定常パルサー磁気圏の数値的解析手法について

京都大学基礎物理学研究所　　大川博督

YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

共同研究者
大阪市立大学数学研究所　　孝森洋介
京都大学天体核研究室　　高本亮
京都大学基礎物理学研究所　　諏訪雄大

目次

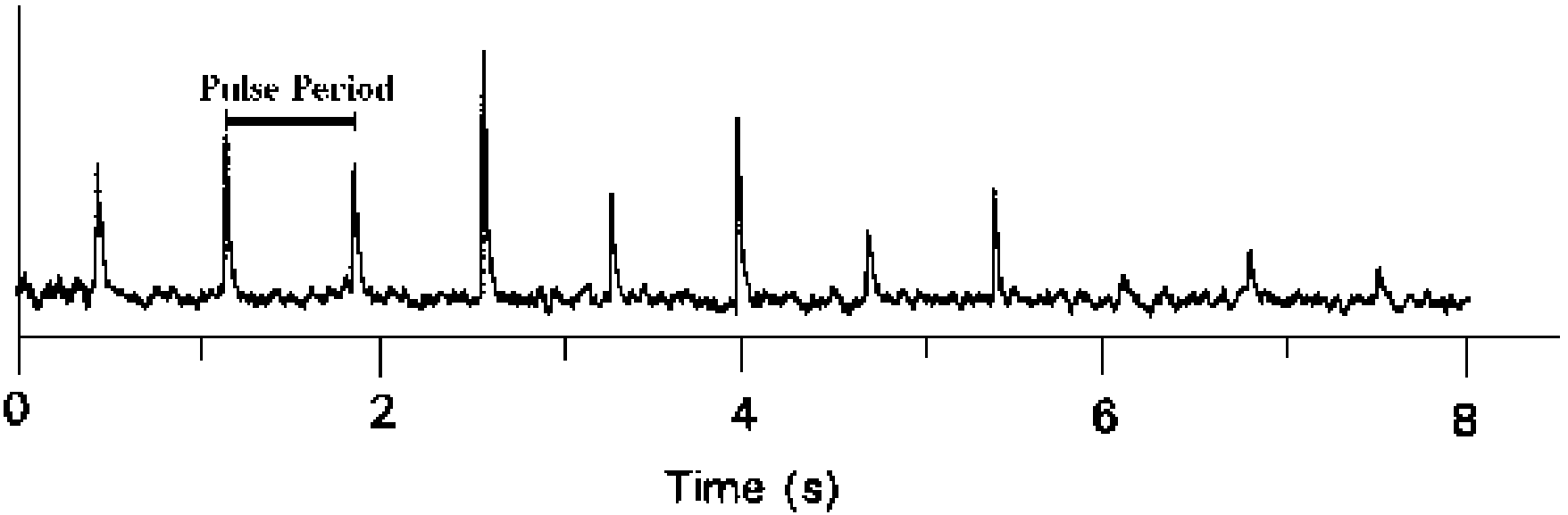
- 導入
- パルサー方程式
- パルサー方程式の別の解き方
- 得られた結果
- まとめ

導入

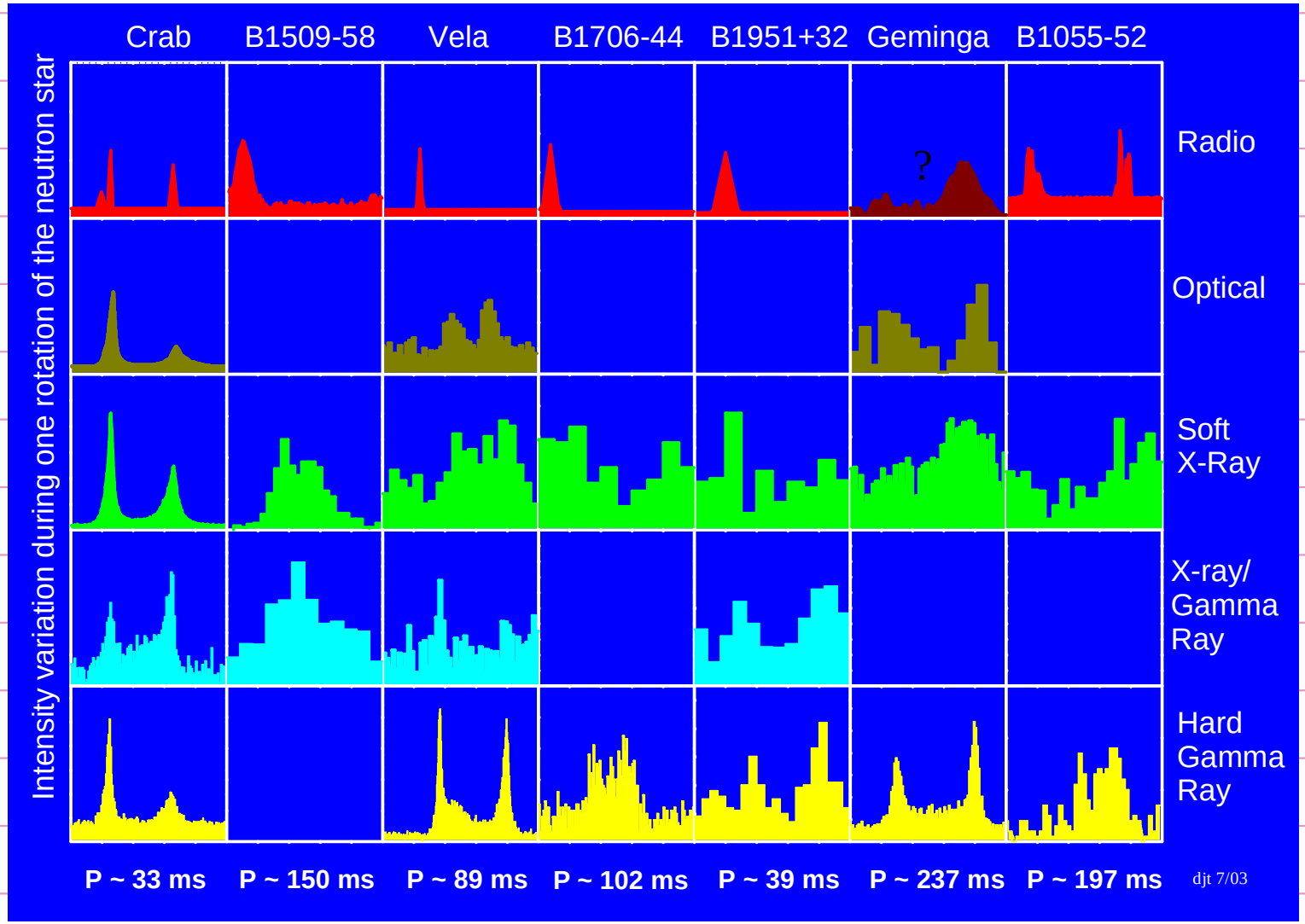
パルサーの発見

- ミリ秒〜秒の規則的な周期で電磁波を放出する天体。
- 1967 年、電波で発見された (Hewish and Bell+,1968)。
- パルス幅から、放射領域を推定。
  その正体は磁場を伴って高速回転する中性子星と推測される。

- 現在までに 2000 個程度観測されている。



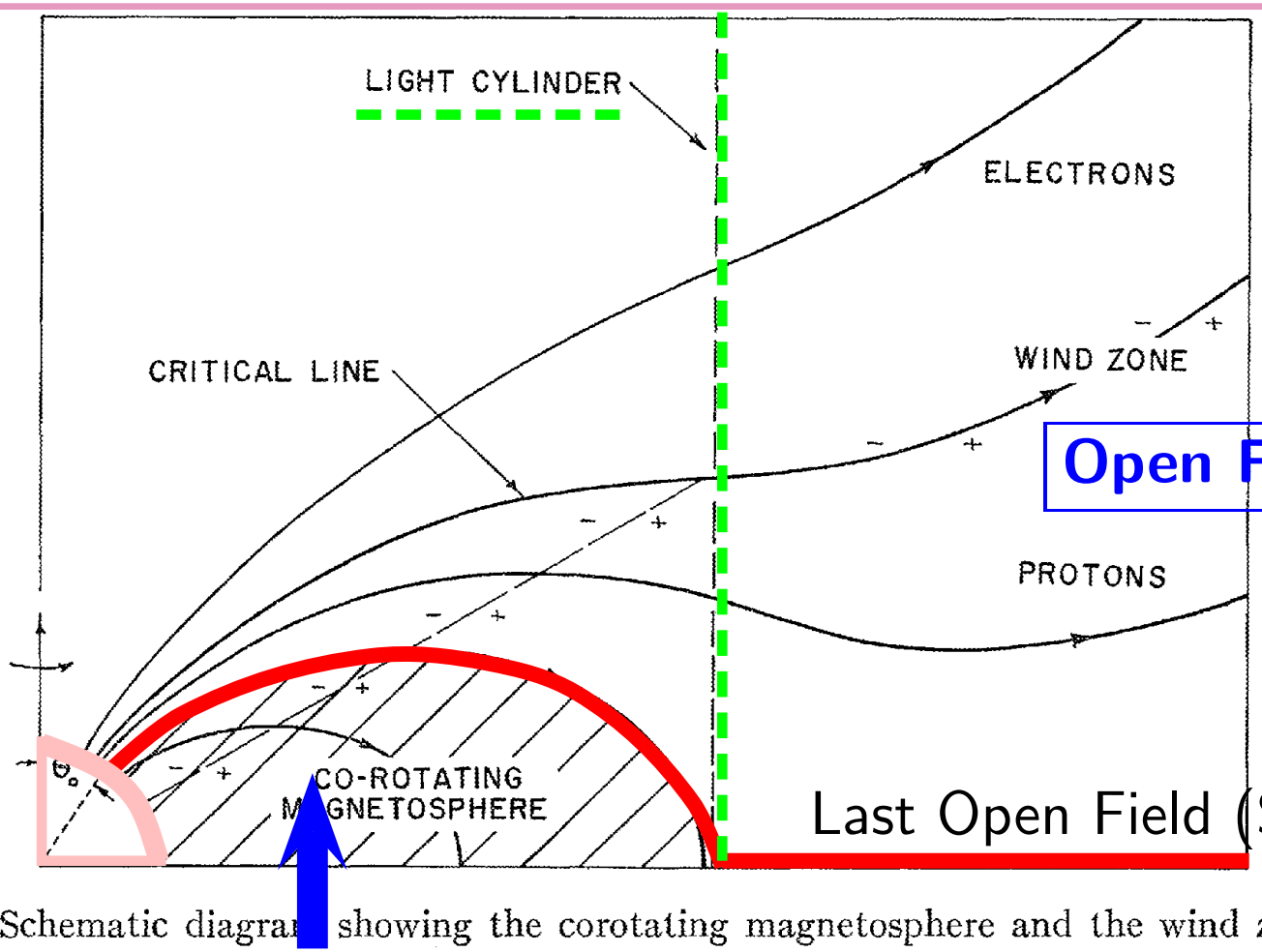
いろいろな波長での観測



Thompson(2003)

- 強磁場を伴い高速回転する中性子星
- パルサーの放射機構は完全には理解されていない？

パルサー磁気圏想像図



回転軸

中性子星

Open Field Zone

Last Open Field (Separatrix)

Closed Field Zone

FIG. 1.—Schematic diagram showing the corotating magnetosphere and the wind zone. Star is at lower left.

Goldreich and Julian (1969)

- 磁場とプラズマの運動について両方考える必要がある。
- 以下、まずは簡単な定常問題を考える。

パルサー方程式

パルサー方程式の導出

目的：プラズマで満たされた大域的な磁気圏を構成する。

- 定常 $(\partial_t = 0)$
- 軸対称 (R, ϕ, z),$(\partial_\phi = 0)$
- Force-Free 条件
  - プラズマのエネルギー $\ll$ 電磁場のエネルギー
  - $F_{\mu\nu} J^\mu = 0$ (共変形式)
  - $\rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = 0$

マクスウェル方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J} \quad (4)$$

$$\vec{E} = -\frac{\Omega_F(\Psi)}{2\pi}\vec{\nabla}\Psi \quad (5)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\nabla}\Psi \times \vec{e}_\phi}{2\pi R} + \frac{2I_P(\Psi)}{R}\vec{e}_\phi \quad (6)$$

@ $\Psi(R, z)$：磁束

@ $\Omega_F(\Psi)$：磁場の角速度
(パルサーの自転速度)

@ $I_P(\Psi)$：ポロイダル電流

パルサー方程式 (Grad-Shafranov 方程式)

ガウスの法則	$-\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\Omega_F}{2\pi}\vec{\nabla}\Psi\right)=4\pi\rho_e$
アンペールの法則	$-R\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\vec{\nabla}\Psi}{2\pi R^2}\right)=4\pi J_T$
Force-Free 条件	$R\Omega_F\rho_e+\dfrac{2I_PI'_P}{R}=J_T$

ただし、$J_T\equiv\vec{J}\cdot\vec{e}_\phi$ かつ $I'_P\equiv\dfrac{\mathrm{d}I_P}{\mathrm{d}\Psi}$、さらに $\Omega_F=const.$ とする。

$$\left(1-R^2\Omega_F^2\right)\left(\partial_R^2\Psi-\frac{1}{R}\partial_R\Psi+\partial_z^2\Psi\right)-2R\Omega_F^2\partial_R\Psi+16\pi^2I_PI'_P=0$$

パルサー方程式
Grad-Shafranov(GS) 方程式

- 楕円型非線形微分方程式
- 境界値問題
- Light Cylinder(LC) が特異面 ($R\Omega_F=1$)

CKF 法

(Contopoulos, Kazanas and Fendt, 1999)

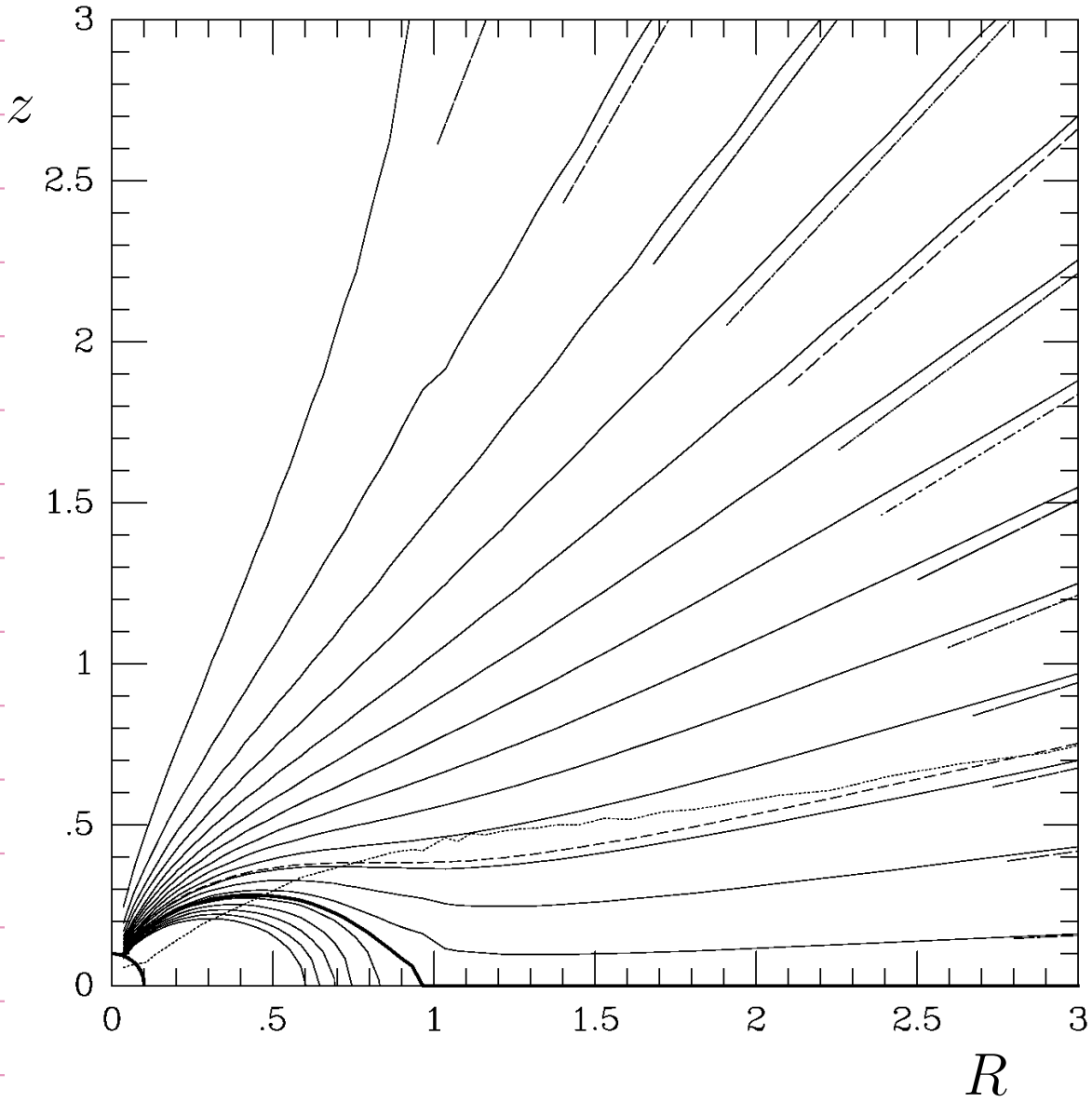
$$\left(1-R^2\Omega_F^2\right)\left(\partial_R^2\Psi-\frac{1}{R}\partial_R\Psi+\partial_z^2\Psi\right)-2R\Omega_F^2\partial_R\Psi+16\pi^2 I_P I_P'=0 \quad (7)$$

$$-2R\Omega_F^2\partial_R\Psi|_{R=R_{LC}}+16\pi^2 I_P I_P'|_{R=R_{LC}}=0 \quad (8)$$

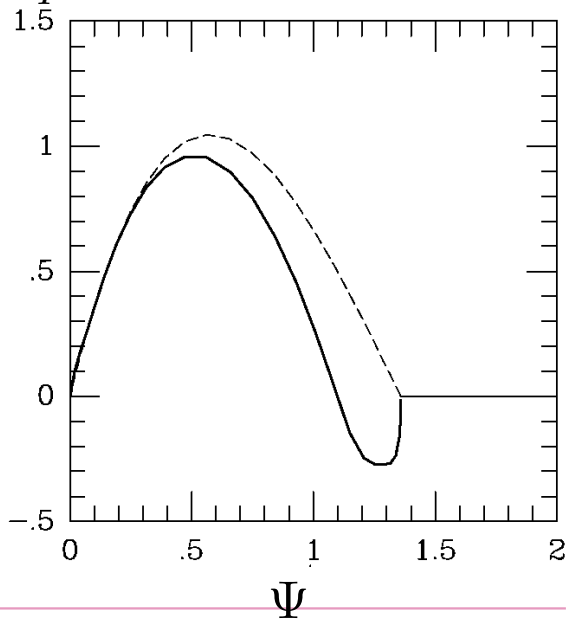
(8) 式を LC における電流分布を決める式と捉える。

1. 適当な電流分布を仮定する。
2. GS 方程式 (7) に従って、LC より内側と外側の領域で別々に解を求める。
3. (8) 式に従い、LC 内外で解いた $\Psi_\pm$ を用いて電流分布を求める。
4. LC 内外で別々に解くため、必ずしも収束する保証は無いが、2. に戻り、解が滑らかになるまでイテレーションを行なう。

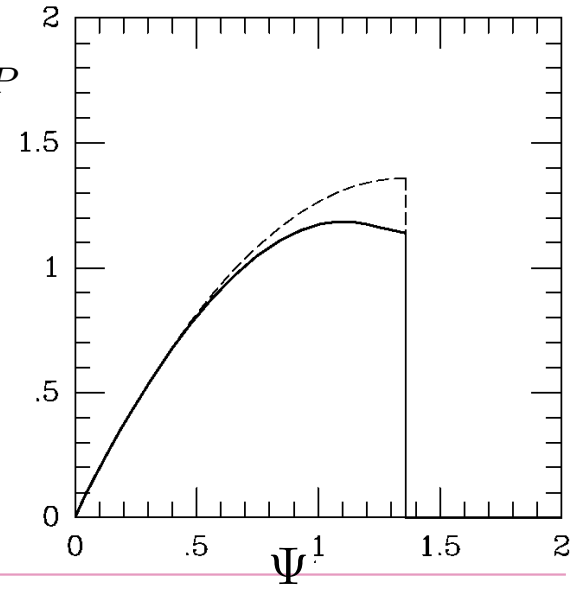
CKF 解



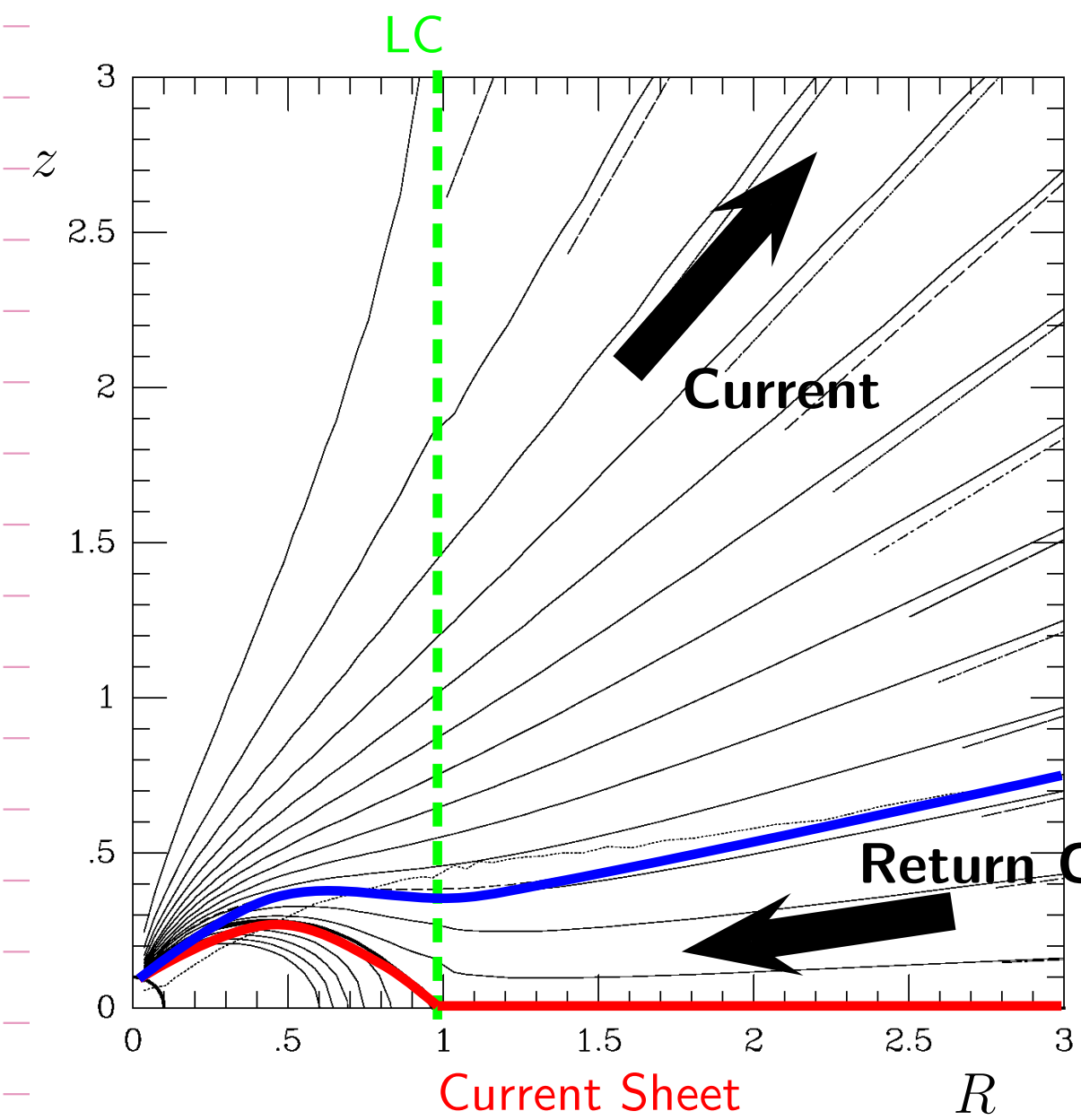
$16\pi^2 I_P I'_P$

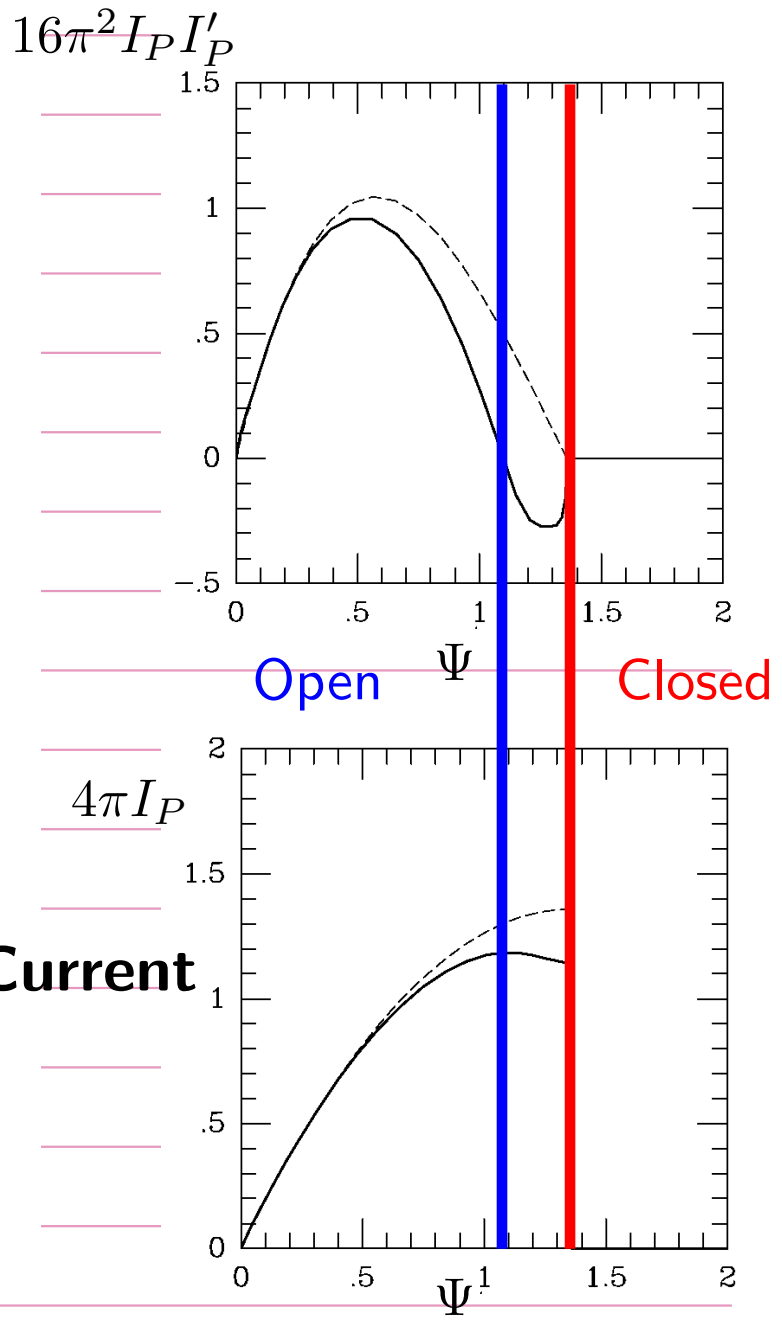


$4\pi I_P$



CKF 解





＝ トロイダル磁場が不連続

CKF 解のまとめ

- CKF 法では、LC を越えて滑らかな解が求められる。
- CKF 解には、current sheet がある。
  Ogura and Kojima(2003),Gruzinov(2005),Timokhin(2006)
- Dynamical simulation(MHD,FF) で、CKF 解 (らしきもの) ができた。
  Komissarov(2006),McKinney(2006)
  CKF 解は唯一解か？
- Y-point(separatrix と赤道の交差点) が LC 上にある current sheet は非物理的である。(current sheet では current を返せない。)
  Uzdensky(2003)
- Y-point は LC に近い方が電磁場の全エネルギーが小さい。
  Timokhin(2006)

パルサー方程式の別の解き方

新しい数値計算手法

Numerical Study of Stationary Pulsar Magnetospheres with Fixed Poloidal Current

Takamori,HO,Takamoto and Suwa(2012) in prep.

- ポロイダル電流 $I_P(\Psi)$ を固定し、LC で滑らかな解を得る数値計算手法を考案した。
- その結果、current sheet 無しの解も構成することができた。
- 得られた解について、その性質を調べた。

パルサー方程式の分解

$$\partial_R^2\Psi - \frac{1}{R}\partial_R\Psi + \partial_z^2\Psi = -8\pi^2 R J_{\rm T} \quad (9)$$

$$R^2\Omega_{\rm F}^2\left(\partial_R^2\Psi - \frac{1}{R}\partial_R\Psi + \partial_z^2\Psi\right) + 2R\Omega_{\rm F}^2\partial_R\Psi - 16\pi^2 I_{\rm P} I'_{\rm P} = -8\pi^2 R J_{\rm T} \quad (10)$$

$J_T(R,z)$ はトロイダル電流密度。
(9) 式は、アンペールの法則、(10) 式は Force-Free 条件。

「磁束 Ψ に関して、独立に解ける楕円型の方程式が２つある」と見ることもできる。

２つの楕円型方程式を満たす (Ψ, J_T) の組を見つける問題と捉える。

ポロイダル電流 $I_P(\Psi)$ が固定できる。

トロイダル電流の与え方

$$\partial_R^2\Psi - \frac{1}{R}\partial_R\Psi + \partial_z^2\Psi = -8\pi^2 R J_{\rm T} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} J_{\rm Tnew}(R,z) &= \left\{\frac{1+\tanh(\eta D)}{2}J_{\rm Tin}(R,z) + \frac{1-\tanh(\eta D)}{2}J_{\rm Tout}(R,z)\right\}\left\{1-{\rm e}^{-D^2/(2\sigma^2)}\right\} \\ &\quad + J_{\rm TLC}(R_{\rm LC},z){\rm e}^{-D^2/(2\sigma^2)}, \end{aligned} \tag{12}$$

$D \equiv 1 - R^2\Omega_F^2$、$\eta, \sigma$ は混ぜ合わせの適当な係数。

$$J_{\rm Tin}(R,z) = \frac{8\pi^2(1+R^2\Omega_{\rm F}^2)J_{\rm Ttrial}(R,z) - 2\Omega_{\rm F}^2\partial_R\Psi + 16\pi^2 R^{-1} I_{\rm P} I'_{\rm P}}{16\pi^2}, \tag{13}$$

$$J_{\rm Tout}(R,z) = \frac{16\pi^2 J_{\rm Ttrial}(R,z) + 2\Omega_{\rm F}^2\partial_R\Psi - 16\pi^2 R^{-1} I_{\rm P} I'_{\rm P}}{8\pi^2(1+R^2\Omega_{\rm F}^2)}, \tag{14}$$

$$J_{\rm TLC}(R_{\rm LC},z) = \frac{-2\Omega_{\rm F}^2\partial_R^2\Psi + 16\pi^2 R^{-2}\left\{R\left({I'_{\rm P}}^2 + I_{\rm P}I''_{\rm P}\right)\partial_R\Psi - I_{\rm P}I'_{\rm P}\right\}}{-16\pi^2 R\Omega_{\rm F}^2}. \tag{15}$$

トライアル電流で (11) 式を解き、得られた Ψ から電流 J_{Tnew} を計算し、再び (11) 式を解く。イテレーションで収束するまで。

ポロイダル電流の与え方

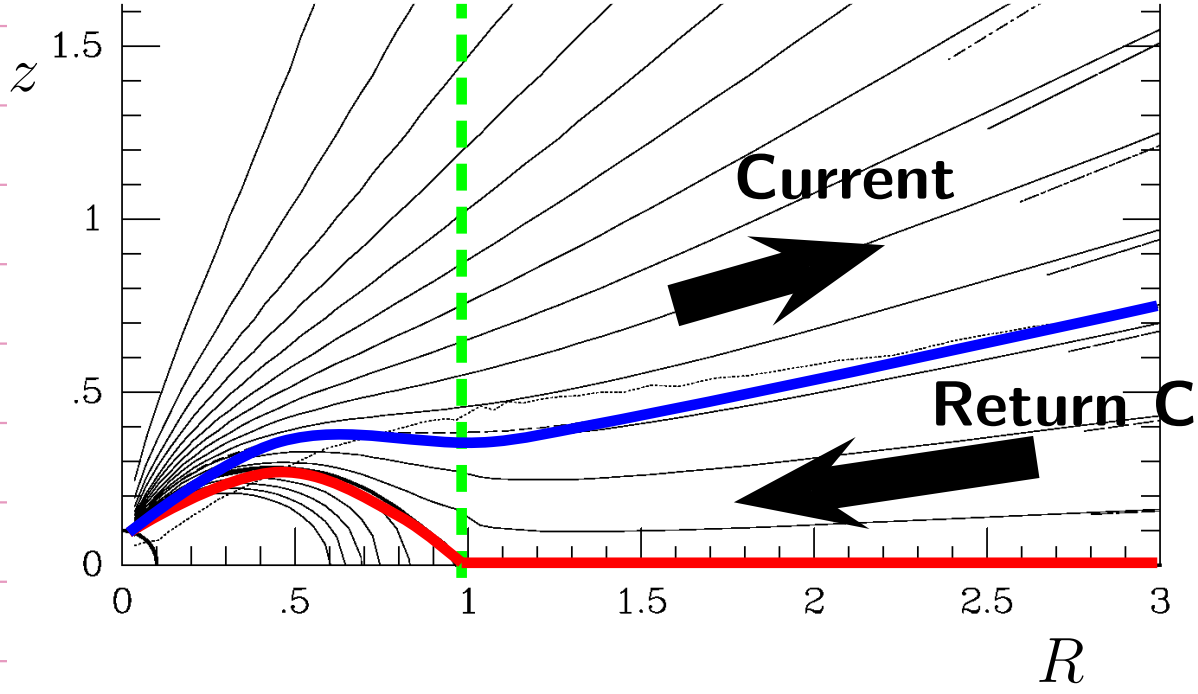
$$16\pi^2 I_P I'_P = 16\pi^2 A^2 \Psi \left(\Psi - \Psi_{ret}\right)\left(\Psi - \Psi_{op}\right) \quad \text{for } 0 \le \Psi \le \Psi_{op}$$

$$= 0 \qquad \text{for } \Psi > \Psi_{op}$$

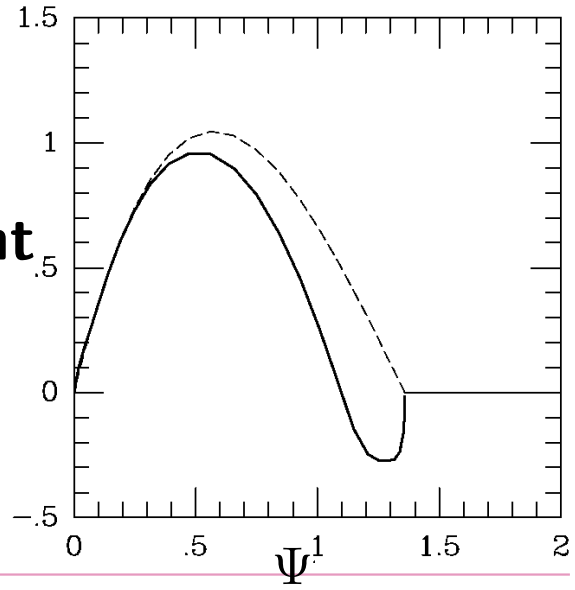
$I_P I'_P$ の関数系を

3 次関数でモデル化

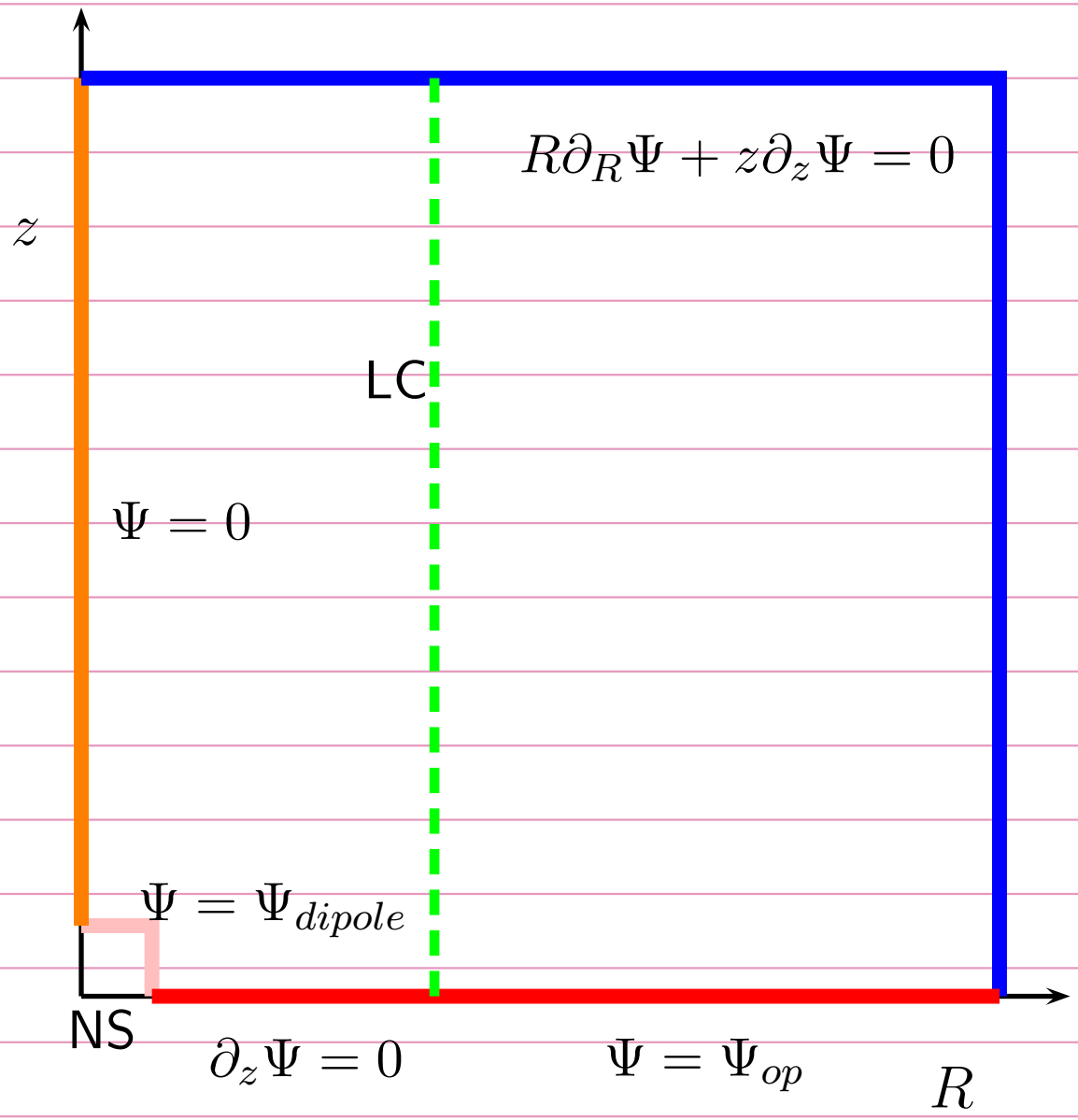
与える定数は３つ $(A, \Psi_{op}, \Psi_{ret})$



$16\pi^2 I_P I'_P$



数値計算領域と境界条件



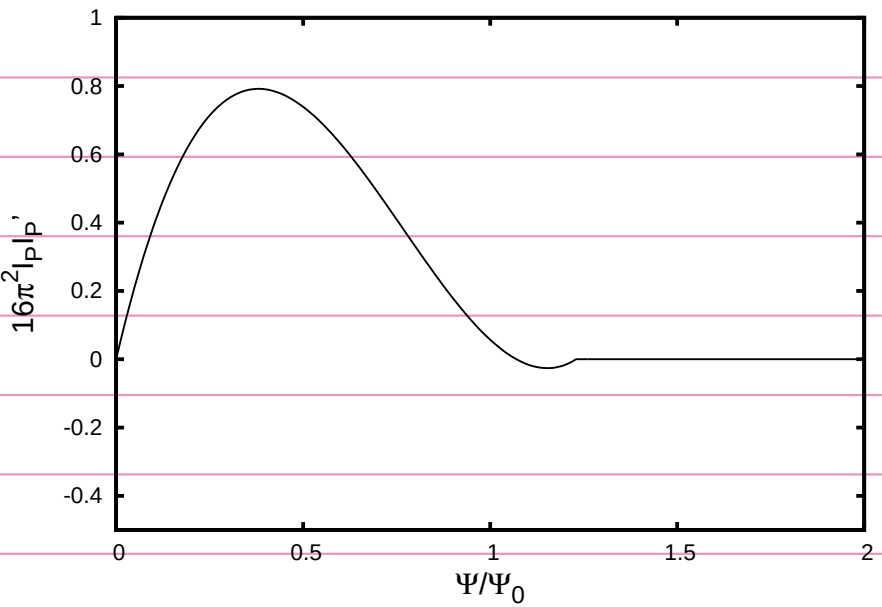
Timokhin(2006) と同じ境界条件

- z 軸 : $\Psi = 0$
- 星表面 :
  $\Psi = \Psi_{dipole}$
  $= \frac{mR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$
- 遠方（有限領域） :
  $R\partial_R\Psi + z\partial_z\Psi = 0$
- 赤道 :
  $\partial_z\Psi = 0$ for $R < R_{LC}$
  $\Psi = \Psi_{op}$ for $R \geq R_{LC}$

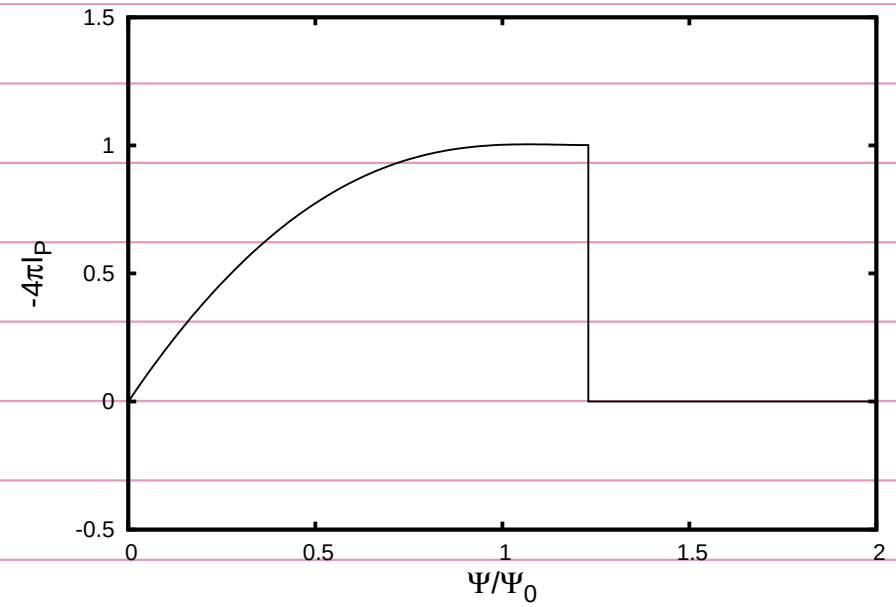
得られた結果

Current Sheet あり (パラメータ)

$16\pi^2 I_P I'_P$



$4\pi I_P$



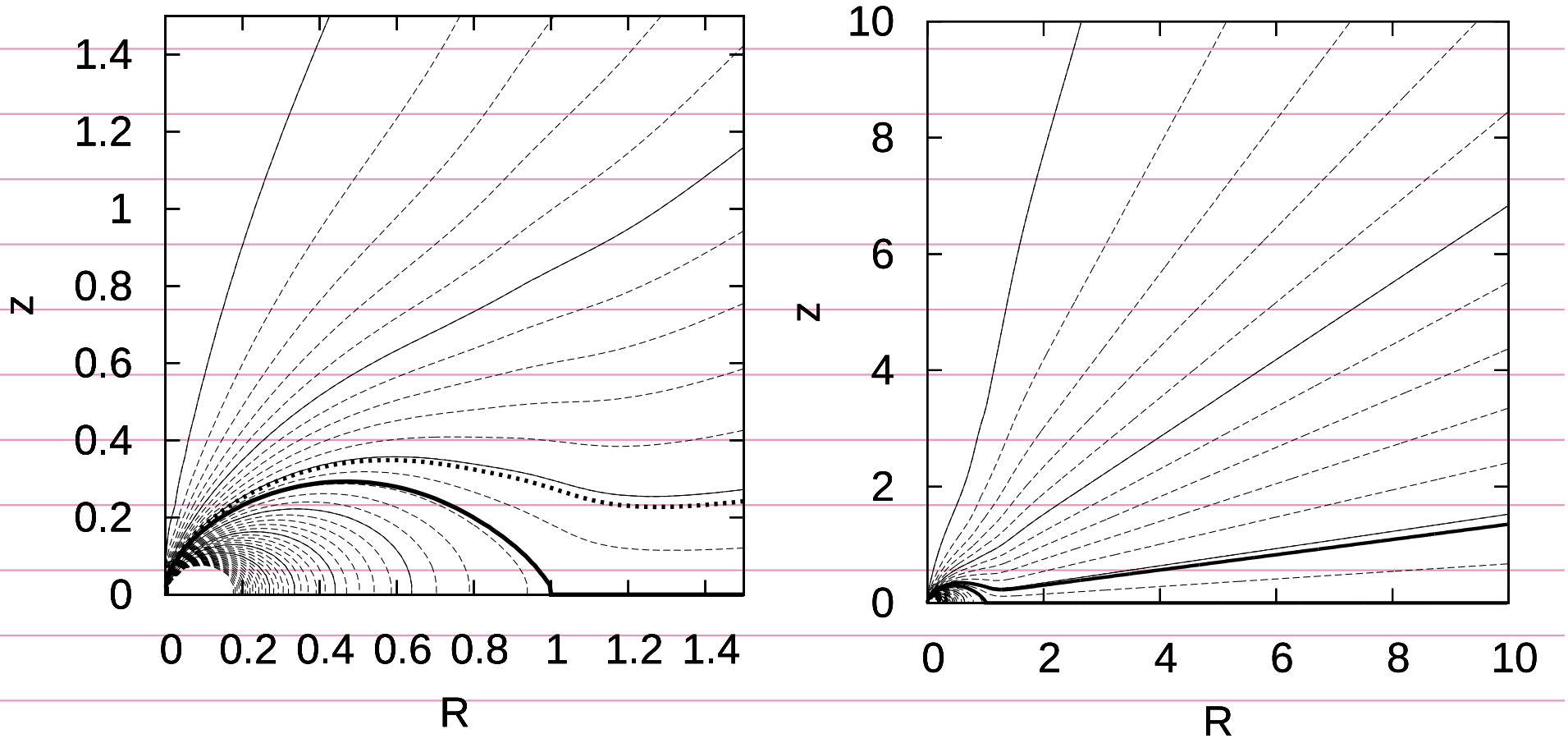
$$16\pi^2 I_P I'_P = 16\pi^2 A^2 \Psi \left(\Psi - \Psi_{ret}\right)\left(\Psi - \Psi_{op}\right)$$

$$A = 0.15\Omega_F \Psi_0^{-1}、\ \Psi_{ret} = 1.07\Psi_0、\ \Psi_{op} = 1.23\Psi_0、$$
$$\Psi_0 = m/R_{LC}$$

パラメータの数値はTimokhin(2006)を参考にした。

Current Sheet あり (磁力線図)

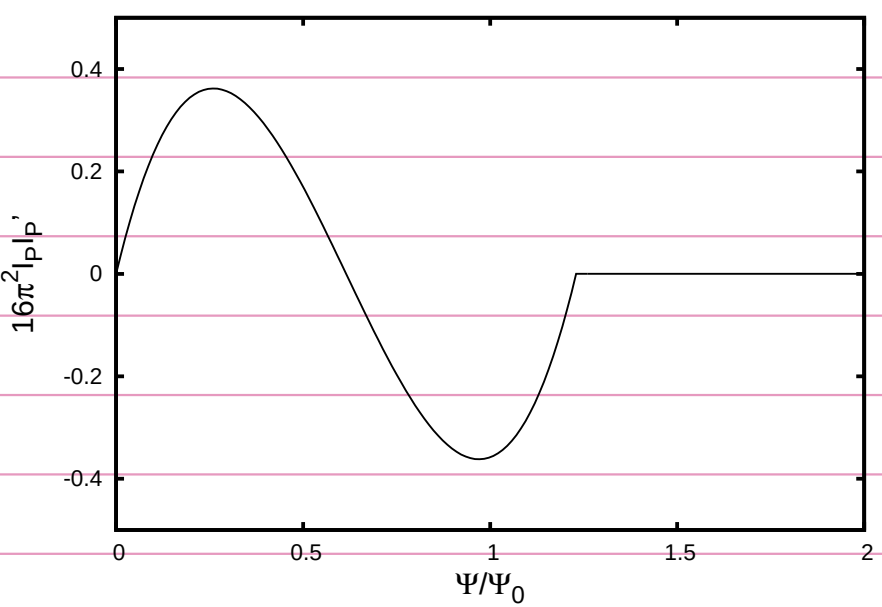
$10R_{LC} \times 10R_{LC}$ を 400×400 の解像度で計算。
星表面は、$(R, z) = (0.05R_{LC}, 0.05R_{LC})$ とした。
(半径 10km, 周期 4msec のパルサーを想定)



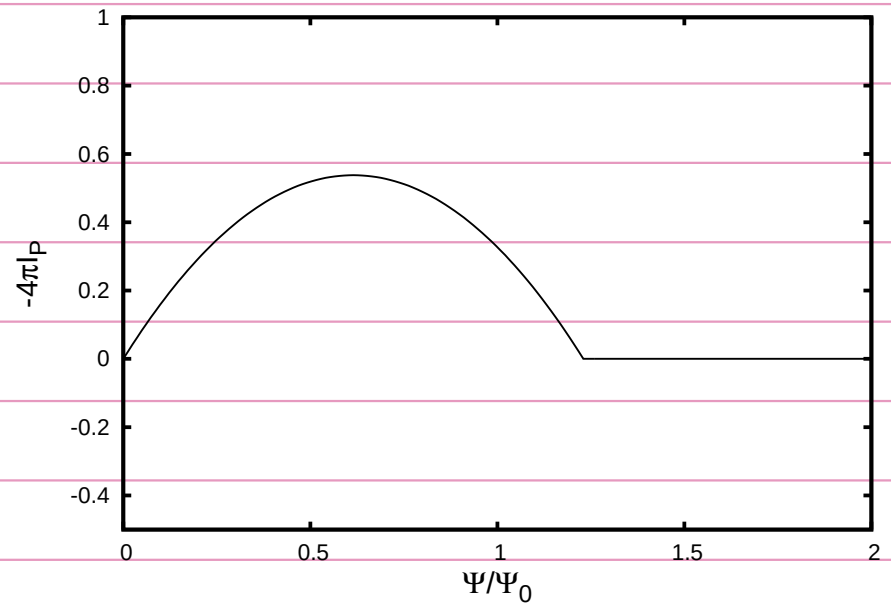
Current Sheet ありの解も、CKF 法と同様に得られる。
磁気圏の構造は CKF 解とあまり変わらない。

Current Sheet なし (パラメータ)

$16\pi^2 I_P I'_P$



$4\pi I_P$



$$16\pi^2 I_P I'_P = 16\pi^2 A^2 \Psi \left(\Psi - \Psi_{ret}\right)\left(\Psi - \Psi_{op}\right)$$

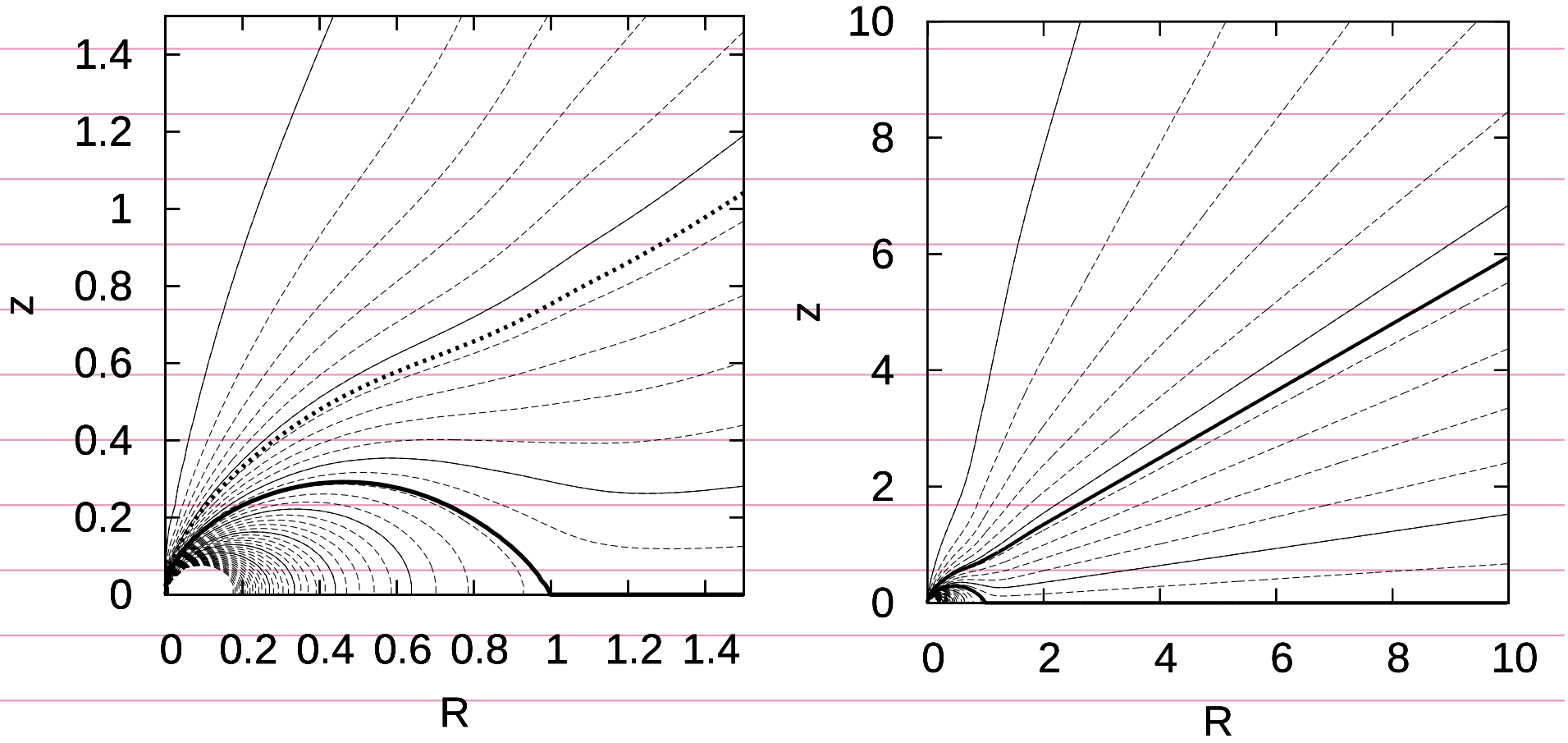
$A = 0.16\Omega_F \Psi_0^{-1}$、 $\Psi_{ret} = 1.07\Psi_0$、 $\Psi_{op} = 1.23\Psi_0$、

$$\Psi_0 = m/R_{LC}$$

パラメータの数値は Timokhin(2006) と比較して決めた。

Current Sheet なし (磁力線図)

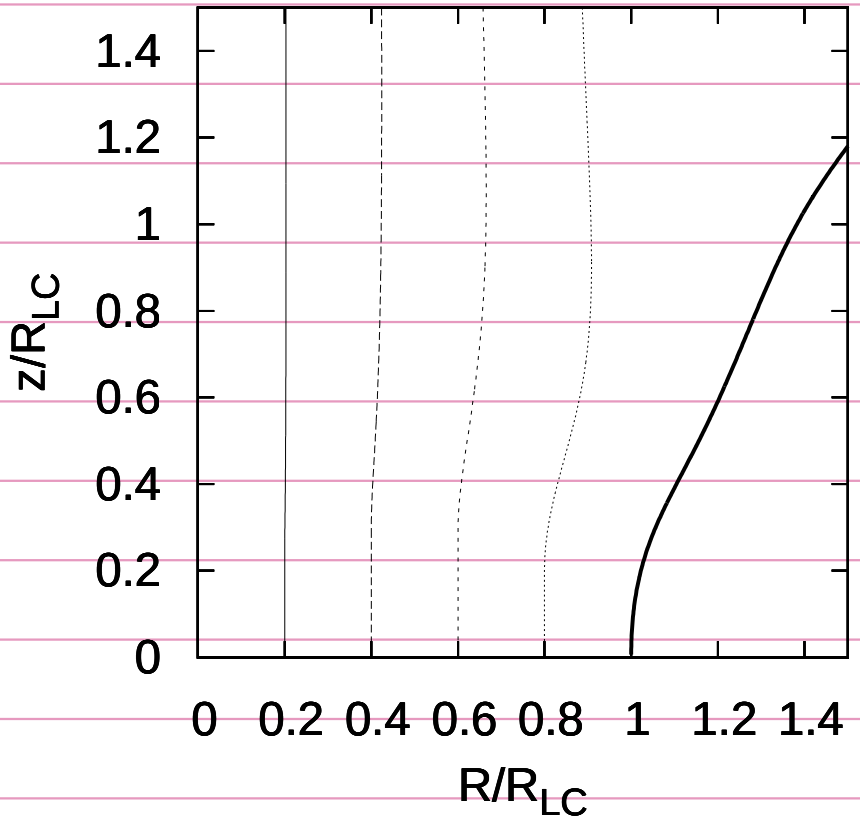
$10R_{LC} \times 10R_{LC}$ を 400×400 の解像度で計算。
星表面は、$(R, z) = (0.05R_{LC}, 0.05R_{LC})$ とした。
(半径 10km, 周期 4msec のパルサーを想定)

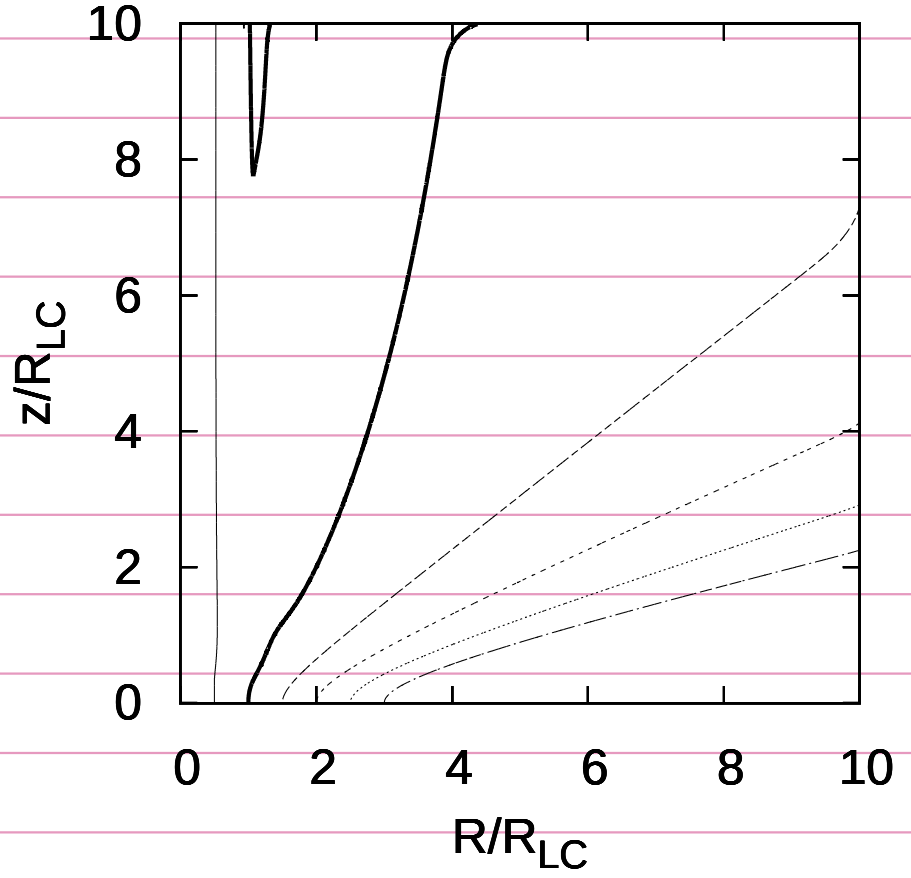


Current Sheet なしの解も、得られる。
磁気圏の構造は Current Sheet ありとあまり変わらない。

解の性質 (Drift velocity)

$$v_d = \frac{R\Omega_F}{\sqrt{1 + \frac{(4\pi I_P)^2}{(\partial_R \Psi)^2 + (\partial_z \Psi)^2}}} \qquad v_d < 1 \quad \longrightarrow B^2 - E^2 > 0$$





Uzdensky(2003) のような楔形の $E \geq B$ 領域ができている。
(Force-Free 条件の破れ)

解の性質 (全エネルギー)

電磁場の全エネルギーを各モデルごとに計算した。$\mathcal{E} = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int \left(E^2 + B^2\right) \mathrm{d}V$

Model 1 : Current Sheet なし、Model 2 : Current Sheet あり、
Model 3 : Current Sheet 以外の return current なし。
Model 1 を基準としたときの電磁場の全エネルギーの比。

$(R_{\max}, z_{\max}) = (10R_{\mathrm{LC}}, 10R_{\mathrm{LC}})$

	Model 1	Model 2	Model 3
$0.075R_{\mathrm{LC}} < (R,z) < 2.5R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.0064720	1.0087052
$0.2R_{\mathrm{LC}} < (R,z) < 5.0R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.2043113	1.2799323
$0 < (R,z) < 10R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.0009015	1.0012351

$(R_{\max}, z_{\max}) = (15R_{\mathrm{LC}}, 15R_{\mathrm{LC}})$

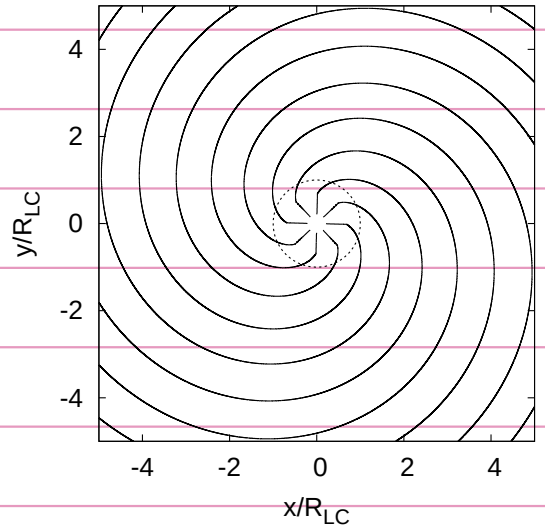
	Model 1	Model 2	Model 3
$0.075R_{\mathrm{LC}} < (R,z) < 2.5R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.0064720	1.0087052
$0.2R_{\mathrm{LC}} < (R,z) < 5.0R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.2043113	1.2799323
$0 < (R,z) < 15R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.0013428	1.0018402

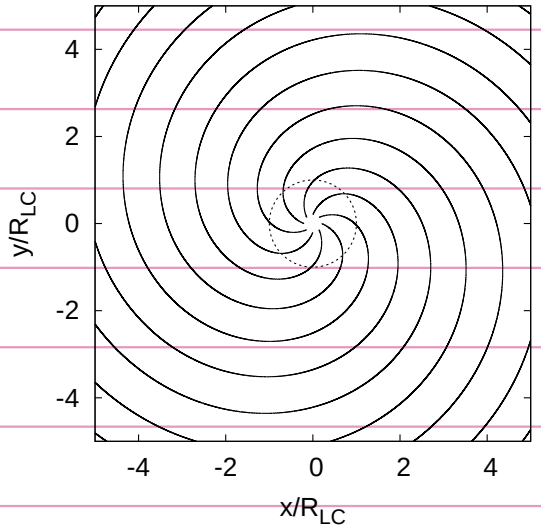
$(R_{\max}, z_{\max}) = (20R_{\mathrm{LC}}, 20R_{\mathrm{LC}})$

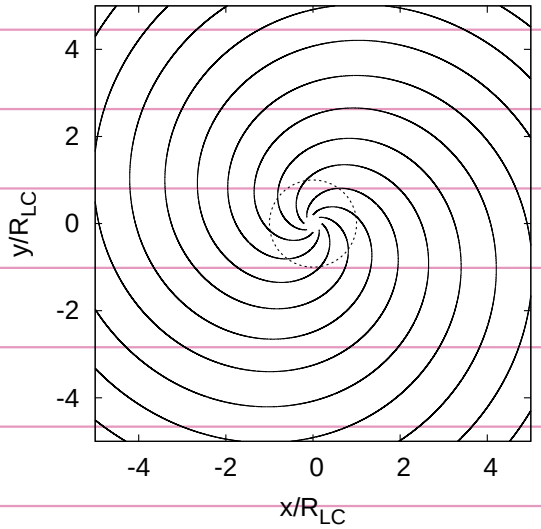
	Model 1	Model 2	Model 3
$0.075R_{\mathrm{LC}} < (R,z) < 2.5R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.0064720	1.0087052
$0.2R_{\mathrm{LC}} < (R,z) < 5.0R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.2043113	1.2799323
$0 < (R,z) < 20R_{\mathrm{LC}}$	1.0000000	1.0017802	1.0024400

解の性質（3 次元磁場構造）

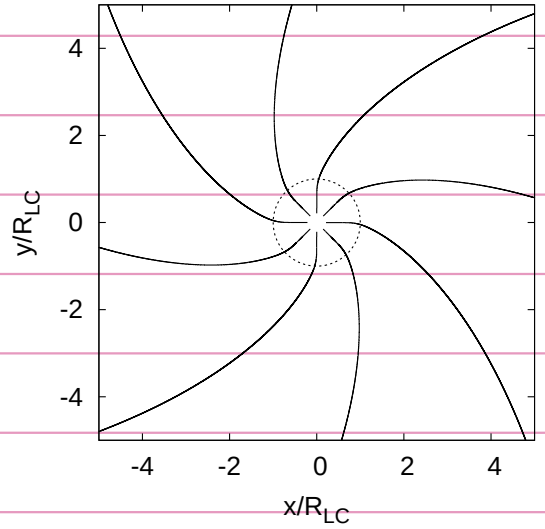
Current Sheet あり



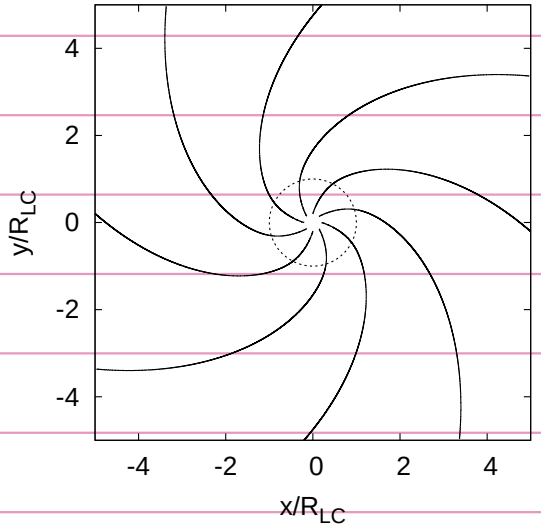




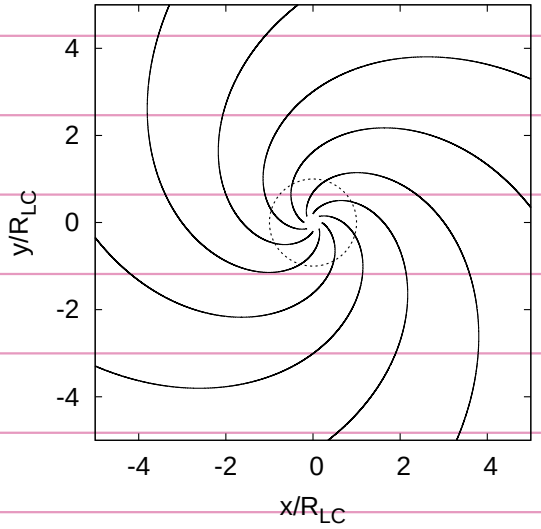
$z = 0.25R_{LC}$



$z = 0.5R_{LC}$

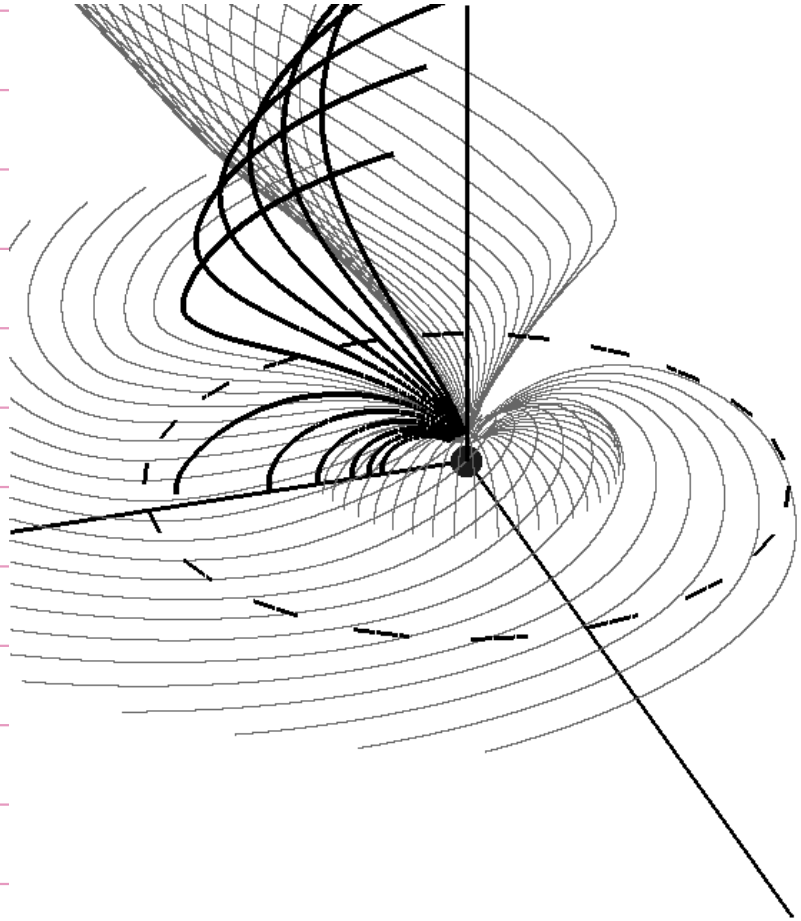


$z = 1.0R_{LC}$

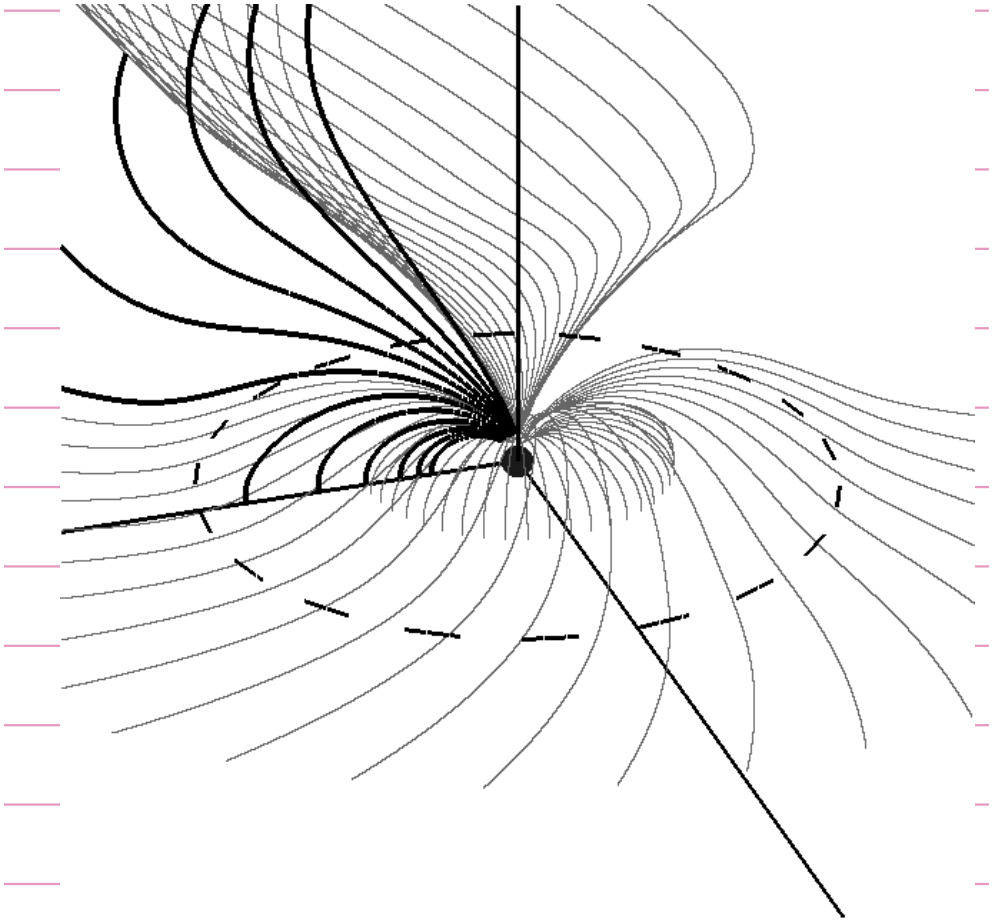


Current Sheet なし

解の性質（3 次元磁場構造）



Current Sheet あり



Current Sheet なし

まとめ

- ポロイダル電流を固定して定常パルサー磁気圏を構成できる手法を開発した。この手法で、CKF 法では得られていない Current Sheet のない大域的な定常磁気圏を構成することができた。
- 解を求められるポロイダル電流には、ある程度制限があるが、ある程度パラメータには自由度がある。
  (CKF 解が唯一解ではなさそう)
- Current Sheet なしの解がエネルギーとしては小さい。

@ プラズマの運動入りへの拡張 (MHD 領域)

@ 磁場の角速度一定を外す (BH 磁気圏への応用)

SOR 法

- ポアソン方程式 $\triangle\phi = S$
- 1 次元ポアソン方程式 $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = S$
- 1 次元ポアソン方程式の 2 次精度差分式

$$S = \frac{\phi^n_{j+1} + \phi^n_{j-1} - 2\phi^n_j}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi^{n+1}_j = \frac{1}{2}\left(\phi^n_{j+1} + \phi^n_{j-1} - (\Delta x)^2 S\right)$$

- 3 次元ガウス法

$$\phi^{n+1}_{j,k,l} = \frac{1}{6}\left(\phi^n_{j+1,k,l} + \phi^n_{j-1,k,l} + \phi^n_{j,k+1,l} + \phi^n_{j,k-1,l} + \phi^n_{j,k,l+1} + \phi^n_{j,k,l-1} - (\Delta h)^2 S\right)$$

- 3 次元 SOR 法

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}_{j,k,l} &= \phi^n_{j,k,l} \\ &+ \frac{w}{6}\left(\phi^n_{j+1,k,l} + \phi^n_{j-1,k,l} + \phi^n_{j,k+1,l} + \phi^n_{j,k-1,l} + \phi^n_{j,k,l+1} + \phi^n_{j,k,l-1} - (\Delta h)^2 S - 6\phi^n_{j,k,l}\right)\end{aligned}$$

電流反転法

とりあえず１次元問題を解いてみると、、、

電流反転法

とりあえず 1 次元問題を解いてみると、、、解けない。。。

$$\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R}\partial_R \Psi = -8\pi^2 R J_{\rm T} \tag{16}$$

$$R^2 \Omega_{\rm F}^2 \left(\partial_R^2 \Psi + \frac{1}{R}\partial_R \Psi \right) = -8\pi^2 R J_{\rm T} + 16\pi^2 I_{\rm P} I'_{\rm P} \tag{17}$$

$$\partial_t^2 \Psi + \alpha \partial_t \Psi + \beta = 0 \tag{18}$$

- 摩擦項を含む方程式と見なすと、誤差があっても t の増加に対して decaying mode となる。
- R の増加に対して、片方の方程式は誤差が growing mode となってしまう (高本 Conjecture)。

解く方程式を変える、もしくは、電流の与え方を変える。