(\rm particle)} = E_{\rm cm}/N$

これらより

$$N \simeq 10^{-20} \left(\frac{m_{\rm pl} c^2}{E_{\rm cm}^{(\rm particle)}} \right)^4 \left(\frac{m}{m_{\rm proton}} \right)^3 \left(\frac{M_1}{M_\odot} \right)$$

<<1

$E_{\rm cm}^{(\rm particle)} \simeq m_{\rm pl} c^2$でshell の近似が悪くなる

では shell の近似が良い状況では
どこまで加速できるのか？

$$N \simeq 10^{-20} \left(\frac{m_{\rm pl} c^2}{E_{\rm cm}^{(\rm particle)}} \right)^4 \left(\frac{m}{m_{\rm proton}} \right)^3 \left(\frac{M_1}{M_\odot} \right)$$

$N \sim 1$ として $E_{\rm cm}^{(\rm particle)}$ について解くと

$$E_{\rm cm}^{(\rm particle)} \sim 10^{-5} m_{\rm pl} c^2$$

まとめ・議論

- テスト粒子近似の範囲ではBSW効果による
  高エネルギー粒子衝突が可能
- extremal RN 回りでも同様の現象が可能
- RN周りのshellの運動を考えてもnullに漸近可能
- 2体のshell の衝突を考えると $E_{\rm cm}$ は有限

- BSW効果には(おそらく)エルゴ領域は重要
  ではない　(エルゴ領域のない荷電BHでも
  同様の加速機構があるため)

kimukimuojisan

Thank you for listening