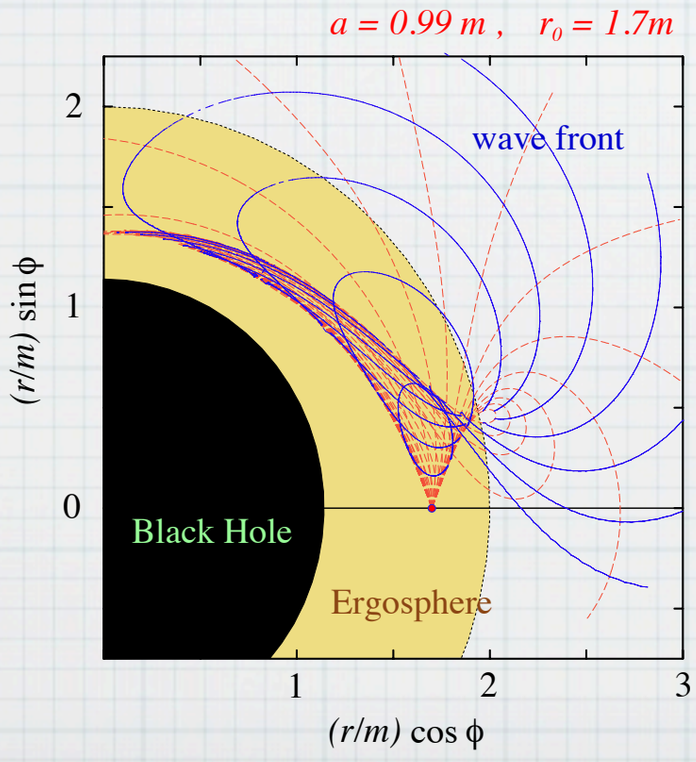
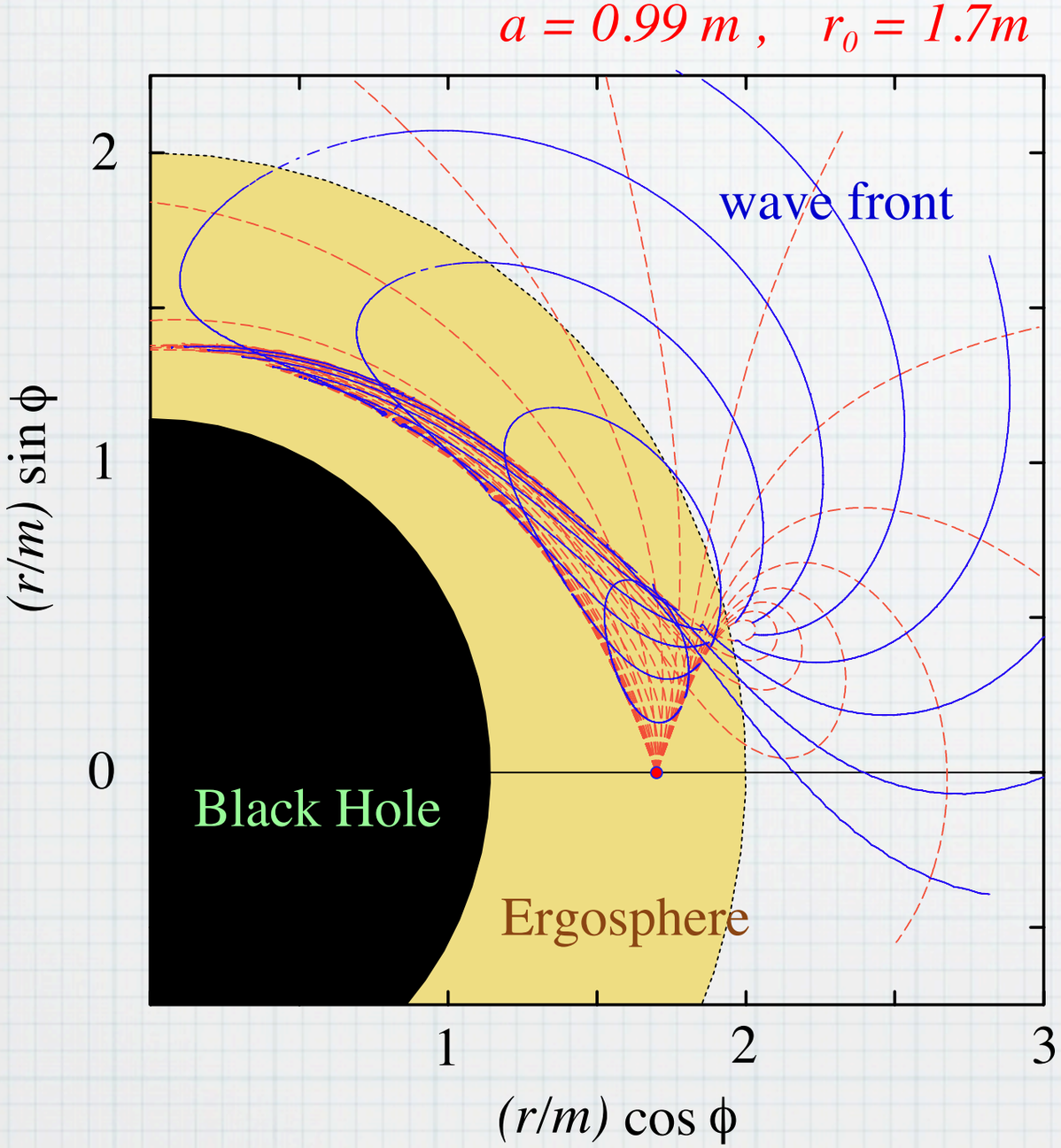
# 回転ブラックホールからのエネルギー引き抜き機構

高橋 真聡（愛教大）




* Penrose process
* Superradiance radiation
* Blandford-Znajek process

# Ergosphere




**Space-time dragging effect by rotating black hole**

**Negative potential region**

**→ “Penrose process”**

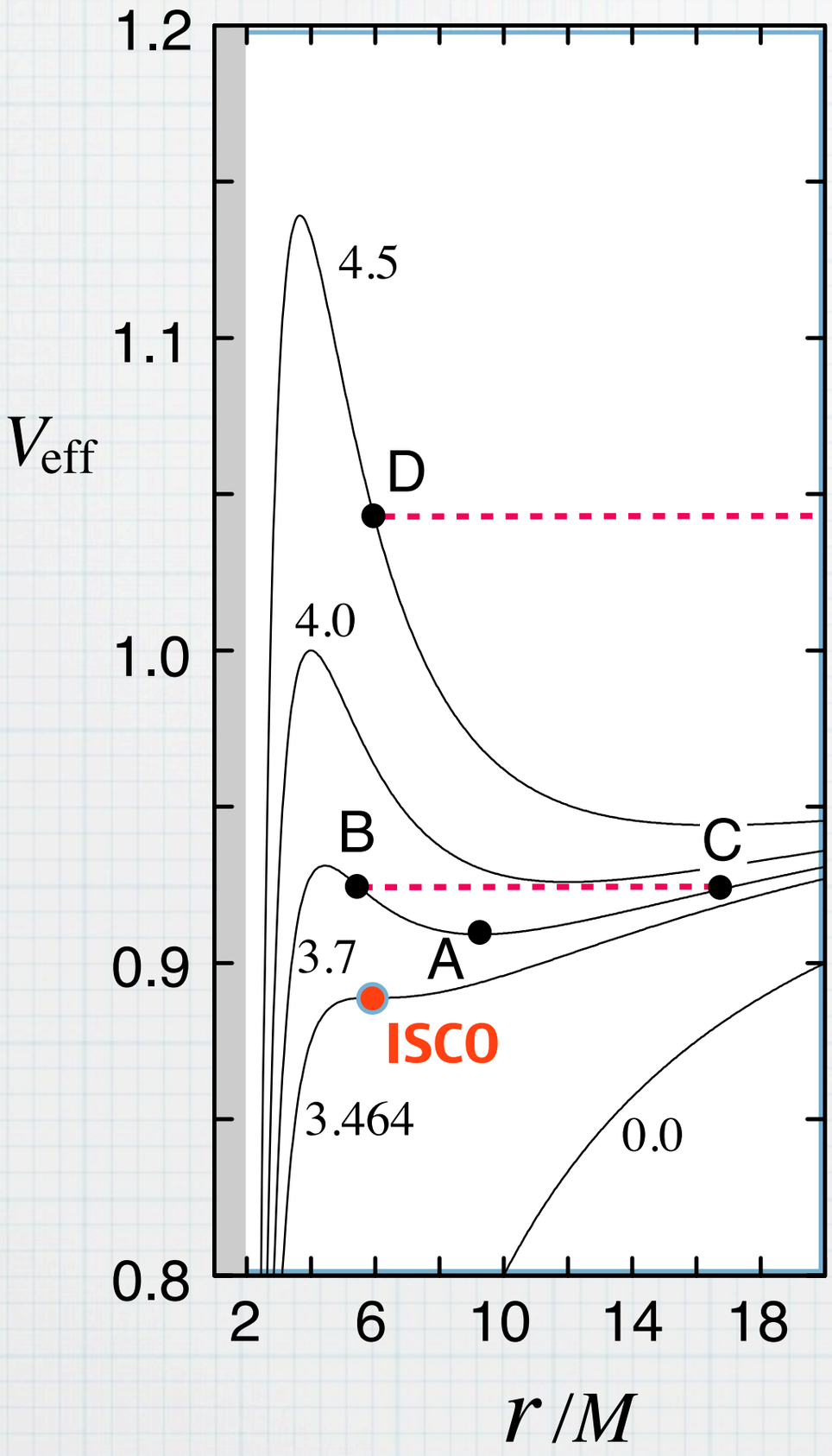
Magnetic field lines are also dragged near the horizon.

**Energy extraction due to magnetic torque:**

**“Blandford-Znajek process “**

# Penrose Process

# Magnetic Penrose Process




# Effective Potential

## シュバルツシルド・ブラックホール

動径方向の運動方程式より

$$m^2\dot{r}^2 = E^2 - V(r)$$

$$V(r) \equiv \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(m^2+\frac{L^2}{r^2}\right)$$

**A** ：円軌道

**B-C**：楕円的軌道

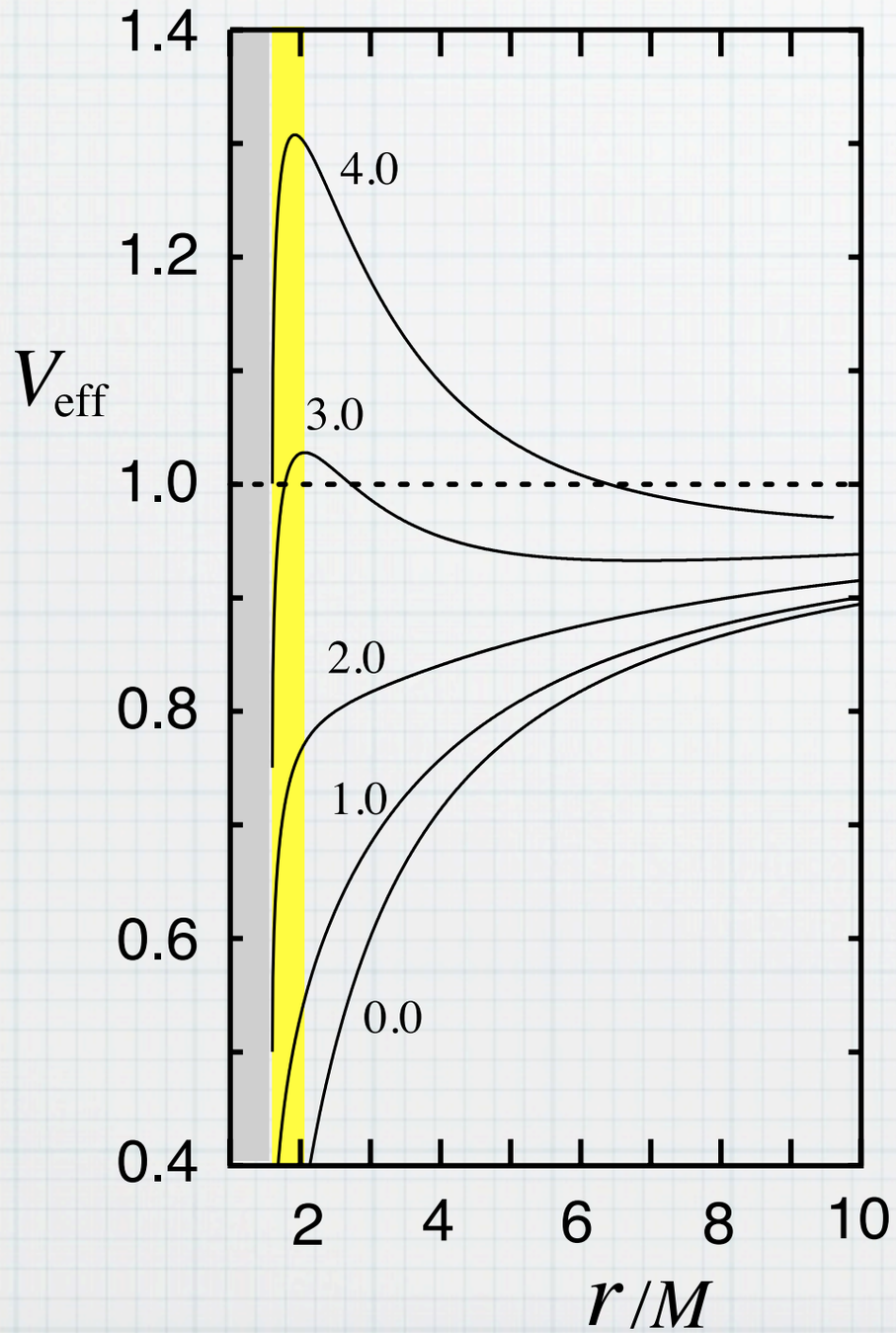
**D-** ：放物的軌道

**ISCO**：inner most stable circular orbit

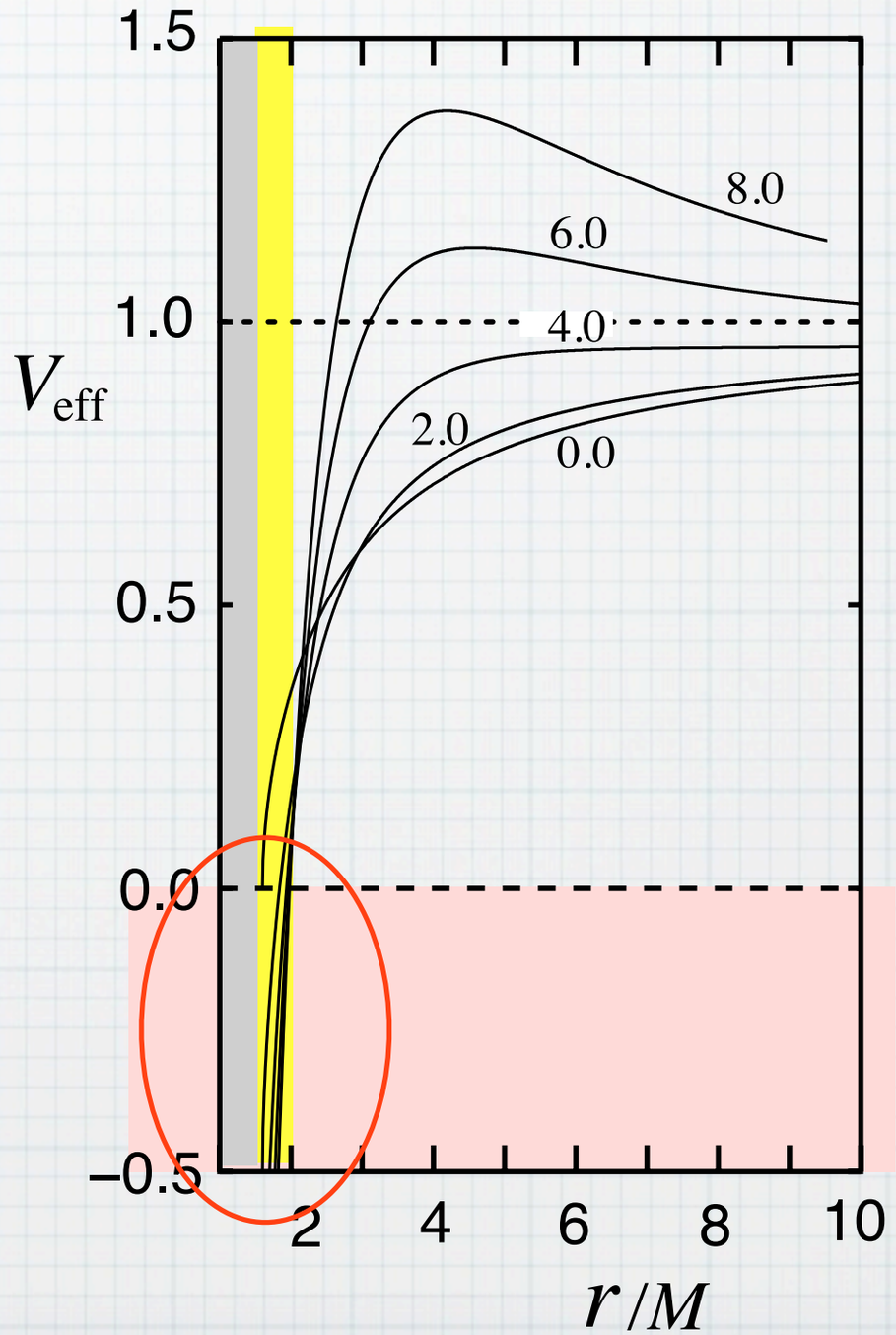
# Effective Potential

## カー・ブラックホール

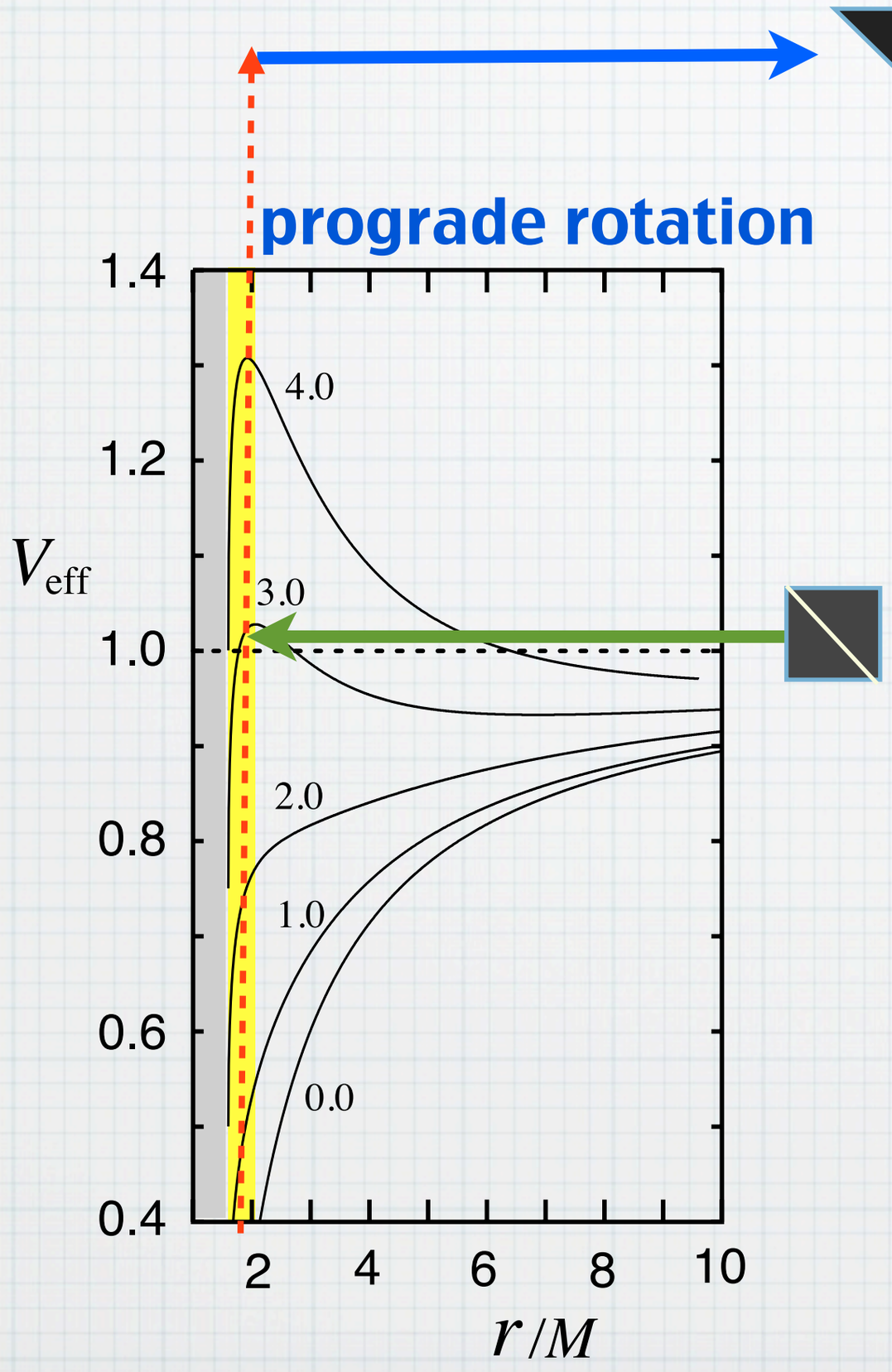
### 順回転の粒子

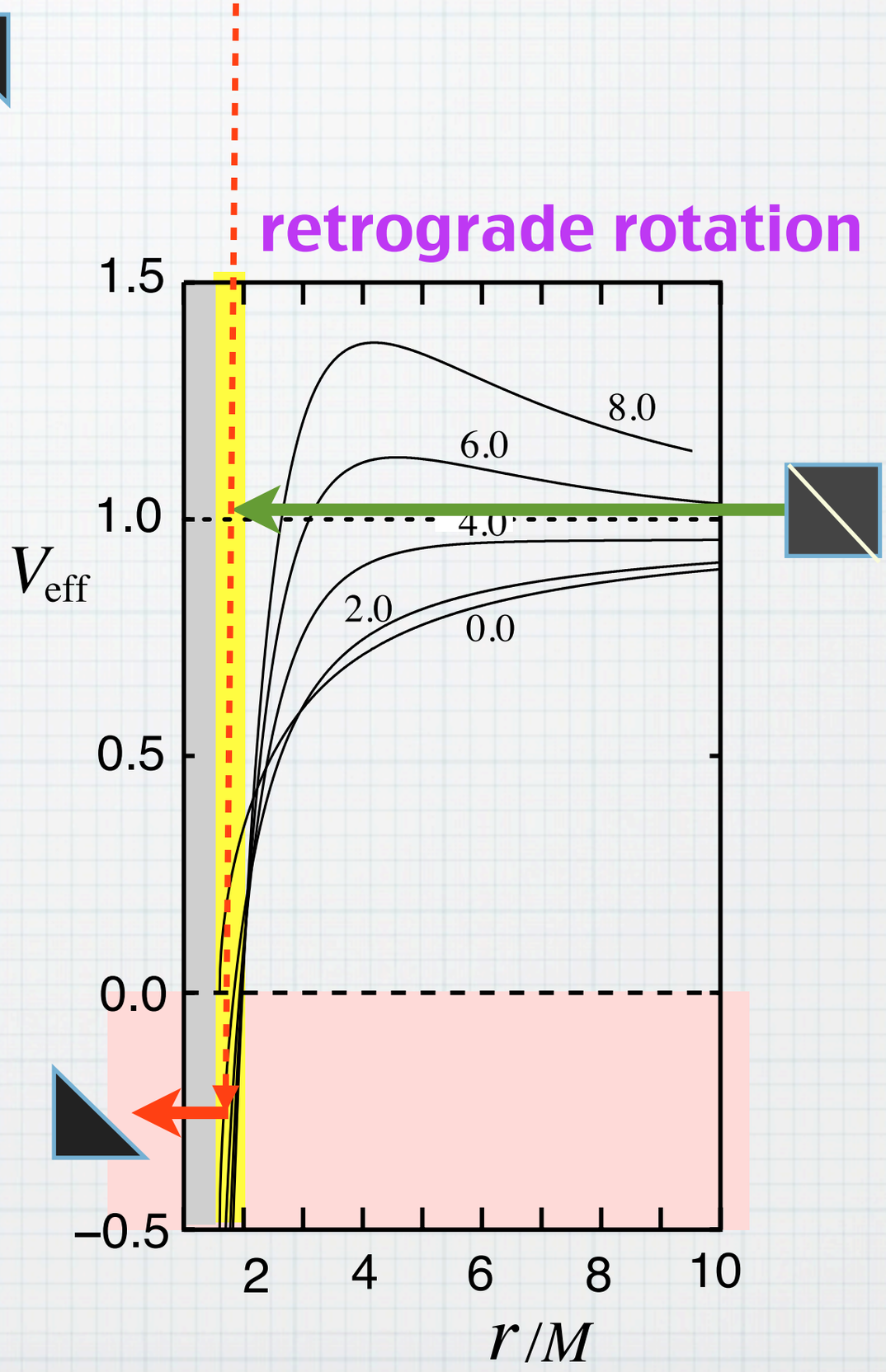



### 逆回転の粒子



# Effective Potential

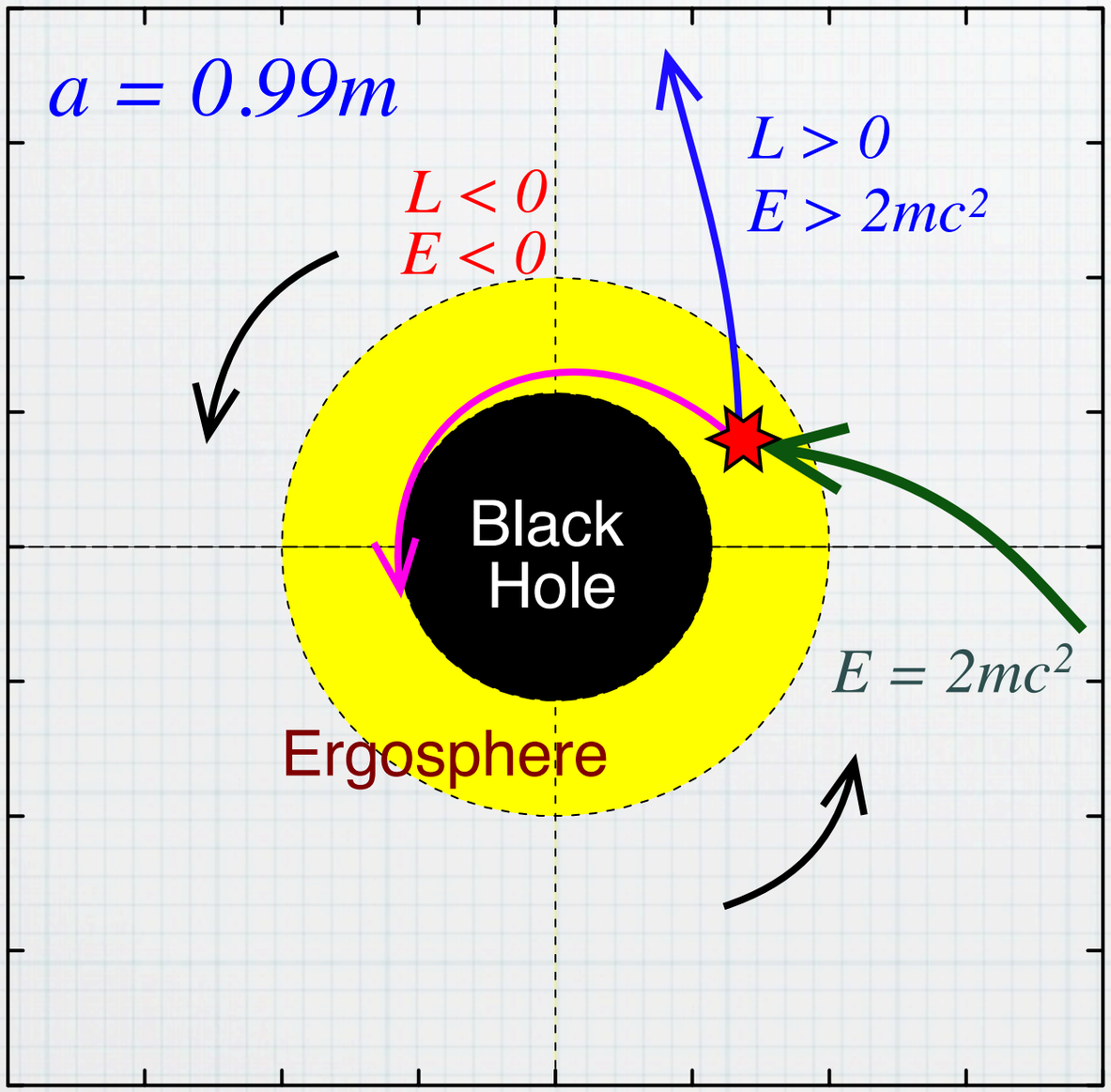


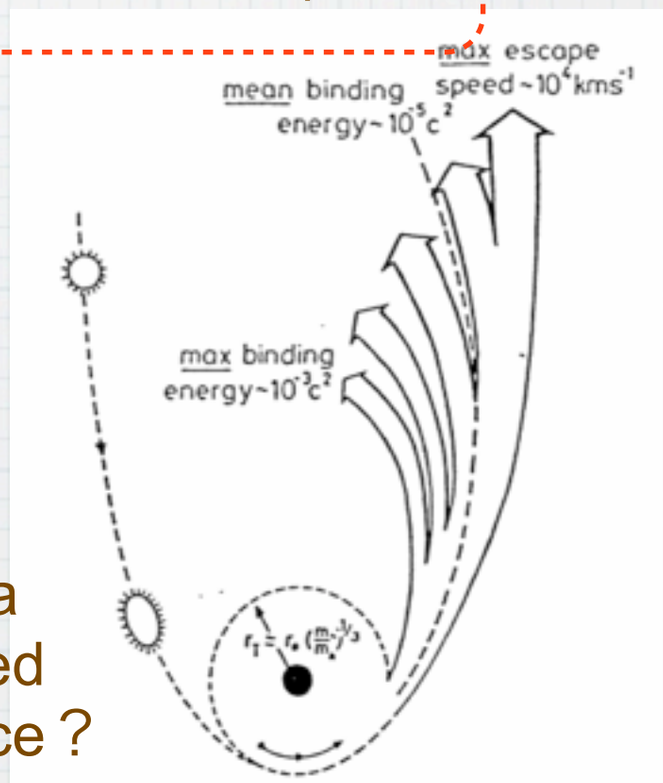
# Penrose Process

**Accretion of negative energy particles**

**Outgoing particle can release higher than incident energy.**




There is a **restriction** that the relative velocity of two particles exceeds c/2.




The Penrose process is not realistic when a star is destroyed by the tidal force ?

# Restriction on Penrose-Process

Wagh & Dadhich(1989)

Inertial frame of particle 1 ： $\boldsymbol{e}^i_{(t)} = U^i_1\,, \quad \boldsymbol{e}^i_{(a)}\ (a=1,2,3)$

Energy of particle 1 ：

$$E_1 = U^\mu_1 k_\mu = U^{(\alpha)}_1 k_{(\alpha)} = k_{(t)} \qquad U^{(\alpha)}_1 = (1,0,0,0)$$

Energy of particle 2 (after devision) ：

$$E_2 = U^\mu_2 k_\mu = U^{(\alpha)}_2 k_{(\alpha)} = \gamma k_{(t)} + \gamma v^{(\alpha)} k_{(\alpha)} = \gamma k_{(t)} + \gamma |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{k}| \cos\theta$$

$$U^{(\alpha)}_2 = (\gamma, \gamma\boldsymbol{v}) \qquad \gamma = (1-|\boldsymbol{v}|^2)^{-1/2}$$

relative velocity

$$k^\mu k_\mu = k^{(\alpha)} k_{(\alpha)} = k_{(t)} k^{(t)} + k_{(a)} k^{(a)} = E_1^2 - |\boldsymbol{k}|^2$$

$$k^\mu k_\mu = g_{tt}$$

$$|\boldsymbol{k}| = (E_1^2 - g_{tt})^{1/2} \qquad -1 \le \cos\theta \le 1$$

# Restriction on Penrose-Process (2)

Wagh & Dadhich(1989)

$$\gamma\left[E_1 - |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] \leq E_2 \leq \gamma\left[E_1 + |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right]$$

for Penrose Process $E_2 < 0$

$$|\boldsymbol{v}| \geq \frac{E_1}{\sqrt{E_1^2 - g_{tt}}}$$

$$|\boldsymbol{v}| \geq \frac{1}{2}c$$

**strict condition !**

Estimate of the velocity of the lower limit

$$a = M$$

$$E_1 \geq 1/\sqrt{3} \qquad (\text{ISCO})$$

$$g_{tt}(r_H) \geq -1$$

**near the Event Horizon**

# Restriction on Penrose-Process (3)

Wagh & Dadhich(1989)

Electrostatic potential $\Phi\ (= A_t)$ in Kerr spacetime

$$\gamma\left[E_1 - |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] - e_2\Phi \leq E_2 \leq \gamma\left[E_1 + |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] - e_2\Phi$$

$$\gamma\left[E_1 - |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] \leq e_2\Phi \quad \longleftarrow \quad E_2 < 0$$

for Magnetic Penrose Process

$0 < e_2\Phi < E_1$ $\quad |\boldsymbol{v}| < 1/2$ is possible

$E_1 < e_2\Phi$ **no-restrictions !**

**When electromagnetic field exist、**

**the restriction of the limitation on Penrose process is relaxed.**

# What is the Extracted energy ?

**Rotational energy of a Black Hole**

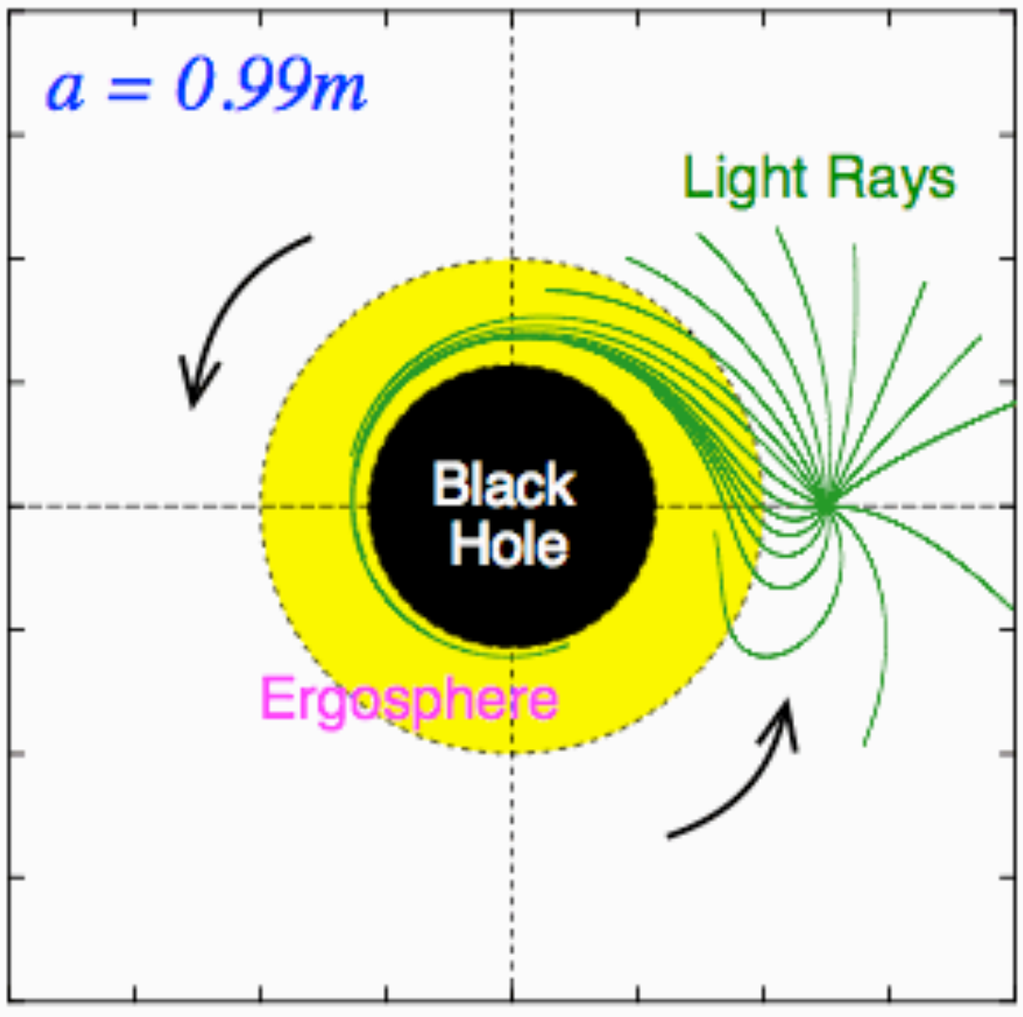
**Electrostatic potential energy**

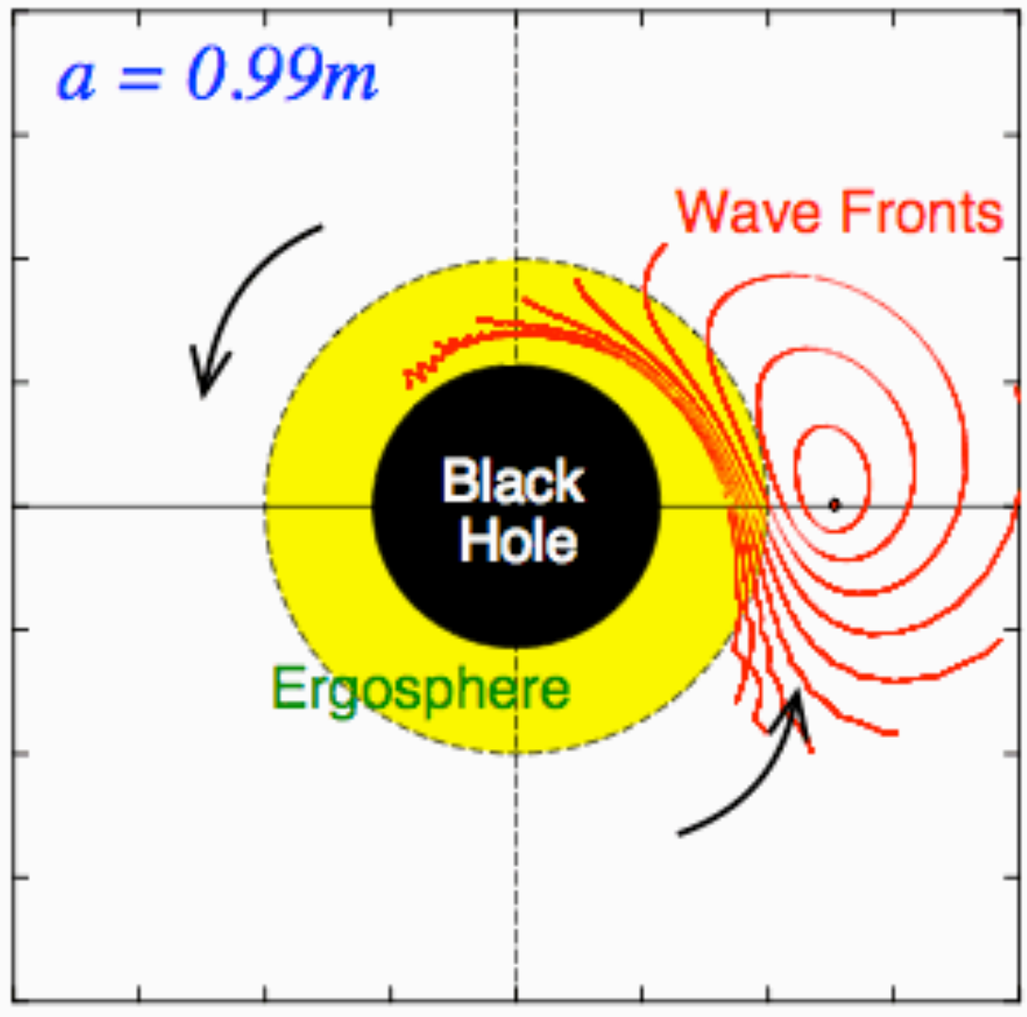
due to the dragging effects of Kerr space-time

# Blandford-Znajek process

# Magnetic interaction

The dragging of space-time trails the magnetic field lines.



# BZ Flux (I)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\delta}F_\delta{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2\right)$$

(1) Poynting-flux ($r$-compornant):

$$\mathcal{E}^r(r,\theta) \equiv T^r{}_t = \epsilon_0 \frac{E_\theta B_\phi}{\sqrt{-g}}$$

where $\sqrt{-g} = \Sigma \sin\theta$ , $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ and $E_\theta = \Omega_F F_{\theta\phi} = \Omega_F A_{\phi,\theta}$ .

(2) The boundary condition at the horizon : toroidal compornent of magnetic fields

$$B^H_\phi[\Psi(\theta)] = (\omega_H - \Omega_F)\frac{(r_H^2 + a^2)\sin\theta}{\Sigma_H}(A_{\phi,\theta})_H$$

(3) Blandford-Znajek Power (Poynting-flux at the horizon):

$$\mathcal{E}^r_H[\Psi(\theta)] = \epsilon_0 \Omega_F(\omega_H - \Omega_F)\frac{(r_H^2 + a^2)}{\Sigma_H^2}(A_{\phi,\theta})^2_H$$

表 3.1: BL-ZAMO-KS における電場と磁場の対応

| BL | ZAMO | KS Ingoing-null |
|---|---|---|
| $E_t = 0$ | $\overline{E}_t = 0$ | $\tilde{E}_t = 0$ |
| $E_r = \Omega_F F_{r\phi}$ | $\overline{E}_r = \frac{1}{\alpha_z}(\Omega_F - \omega)F_{r\phi}$ | $\tilde{E}_r = E_r \quad [\tilde{E}^r = E^r]$ |
| $E_\theta = \Omega_F F_{\theta\phi}$ | $\overline{E}_\theta = \frac{1}{\alpha_z}(\Omega_F - \omega)F_{\theta\phi}$ | $\tilde{E}_\theta = E_\theta \quad [\tilde{E}^\theta = E^\theta]$ |
| $E_\phi = 0$ | $\overline{E}_\phi = 0$ | $\tilde{E}_\phi = 0$ |
| $B_t = 0$ | $\overline{B}_t = -\frac{\omega}{\alpha_z} B_\phi$ | $\tilde{B}_t = 0$ |
| $B^r = \frac{G_t}{\sqrt{-g}} F_{\theta\phi}$ | $\overline{B}^r = \frac{\alpha_z}{\sqrt{-g}} F_{\theta\phi}$ | $\tilde{B}^r = B^r \quad [\tilde{B}_r = B_r - \frac{a}{\Delta} B_\phi]$ |
| $B^\theta = \frac{-G_t}{\sqrt{-g}} F_{r\phi}$ | $\overline{B}^\theta = \frac{-\alpha_z}{\sqrt{-g}} F_{r\phi}$ | $\tilde{B}^\theta = B^\theta \quad [\tilde{B}_\theta = B_\theta]$ |
| $B_\phi = \frac{\rho_w^2}{\sqrt{-g}} F_{\theta r}$ | $\overline{B}_\phi = \frac{1}{\alpha_z} B_\phi$ | $\tilde{B}_\phi = B_\phi$ |

(2) 表 3.1 より、$\tilde{B}_r = (-1/\Delta)[\Sigma B^r - a B_\phi]$ である。 ここで、$\tilde{B}_r$ は地平面で有限値を持つため、地平面近傍で $[\Sigma B^r - a B_\phi] \sim O(\Delta)$ であることがわかる。これより、トロイダル磁場についての地平面での境界条件：

$$(B_\phi)_{\rm H} = \frac{\Sigma_{\rm H}}{a}(B^r)_{\rm H} = \frac{\Sigma_{\rm H}}{a}\left(\frac{G_t}{\sqrt{-g}}F_{\theta\phi}\right)_{\rm H} = \frac{2mr_{\rm H}\sin\theta}{\Sigma_{\rm H}}\left(\Omega_F - \omega_{\rm H}\right)F^{\rm H}_{\theta\phi} \tag{3.32}$$

を得る。

(注) BL 系での $B_\phi$ について： horizon 近傍での $F_{\theta r}$ の振舞いについては、BL 系での議論のみでは不明である。Ingoing 系での境界条件 (この系での磁場は発散しない) を考慮することで、$F_{\theta r} \sim O(1/\Delta)$ のように発散する量であることがわかる。

# When there is a global magnetic field around BH, ・・・?

***BLANDFORD & ZNAJEK PROCESS (1977)***

- **Lorentz force** to act on BH from the outside

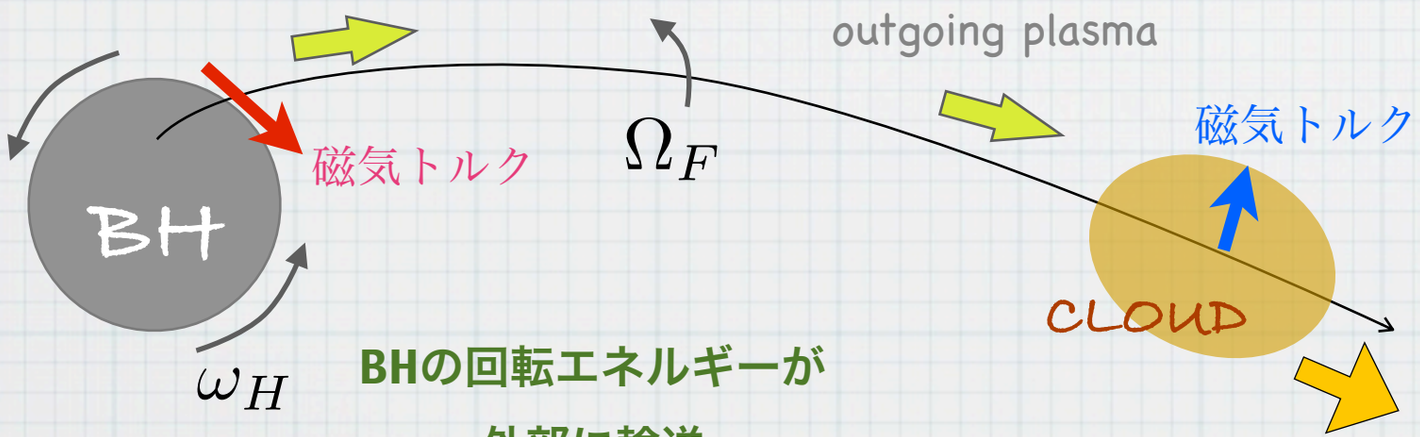
応力 $$T_\phi = \frac{1}{4\pi} B_p B_\phi \sim -\frac{(\omega - \Omega_F)}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{(A_{\phi,\theta})^2}{\sqrt{\Sigma}}$$

磁場の２乗に比例

- **Angular Mom./ Energy Flux**

$$\mathcal{L}^r = -\sqrt{g_{\phi\phi}}\, T_\phi$$

$$\mathcal{E}^r = \Omega_F \mathcal{L}^r$$




BHの回転エネルギーが

外部に輸送

もしもBH時空が磁気圏を

引きずっている状況なら、、

When $B_\phi < 0$ the energy flux streams outward.

あるいは、

CLOUDの角速度の方が大きいときには、CLOUDにブレーキ！

→ BHに向けて 落下.

When the Alfven point locates inside the Ergosphere,

# Energy Extraction from a Rotating BH by MHD Inflows is possible.

Takahashi + 1990

fluid part | EM part

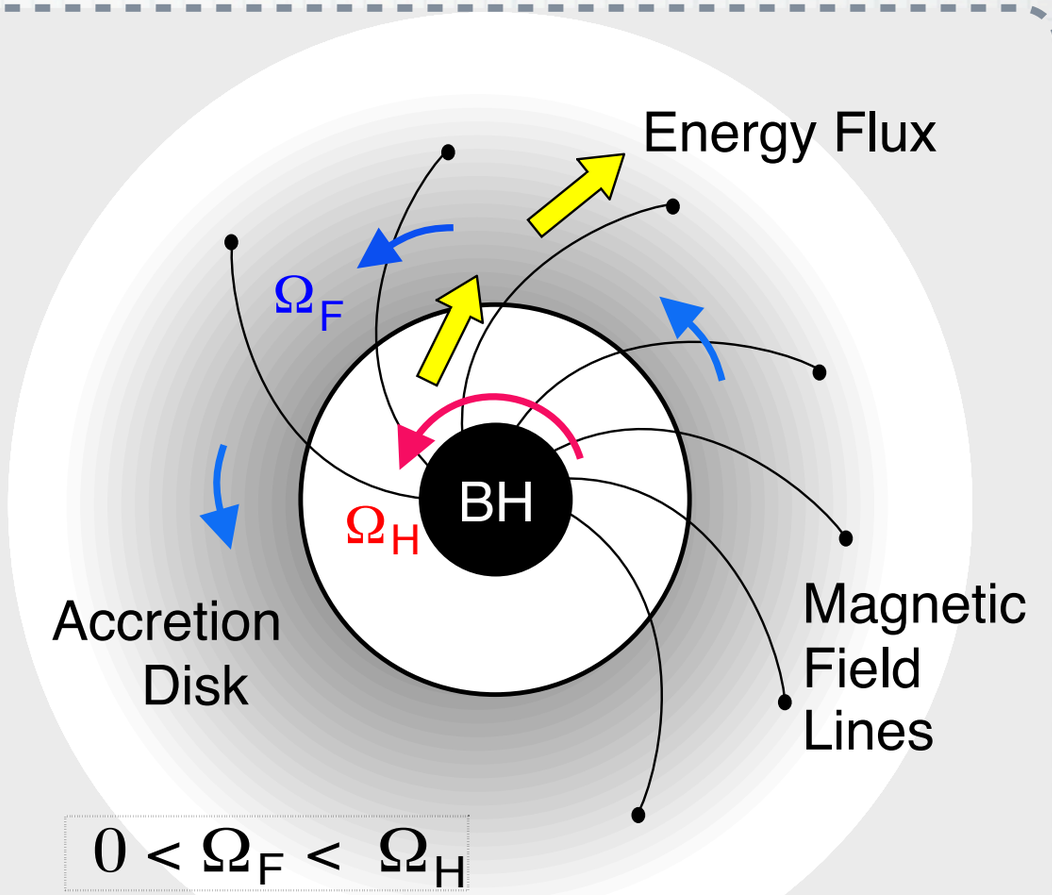
$$E(\Psi) = \mu u_t - \frac{\Omega_F}{4\pi\eta} B_\phi$$

— | +/− | —

Negative energy inflow ‥が可能！

gas accretion

**BZ process**




This situation would be possible in the magnetically-dominated BH magnetosphere .

# Poynting Power for GRB

Lee+ 1999

## Rotational energy of BH

$$E_{\rm rot} = f(a) M_{\rm BH}\ c^2 \qquad f(a) = 1 - \sqrt{(1/2)[1+\sqrt{1-a^2}]} \quad (< 0.29)$$

## Total BZ energy

$$E_{\rm BZ} = 1.8 \times 10^{54} \varepsilon f(a) \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \ {\rm erg} \qquad \varepsilon = \Omega_F(\omega_H - \Omega_F)$$

time scale

$$\tau \sim \frac{E_{\rm rot}}{B^2 r_H^2 c} \sim 10^3 \left(\frac{10^{15}{\rm G}}{B}\right)^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \ {\rm sec}$$

BZ power

$$P_{\rm BZ} \sim 2.0 \times 10^{50} \left(\frac{B}{10^{15}{\rm G}}\right)^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \ {\rm erg/sec}$$

e.g., $E_\gamma \geq 3 \times 10^{53}$ erg for GRB971214

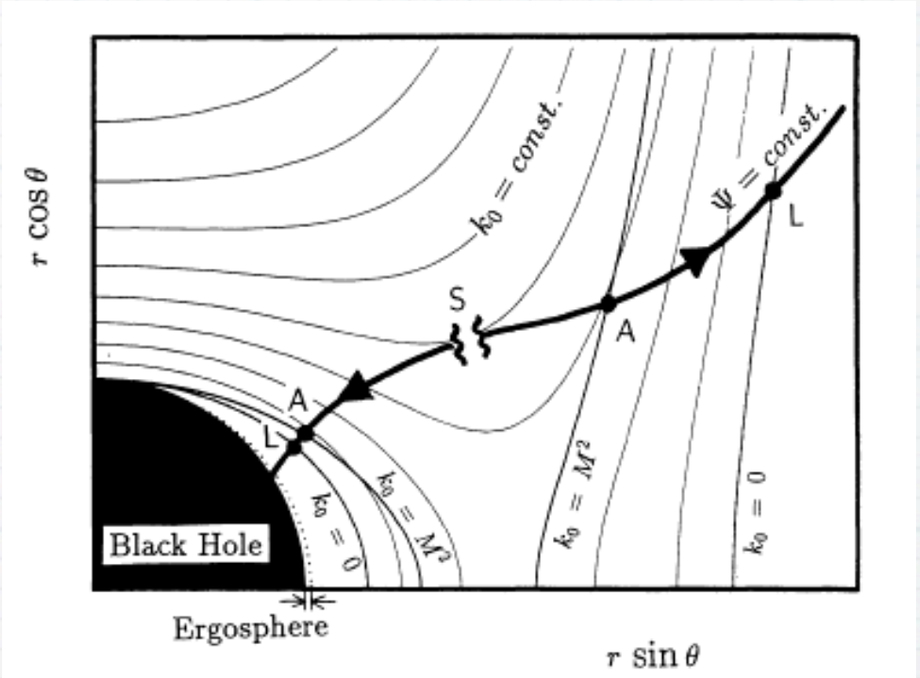
# Negative Energy MHD inflows

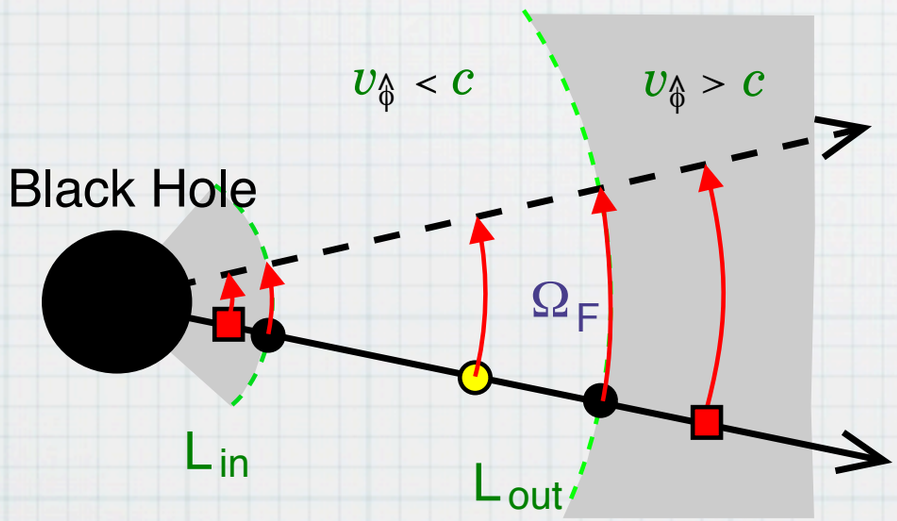
# MHD Flows in a Black Hole Magnetosphere

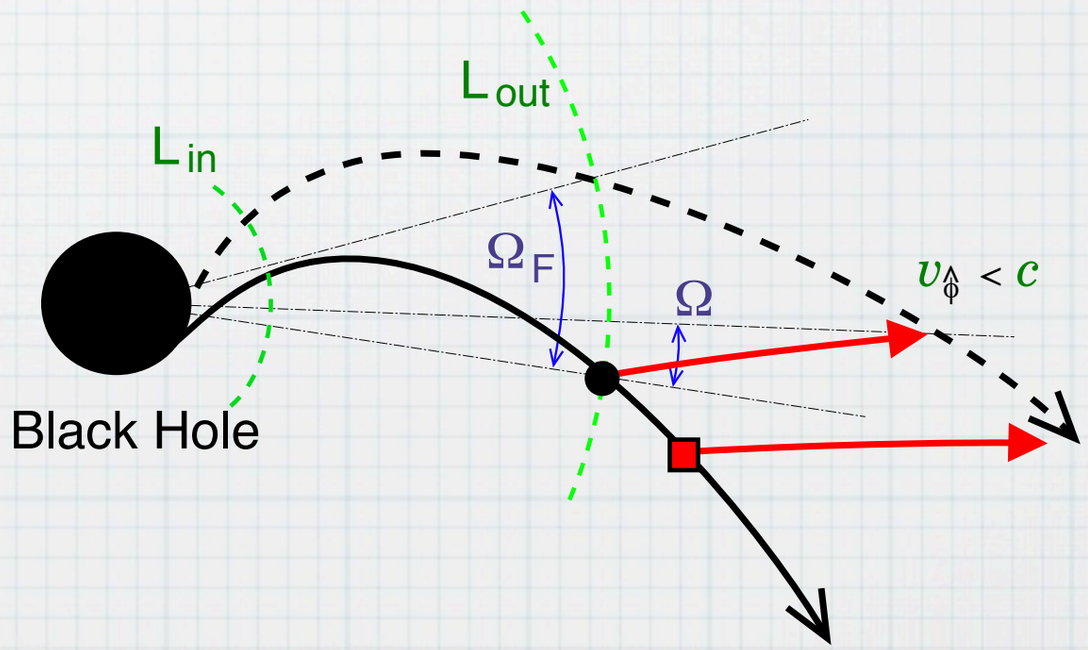
inner/outer Light surfaces

Alfven points

Magnetosonic points

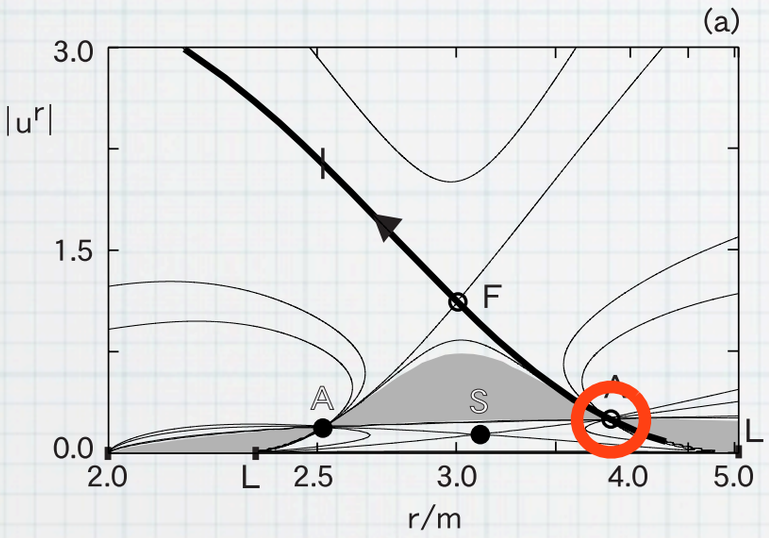


# MHD Accretion onto Black Holes

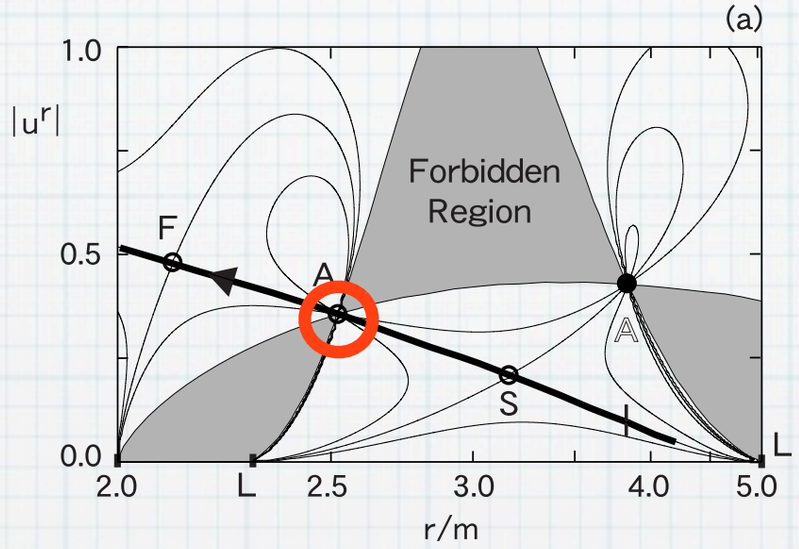
BH: slowly rotating




hydro-like

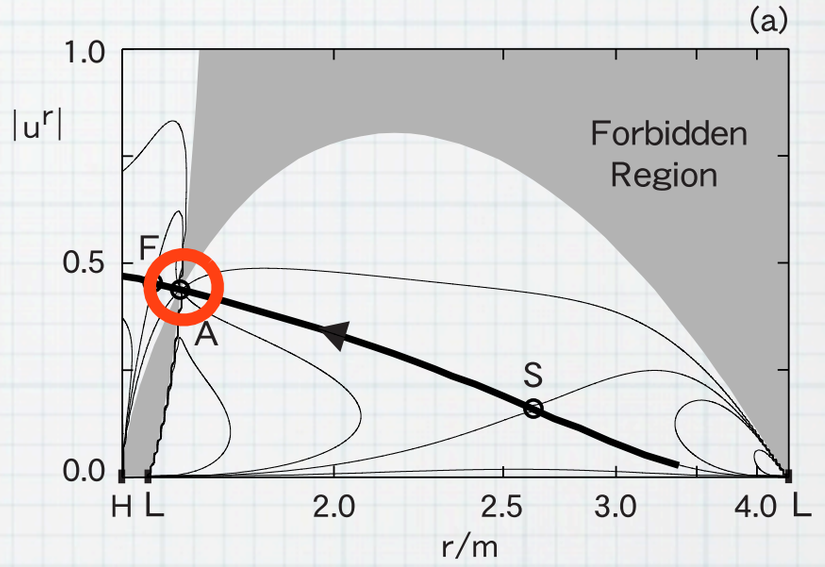
weak-magnetic field limit
=> Hydro Dynamical Flow

BH: slowly rotating




magneto-like

BH: rapidly rotating




magneto-like

strong-magnetic field limit
=> Force-free magnetosphere

Some critical points make regularity conditions.

Plasma source => Slow Point => Alfven P. => Fast P. => Event Horizon
(boundary conditions)

# Negative Energy Inflows

MHD flow のエネルギー

$$E = \left( \frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F}{\alpha} \right)_{\rm A} e$$

MHD flow の角運動量

$$L = \left( \frac{-g_{\phi\phi}}{\alpha} \right)_{\rm A} (\Omega_F - \omega_{\rm A})\, e$$

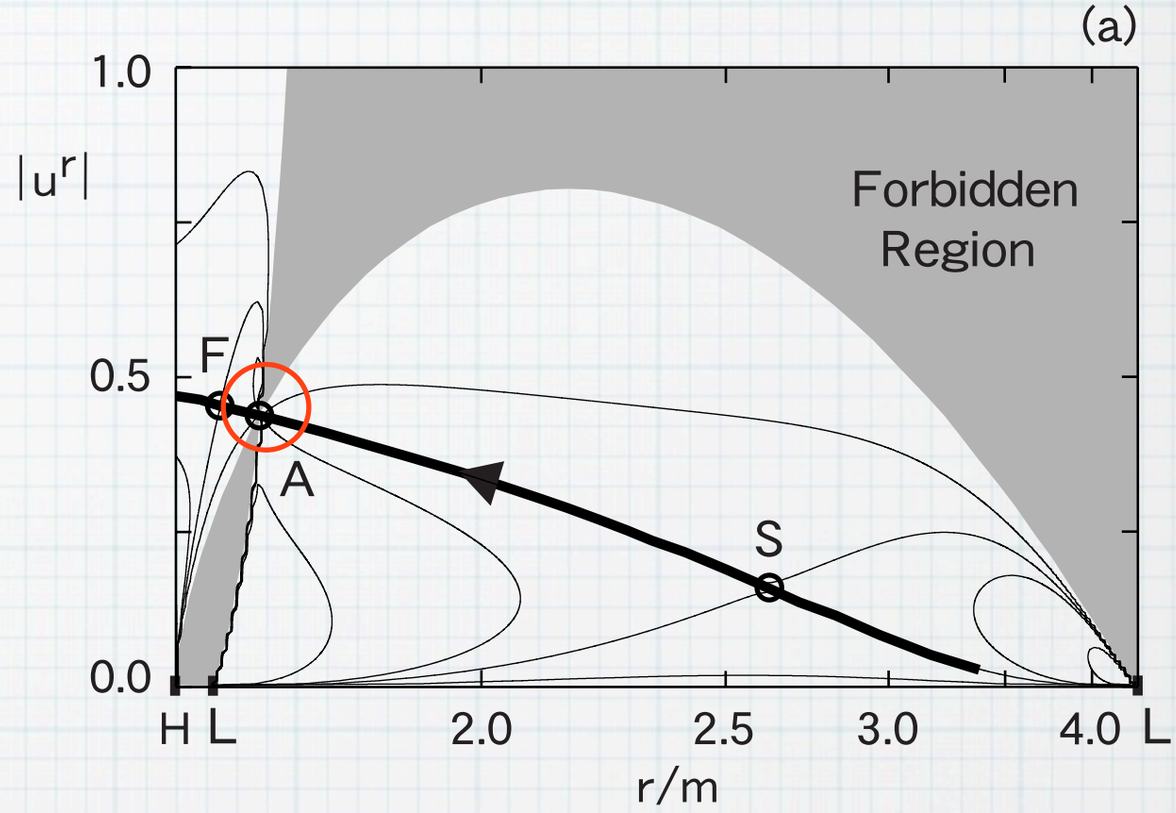
Total-energy in rotational frame

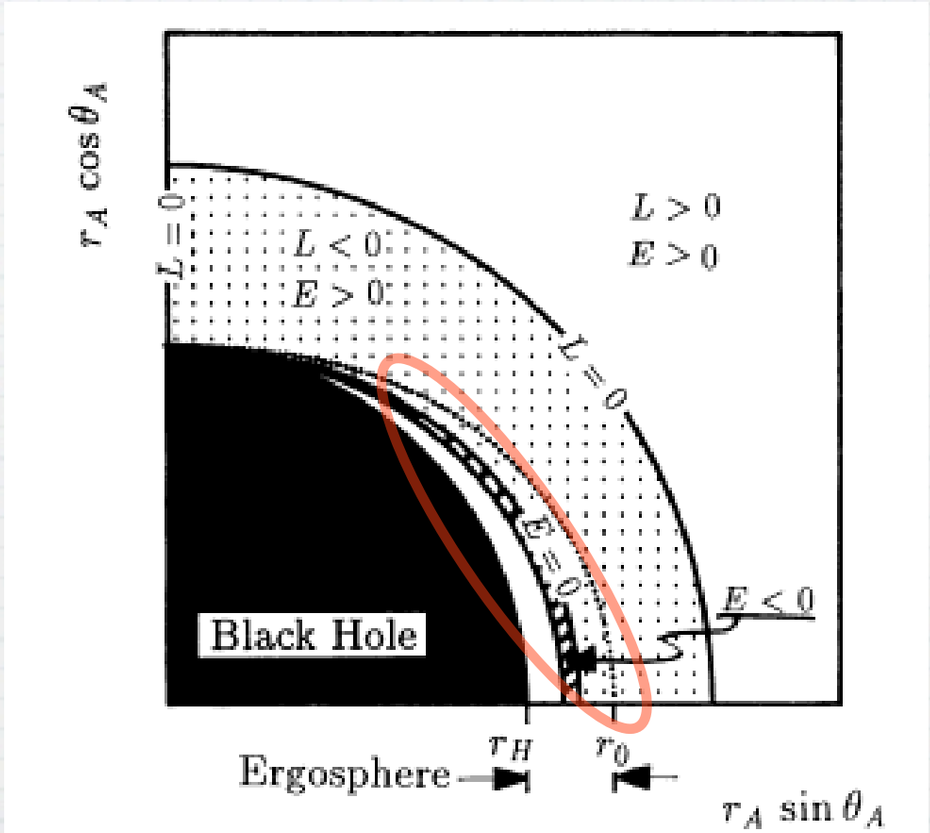
$$e \equiv E - \Omega_F L > 0$$

Gravitational-Lorentz factor

$$\alpha \equiv g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2$$

$$(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F)_{\rm A} < 0 \quad \Rightarrow \quad E < 0$$



# Super-radiance

# radiation

# Super-radiance (1)

Boyer-Lindquist coordinate (Kerr geometry) における波動方程式 (スカラー場) は,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[(\sqrt{-g})g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha}\right]_{,\beta}=0 \tag{1.8}$$

である．Kerr 時空の場合に，これを具体的に書き下すと、

$$\left[-\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta}+a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{Mar}{\Delta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial\phi}+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{a^2}{\Delta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) \;=\; 0\,. \tag{1.9}$$

と表せる．ここで $\sqrt{-g}=(r^2+a^2\cos^2\theta)\sin\theta$ である．この方程式は、以下のように

$$\Phi(t,r,\theta,\phi)=e^{-i\omega t}e^{im\phi}R(r)S(\theta) \tag{1.10}$$

とおくと変数分離できる。これを適用すると、(1.9) 式は,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\omega^2\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta}-\frac{4Mar\omega m}{\Delta}+\frac{a^2m^2}{\Delta}$$
$$=\;-\frac{1}{S\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+a^2\omega^2\sin^2\theta+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\,. \tag{1.11}$$

と書ける．左辺は $r$ のみの関数、右辺は $\theta$ だけの関数であるが、これらが等しい値をもつことよ

# Super-radiance (2)

と書ける．左辺は $r$ のみの関数、右辺は $\theta$ だけの関数であるが、これらが等しい値をもつことより、おのおのが定数（$A$ とおく）でなければならない。このことより（1.11）式を以下の二つの式

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{\omega^2(r^2+a^2)^2-4Mar\omega m+a^2m^2}{\Delta}-A\right]R = 0\,, \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)-\left(a^2\omega^2\sin^2\theta+\frac{m^2}{\sin^2\theta}-A\right)S = 0\,. \tag{1.13}$$

に分離（変数分離）できる．

関数 $S$ は $\theta=0,\pi$ で regular でなければならないが、(1.13) 式は $A$ についての固有値方程式となる．この関数 $S$ は，$a\omega=0$ である最もシンプルな場合に “spheroidal wave function” となるのだが、その解は，$S(\theta)=P_{\ell m}(\cos\theta)$, $A=\ell(\ell+1)$ となる．

一方、(1.12) 式は、事象の地平面で発散してしまう。この事情を回避するために、動径方向の長さに関して変数変換を行う。すなわち、

$$\frac{dr^*}{dr}=\frac{r^2+a^2}{\Delta} \tag{1.14}$$

を満たすような半径 $r^*$ を導入する（“tortose” coordinate)。この座標変換により、$r$ 座標について $(r_H,+\infty)$ であった変域が、$r^*$ 座標では $(-\infty,+\infty)$ の変域に変更される（有限の半径に特異点が現れなくなる)。この座標変換により、(1.12) 式は

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\frac{2r\Delta}{(r^2+a^2)^2}\frac{dR}{dr^*}+\left[\omega^2+\frac{a^2m^2-4Marm\omega-\Delta A}{(r^2+a^2)^2}\right]R=0 \tag{1.15}$$

# Super-radiance (3)

と書き換えられる。遠方 $(r \to \infty)$ においては、上式は

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr^*} + \omega^2 R \sim 0 \tag{1.16}$$

となり、その解は

$$R \sim \frac{1}{r} e^{\pm i\omega r^*} \tag{1.17}$$

となる。この解は、遠方での ingoing wave と outgoing wave を与える。事象の地平面 $(\Delta \to 0)$ では、(1.15) 式は

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}} + \left[\omega^2 - \frac{2am\omega}{2Mr_H} + \frac{a^2m^2}{(2Mr_H)^2}\right] R = \frac{d^2R}{dr^{*2}} + [\omega - m\omega_H]^2 R = 0 \tag{1.18}$$

となる。ここで、$\omega_H = a/(2Mr_H)$ である。この場合の解は、

$$R \sim e^{\pm i(\omega - m\omega_H)r^*} \tag{1.19}$$

となる。

事象の地平面のすぐ外側にいる観測者（ergosphere 内にいて、$\phi$ 方向に角速度 $\Omega = d\phi/dt \sim \omega_H > 0$ で回転する）にとっては、

$$\Phi = e^{-i\omega t} e^{im\phi} e^{\pm i(\omega - m\omega_H)r^*} S(\theta) \tag{1.20}$$

$$= e^{-i(\omega - m\omega_H)t} e^{\pm i(\omega - m\omega_H)r^*} e^{im(\phi - \omega_H t)} S(\theta) \tag{1.21}$$

となる。このうち $e^{-i(\omega - m\omega_H)r^*}$ の方が、ingoing wave に対応する。

# Super-radiance (4)

## 地平面を横切る波のエネルギーフラックス

スカラー場のエネルギーモーメンタム・テンソルは、

$$4\pi T_{\alpha\beta} = \Phi_{,(\alpha}\Phi^*_{,\beta)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}|\Phi_{,\gamma}\Phi^{,\gamma}| \tag{1.22}$$

ここで $\Phi^*$ は complex conjugation. 地平面を横切るエネルギーフラックスは、energy flux vector $\mathcal{E}^r = T^{r\mu}\xi_\mu$ を地平面 $(r = r_H)$ にわたって表面積分した

$$\frac{dE}{dt} = \int T^r_t \sqrt{-g}\, d\theta\, d\phi \tag{1.23}$$

で得られる。ここで、

$$4\pi T^r_t = Re(\Phi_{,t}\Phi^{*,t}) = Re\left(\Phi_{,t}\Phi^*{}_{,r^*}\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\right) = \omega(\omega - m\omega_H)S^2(\theta)\,\frac{2Mr_H}{\Sigma} \tag{1.24}$$

であることより、

$$\frac{dE}{dt} = \omega(\omega - m\omega_H)\frac{2Mr_H}{4\pi}\int S^2(\theta)\,\sin\theta d\theta d\phi \tag{1.25}$$

を得る。上式より、$(\omega - m\omega_H) < 0$ のとき、$dE < 0$ となるとわかる。すなわち、波の位相速度がブラックホールの角速度より小さい場合（ $0 < \omega/m < \omega_H$ ）には、ブラックホールのエネルギーが地平面の外部に運ばれることになる。この波によるエネルギー引き抜き機構は “superradiance” と呼ばれる。