Kerr時空上の波動光学とブラックホールシャドウ

名古屋大学　野田 宗佑

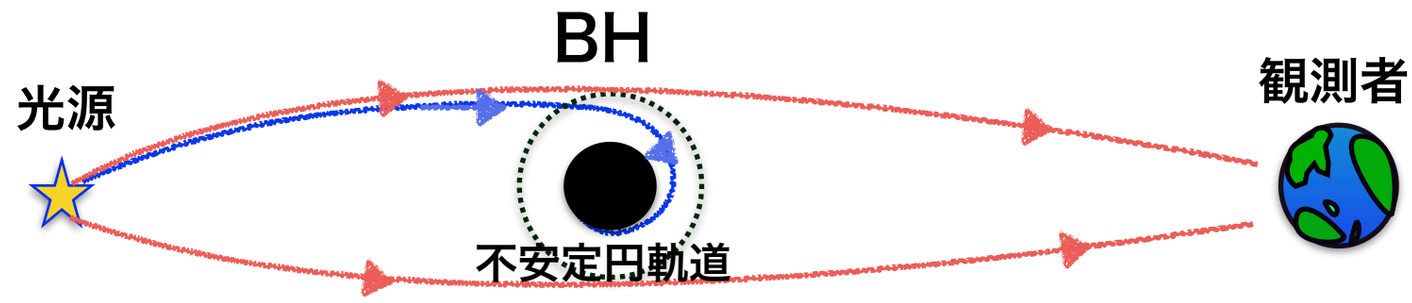
共同研究者　南部保貞

2015/3/3

第8回ブラックホール磁気圏研究会@広島大学

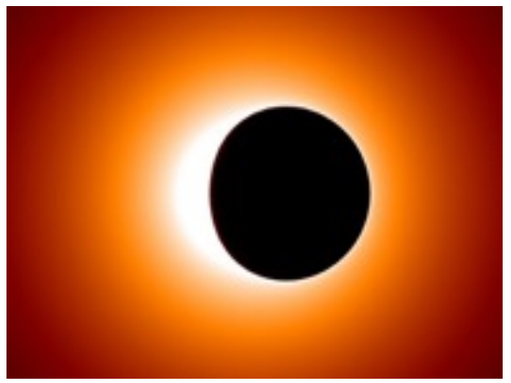
Motivation　ブラックホールを波で”見る”

○ 光線を用いた場合　(massless粒子の運動方程式)



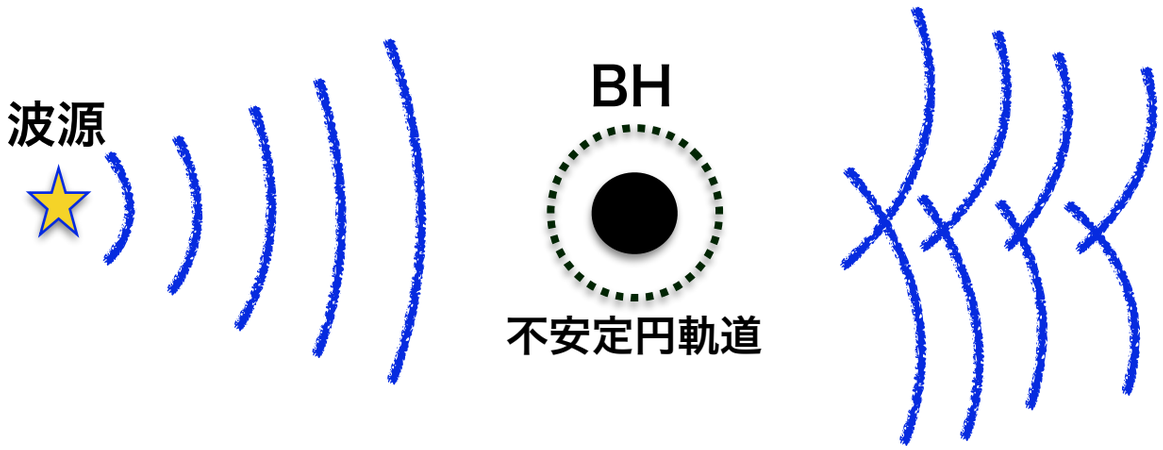
不安定円軌道 ⟷ シャドウの輪郭

ブラックホールシャドウ



© M. Moscibrodzka & H. Falcke,
Radboud-Universität Nimwegen

○ 波を用いた場合　(電波や重力波)



Kerrの場合の計算を行う

干渉パターンなどの波動効果

シャドウよりも豊富な情報

目次

1. ブラックホールシャドウ (review)

null線の方程式と保存量

レンズ方程式

天球面の座標とブラックホールシャドウ

光線の話
(幾何光学)

2. 波動光学で描くブラックホールシャドウ

Kerr時空上の波の散乱問題　　…Green関数

レンズ方程式再導出　　…Eikonal極限

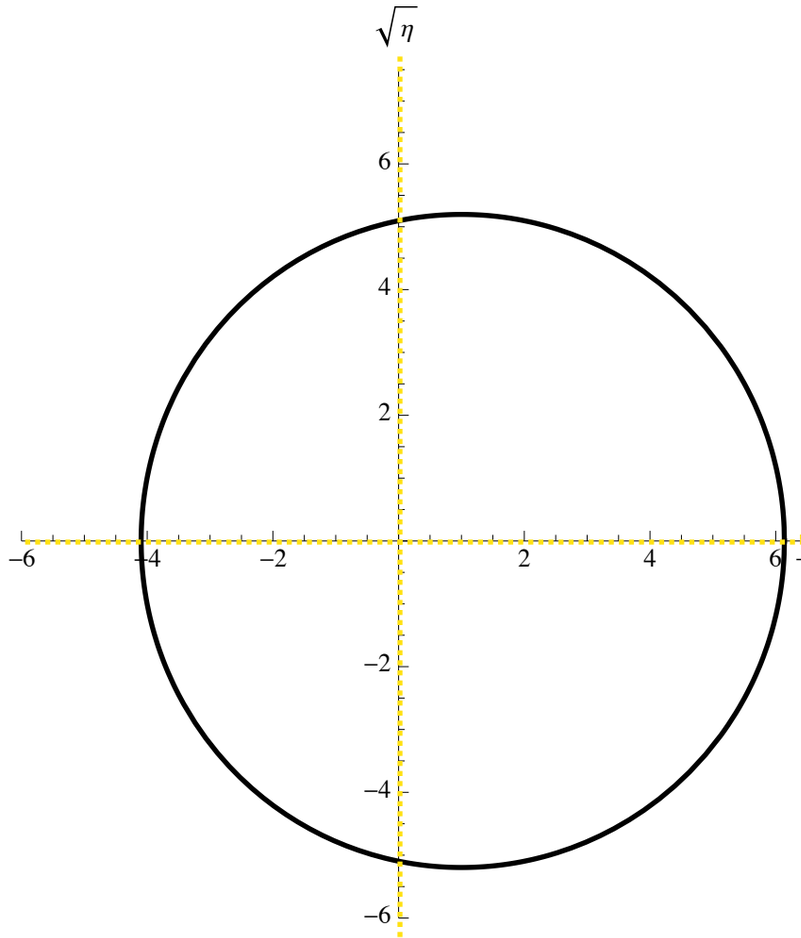
散乱波の干渉パターンとブラックホールシャドウ

波の話
(波動光学)

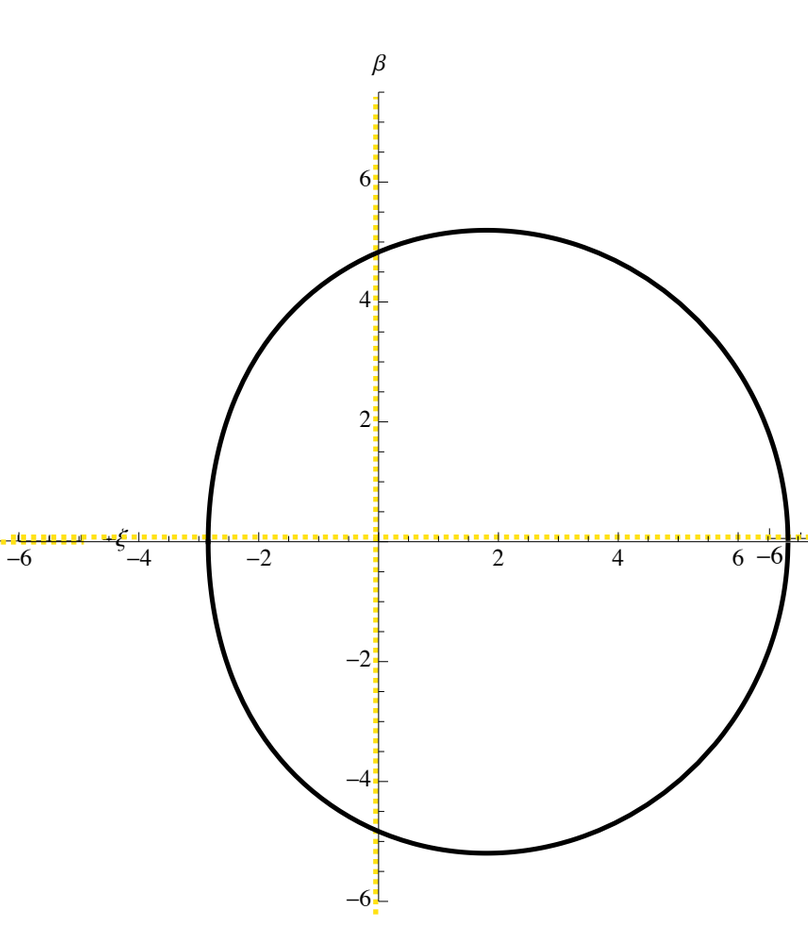
1.ブラックホールシャドウ

ブラックホールシャドウの形

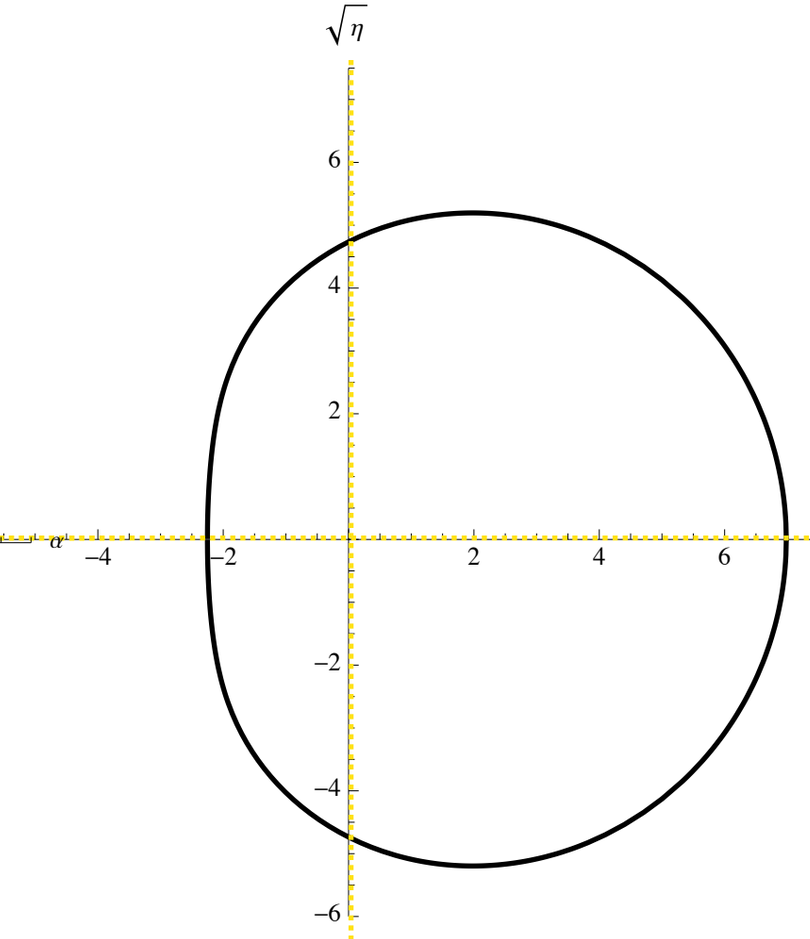
a=0.5



a=0.9



a=0.99



シャドウの形（輪郭）はどうやって決まるのか？

Kerrの場合で見てみる

Kerr時空

○ Boyer Lindquist座標

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\Sigma} d\phi^2$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \qquad \Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \qquad A \equiv (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta$$

○ 定常かつ軸対称

Killingベクトル

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

$$\xi^\mu_{(t)} \qquad \xi^\mu_{(\phi)}$$

○ 隠れた対称性

Killingテンソル

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu\rho)} = 0$$

保存量

$E = -p_\mu \xi^\mu_{(t)}$ …エネルギー

$L_z = p_\mu \xi^\mu_{(\phi)}$ …角運動量

$\mathcal{K} = p_\mu p_\nu K^{\mu\nu}$ …Carter定数

p_μ :粒子の４元運動量

Kerr時空上の粒子 massless粒子

○ **Hamilton Jacobi方程式**

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu S\ \partial_\nu S = 0$$

変数分離できる

$$S = -Et + L_z\phi + \int^r dr\ \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} + \int^\theta d\theta\ \sqrt{\Theta}$$

$$\mathcal{R} = [E(r^2+a^2) - L_z a]^2 - \Delta[\mathcal{Q} + (aE - L_z)^2]$$

$$\Theta = \mathcal{Q} + (aE - L_z)^2 - \left(aE - \frac{L_z}{\sin\theta}\right)^2$$

保存量を再定義

$$\mathcal{Q} \equiv \mathcal{K} - (aE - L_z)^2$$

○ **各成分の式**

$$\Sigma\frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}} \qquad \Sigma\frac{d\phi}{d\lambda} = -\left(aE - \frac{L_z}{\sin^2\theta}\right) + \frac{a}{\Delta}[E(r^2+a^2) - L_z a]$$

$$\Sigma\frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \qquad \Sigma\frac{dt}{d\lambda} = -a(aE\sin^2\theta - L_z) + \frac{(r^2+a^2)}{\Delta}[E(r^2+a^2) - L_z a]$$

これらを解けば粒子の運動はわかる!

赤道面上の運動 $\theta = \frac{\pi}{2}$

○ θ の式

$$\Theta = \mathcal{Q}$$

$$\Sigma \underbrace{\frac{d\theta}{d\lambda}}_{=0} = \sqrt{\Theta} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{Q} = 0$$

$$\mathcal{R} = [E(r^2 + a^2) - L_z a]^2 - \Delta[\mathcal{Q} + (aE - L_z)^2]$$

$$\Theta = \mathcal{Q} + (aE - L_z)^2 - \left(aE - \frac{L_z}{\sin\theta}\right)^2$$

○ r の式

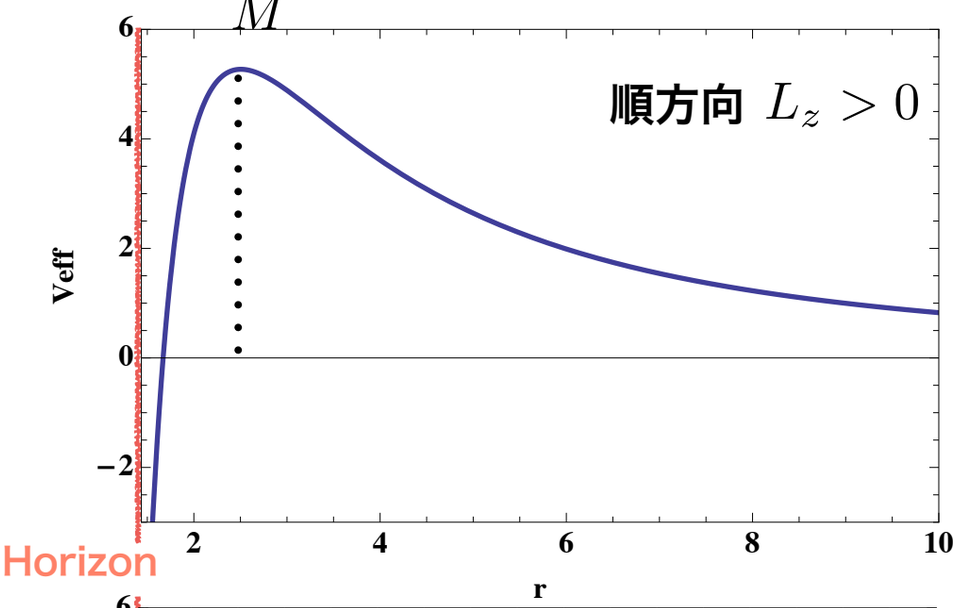
$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - V_{eff}$$

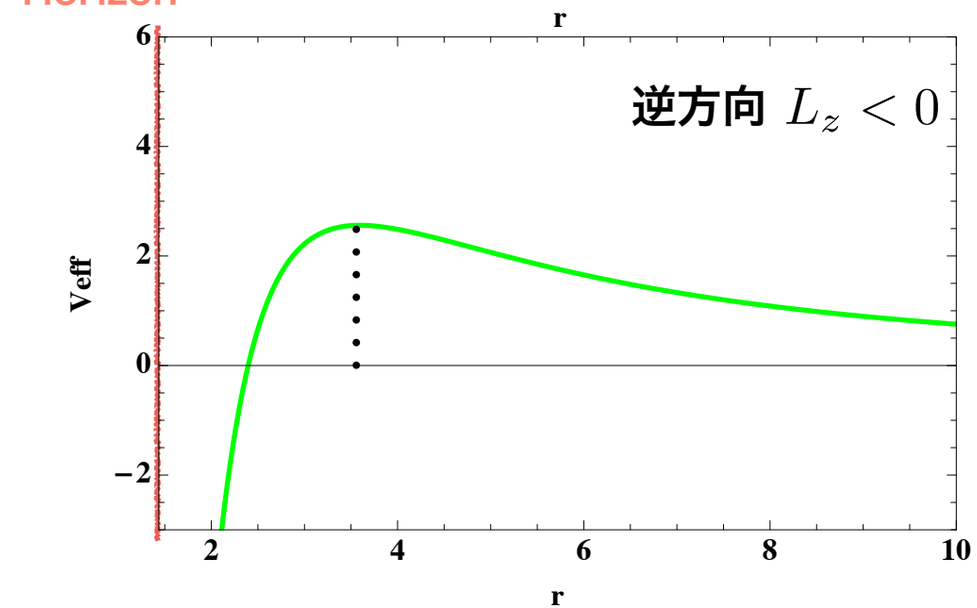
○ 有効ポテンシャル

$$V_{eff} \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L_z - aE)^2}{r^2} + \frac{2aE}{r^2}(L_z - aE)$$

ポテンシャルの山の位置は進入の仕方で異なる!

$\frac{a}{M} = 0.9$ の場合のポテンシャル





光線が巻き付く様子(赤道面)

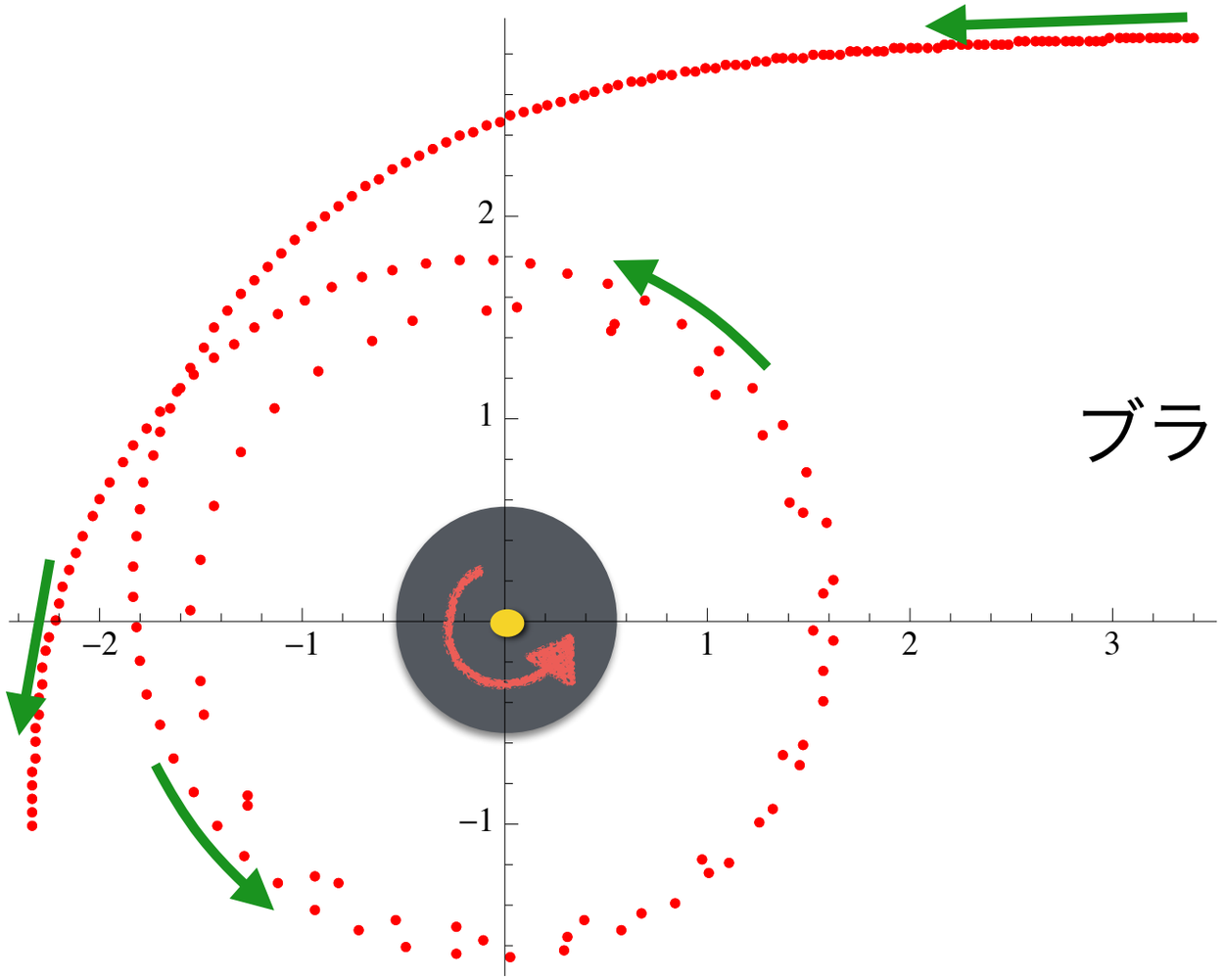
$$\frac{a}{M} = 0.9$$

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}}$$

$$\Sigma \frac{d\phi}{d\lambda} = -(aE - L_z) + \frac{a}{\Delta}[E(r^2 + a^2) - L_z a]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\phi}$$

$$aL_z > 0$$



ブラックホールには光線が巻き付く

レンズ方程式

運動方程式

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \pm\sqrt{\mathcal{R}}$$
$$\Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} = \pm\sqrt{\Theta}$$
$$\vdots$$

積分形

$$\int^r \frac{dr}{\pm\sqrt{\mathcal{R}}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\Theta}}$$

$$\Delta\phi = \int^r \frac{a(2EMr - L_z a)}{\pm\Delta\sqrt{\mathcal{R}}} dr + \int^\theta \frac{L_z}{\pm\sin^2\theta\sqrt{\Theta}} d\theta$$

$$\Delta t = \int^r \frac{Er^2(r^2+a^2) + 2Mra(aE - L_z)}{\pm\Delta\sqrt{\mathcal{R}}} dr + \int^\theta \frac{aE^2\cos^2\theta}{\pm\sqrt{\Theta}} d\theta$$

$a = 0$ の場合

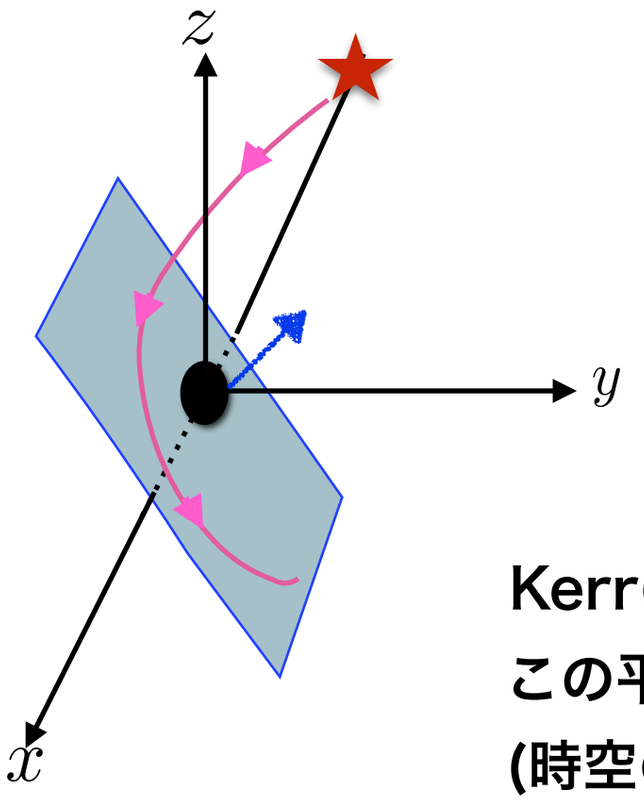
$$\Delta\phi = \int^\theta \frac{L_z}{\pm\sin^2\theta\sqrt{\Theta}} d\theta$$

$$\cot\theta = k\sin(\phi - \phi_s)$$

k : L_z を含む定数

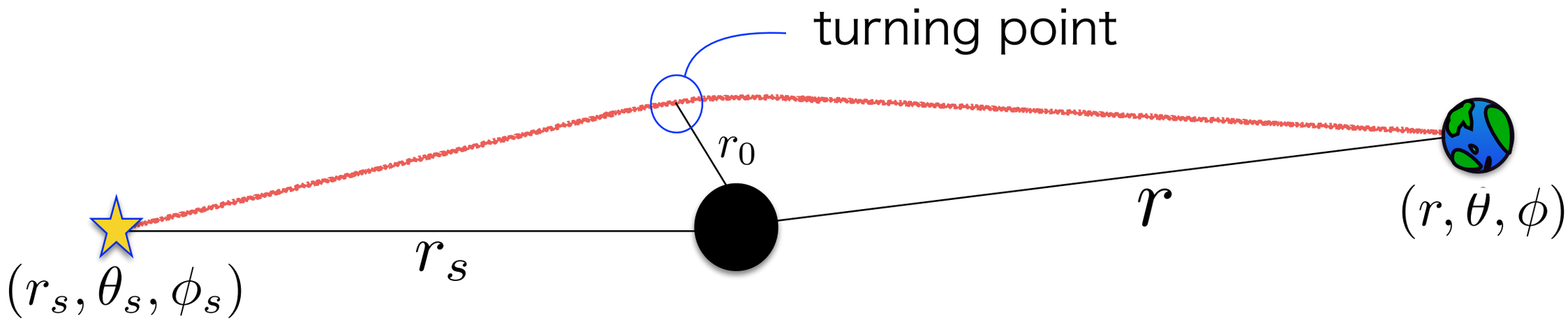
$$z = -k\cos\phi_s \cdot y + k\sin\phi_s \cdot x$$

平面の方程式



Kerrの場合には
この平面自体が動いていく
(時空の引きずり効果)

レンズ方程式 光線の端点が遠方にあるとする　$r, r_s \gg 1$



レンズ方程式

$$2\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{\mathcal{R}}}-\int_{\theta_s}^{\theta}\frac{|d\theta|}{\sqrt{\Theta}}=\frac{1}{E}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)$$

$$\phi-\phi_s=2\int_{r_0}^{\infty}dr\frac{E(r^2+a^2)-L_z a}{\Delta\sqrt{\mathcal{R}}}-\int_{\theta_s}^{\theta}|d\theta'|\left(\frac{aE}{\sqrt{\Theta}}-\frac{L_z}{\sin^2\theta'\sqrt{\Theta}}\right)-a\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)$$

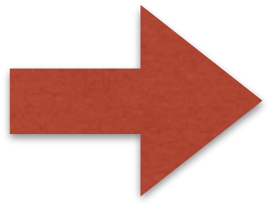
turning pointが不安定円軌道上にあると光線は巻き付く

光線の保存量と不安定円軌道半径

- turning pointが不安定円軌道のところ、という条件を考える。

r方向の運動方程式

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}}$$



r = 一定の軌道

$$\mathcal{R} = 0$$

有効ポテンシャルの山

$$\frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0$$

- ２つの保存量と不安定円軌道半径の関係

$$\xi \equiv \frac{L_z}{E} = \frac{r_c^2(r_c - 3M) + a^2(r_c + M)}{a(M - r_c)}$$

$$\eta \equiv \frac{\mathcal{Q}}{E^2} = \frac{r_c^3(4Ma^2 - r_c(r_c - 3M)^2)}{a^2(M - r_c)^2}$$

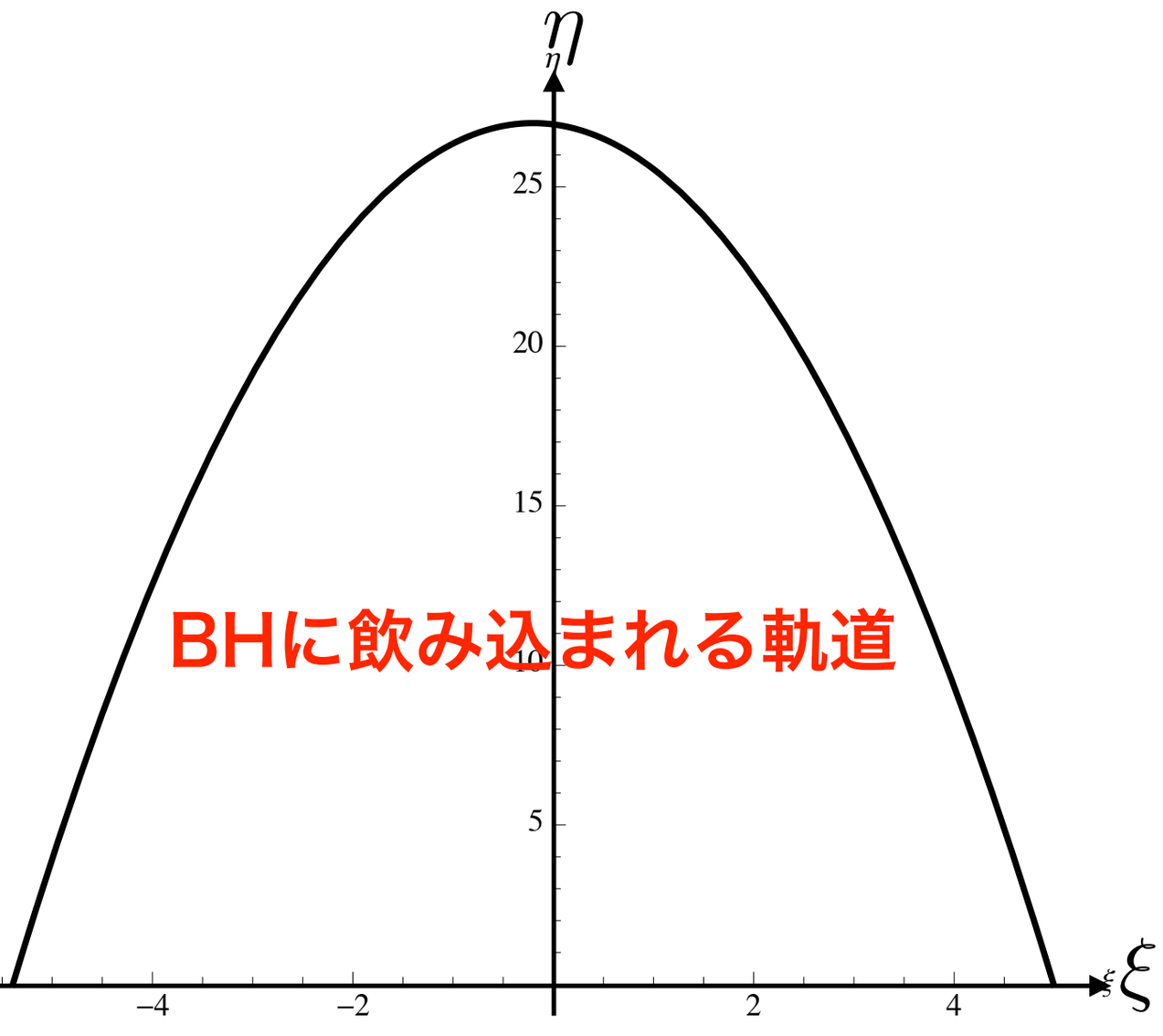
Light region

光線は２つの保存量 $(\xi\ ,\ \eta)$ で決まる。

ξとη の関係をプロットする。

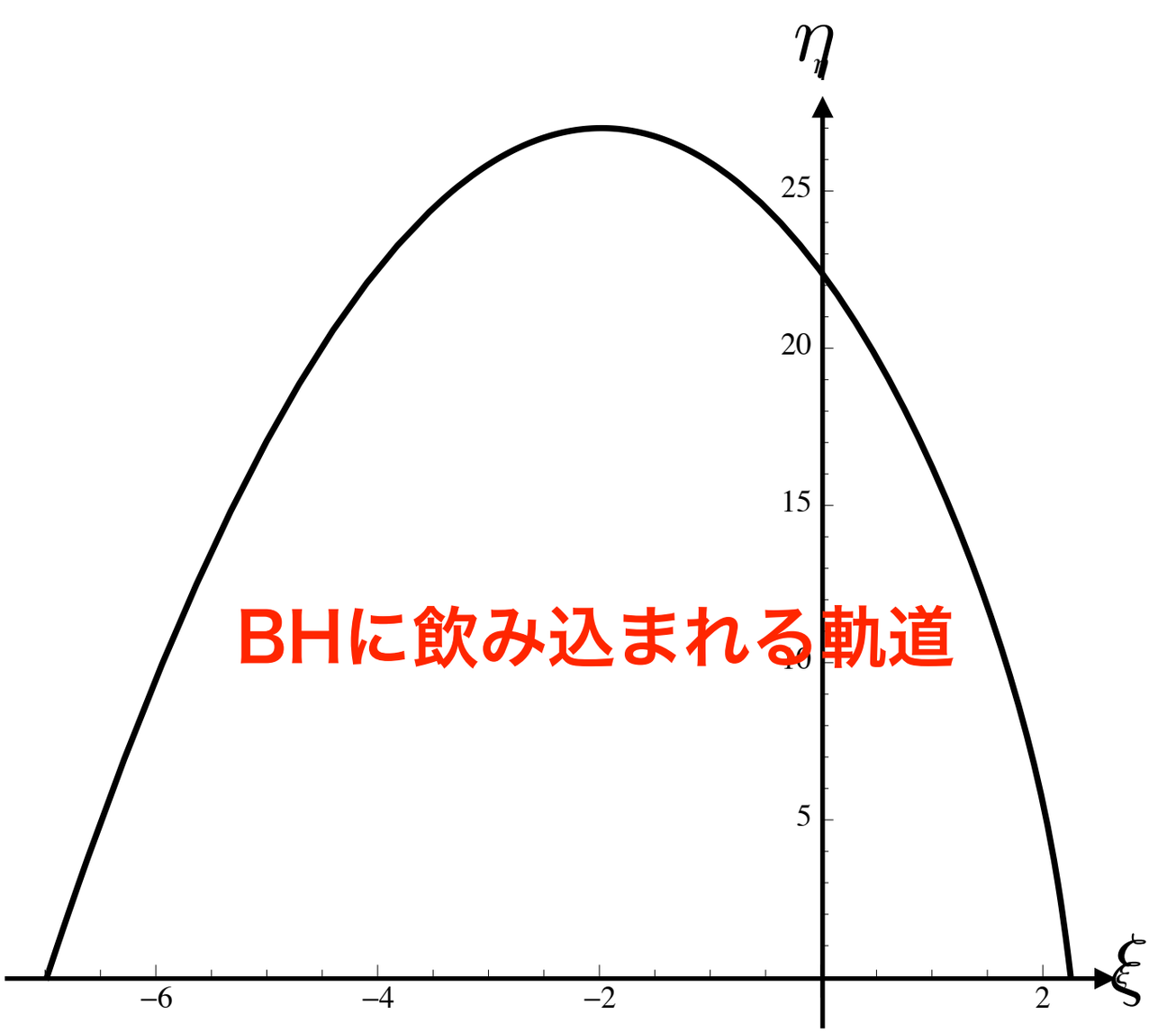
➡ どの光線がブラックホールに飲み込まれるかが分かる。

$a = 0.1$



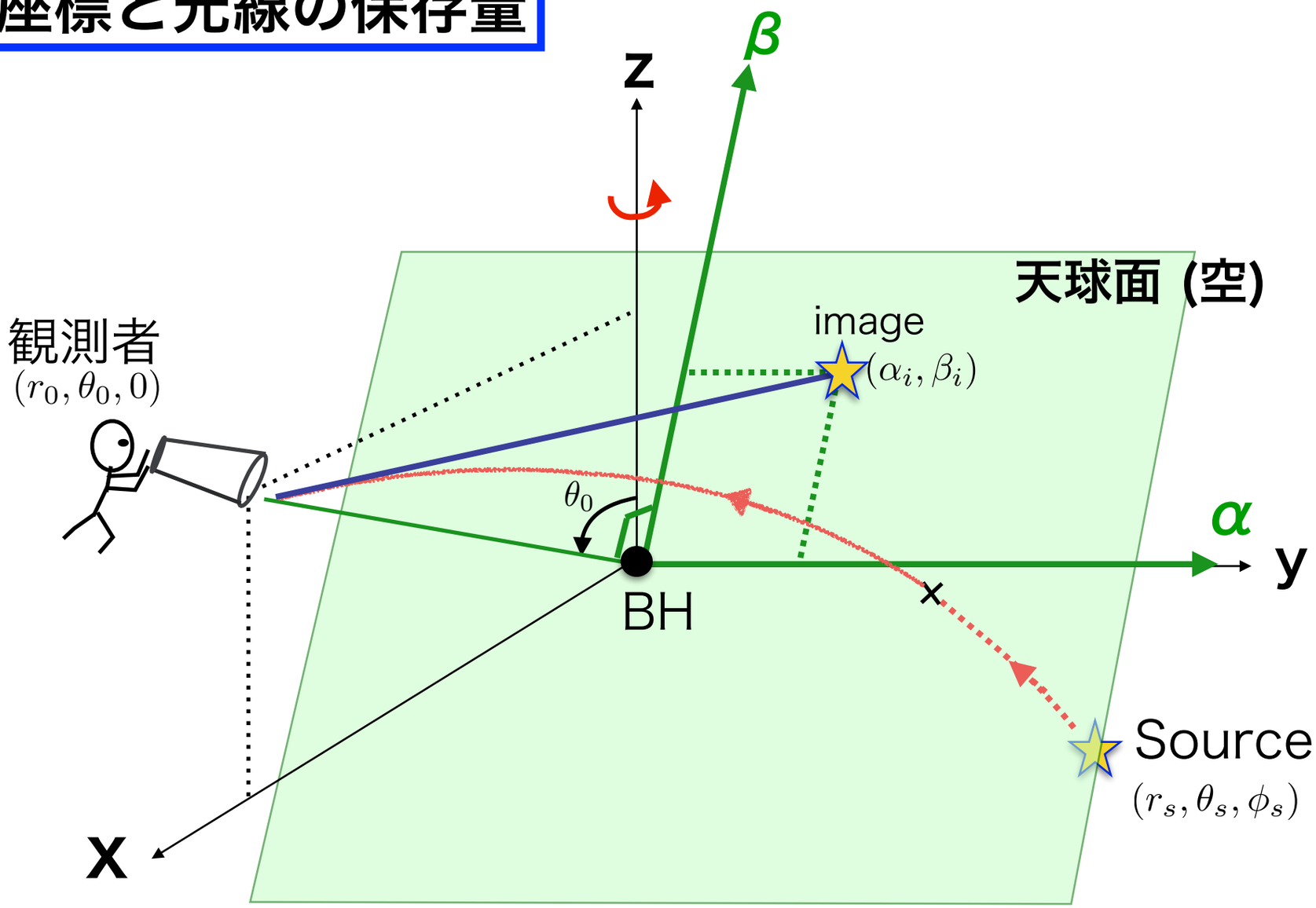
BHに飲み込まれる軌道

$a = 0.99$



BHに飲み込まれる軌道

天球面の座標と光線の保存量



○ 天球面の座標と光線の保存量の関係

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin\theta_0}$$

$$\beta = \sqrt{\eta + a^2\cos^2\theta_0 - \xi^2\cot^2\theta_0}$$

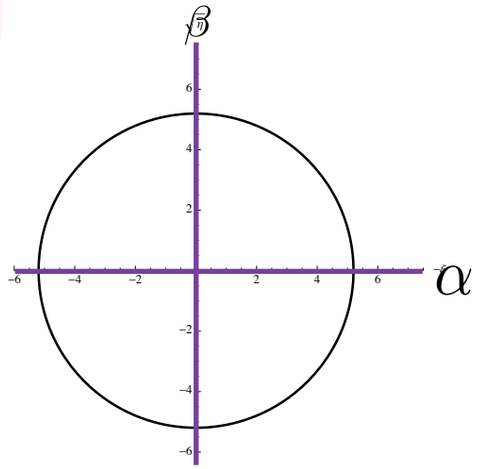
不安定円軌道半径と関係ついている

α β 平面にプロットするとシャドウの輪郭が描ける

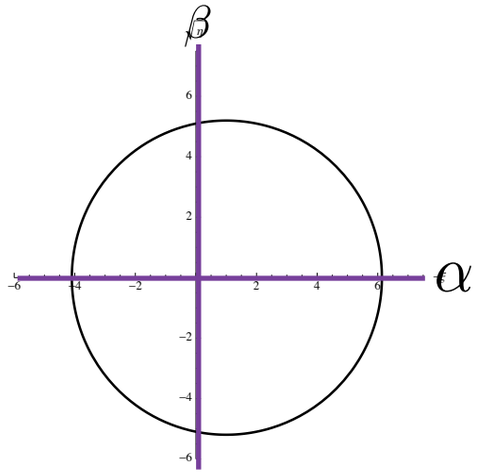
ブラックホールシャドウの輪郭

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

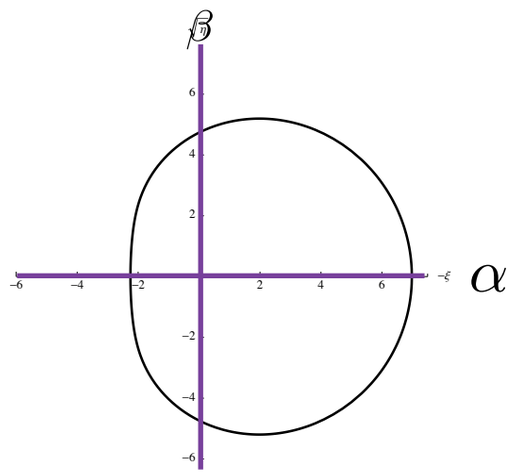
a=0.001



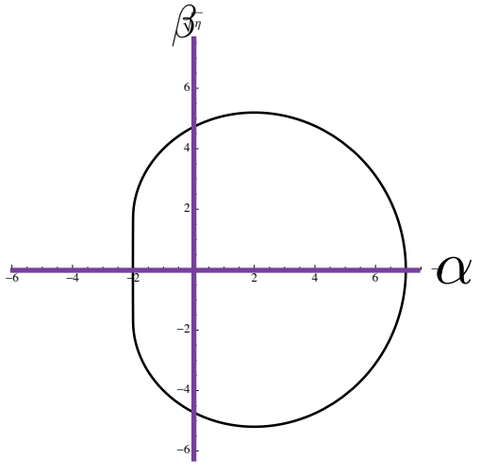
a=0.5



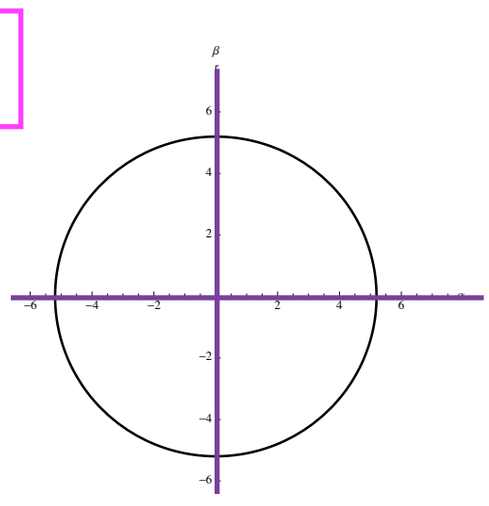
a=0.99

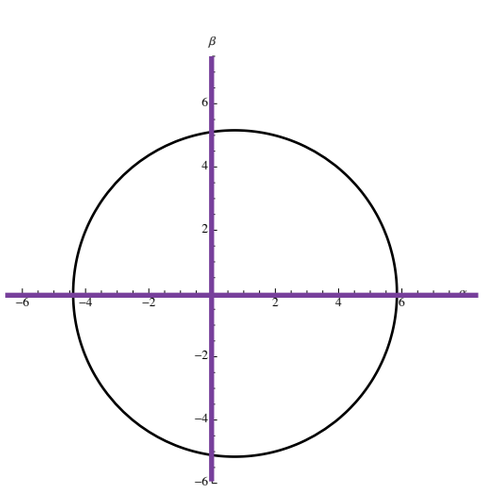


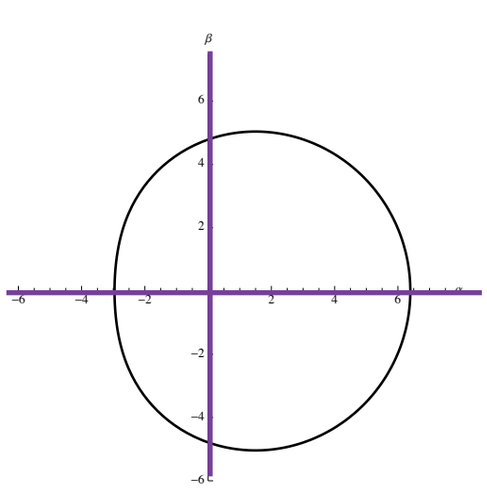
a=0.99999

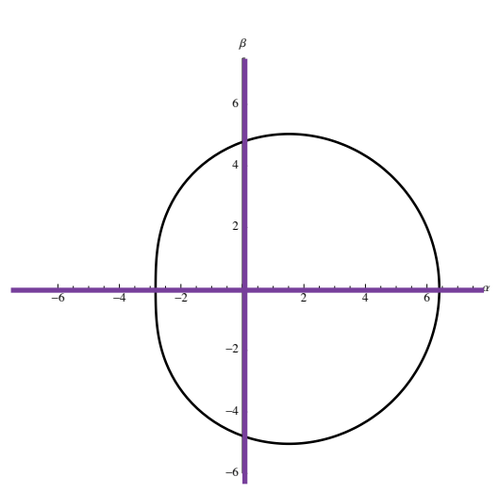


$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

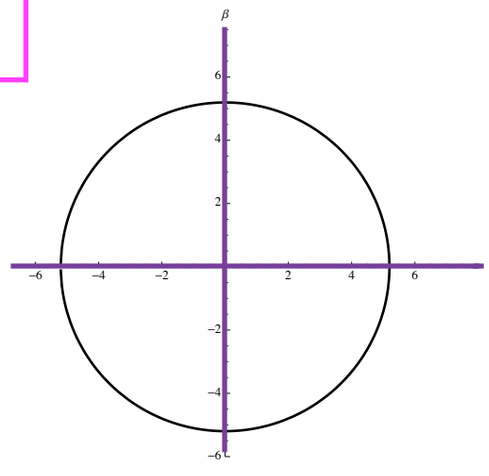


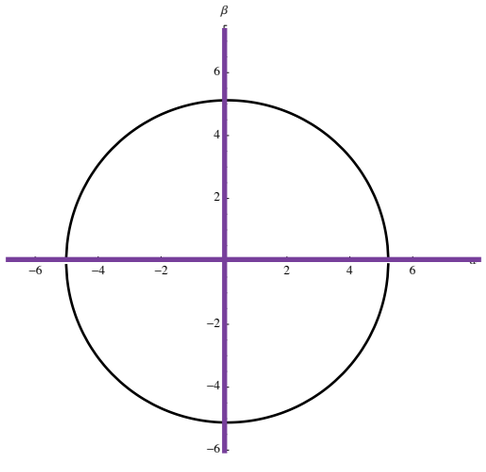


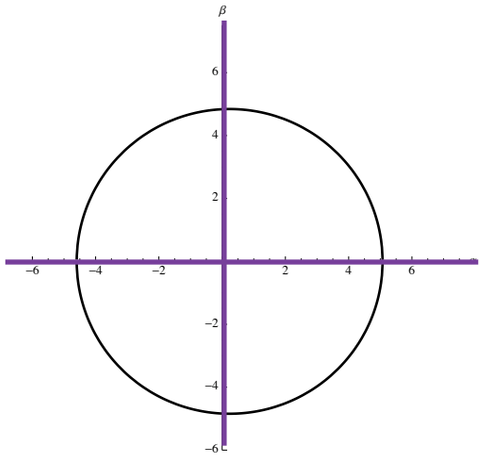


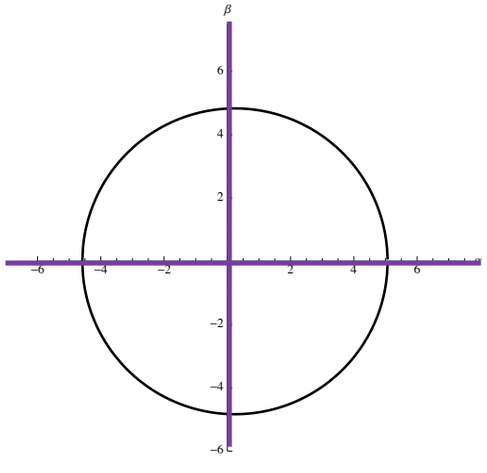


$\theta_0 = 0$









ここまでのまとめ

- 光線は２つの保存量で指定される

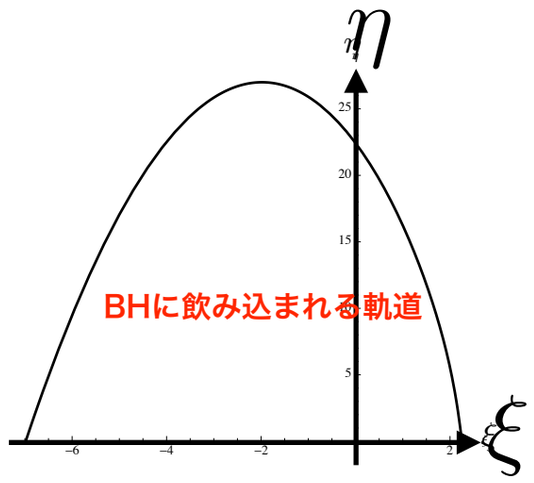
$$\xi = \frac{L_z}{E} \qquad \eta = \frac{\mathcal{Q}}{E^2}$$

- 保存量と不安定円軌道半径の関係

$$\xi = \frac{r_c^2(r_c - 3M) + a^2(r_c + M)}{a(M - r_c)} \qquad \eta = \frac{r_c^3(4Ma^2 - r_c(r_c - 3M)^2)}{a^2(M - r_c)^2}$$

turning pointかつ不安定円軌道半径

- どの光線がブラックホールに落ち込むか



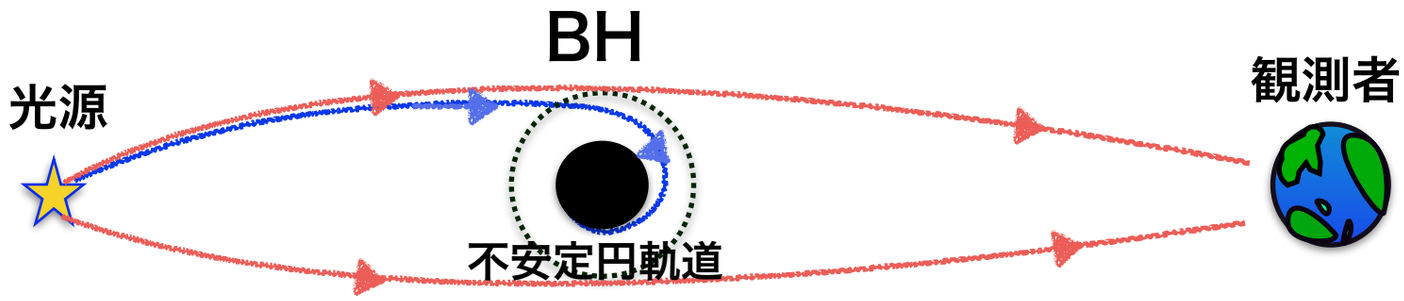
- 観測者の天球面の座標へマップする。

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin\theta_0} \qquad \beta = \sqrt{\eta + a^2\cos^2\theta_0 - \xi^2\cot^2\theta_0}$$

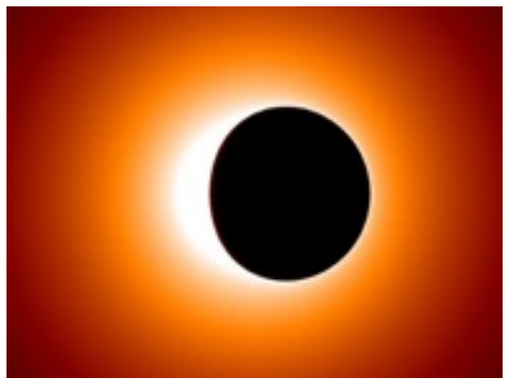
2.波動光学で描くシャドウ

Motivation　ブラックホールを波で”見る”

○ 光線を用いた場合　(massless粒子の運動方程式)



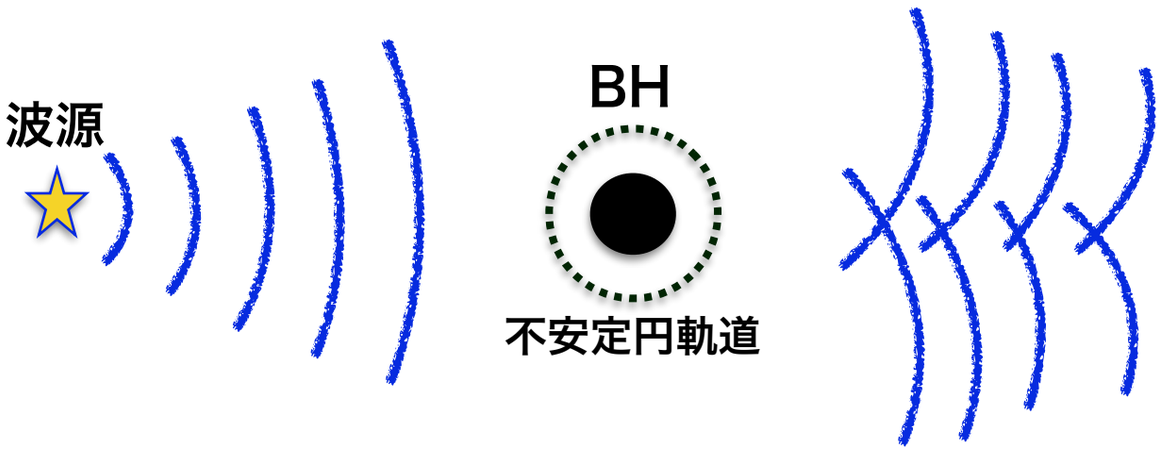
ブラックホールシャドウ



© M. Moscibrodzka & H. Falcke,
Radboud-Universität Nimwegen

不安定円軌道 ⟷ シャドウの輪郭

○ 波を用いた場合　(電波や重力波)



干渉パターンなどの波動効果

シャドウよりも豊富な情報

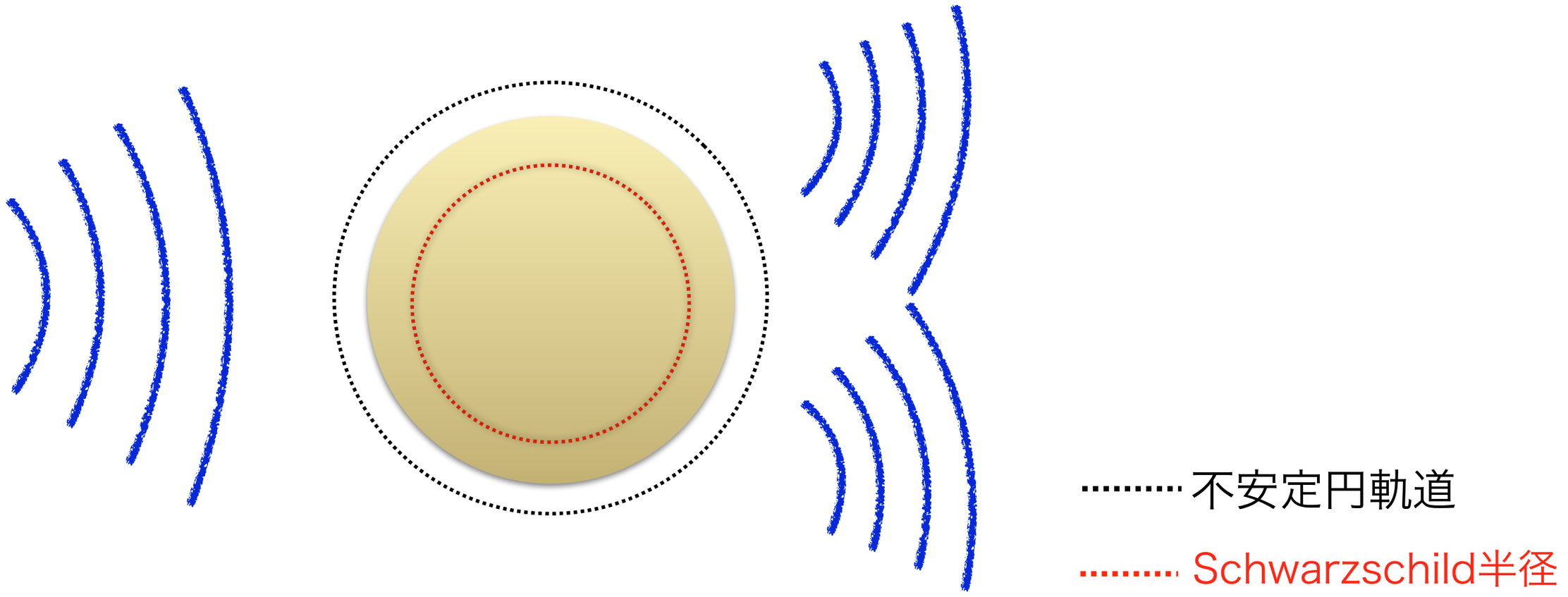
なぜ波でやりたいのか？

1. 純粋な興味　　どんな像が得られるのか？

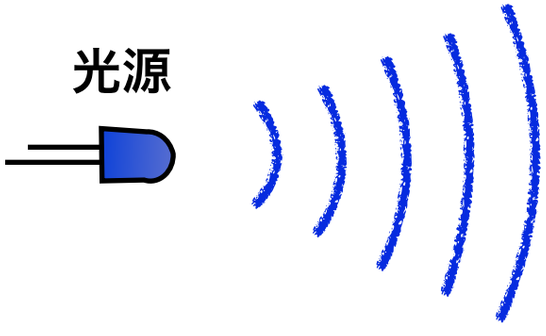
2.干渉　　ブラックホール準固有振動　　(不安定円軌道に関係)

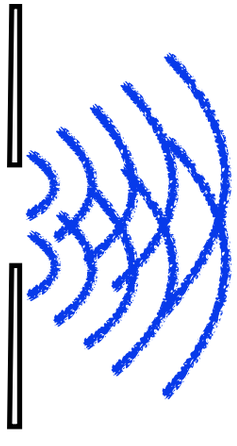
3.その他の波動効果　　不安定円軌道の中も見える　　(tunneling)

不安定円軌道を持つ星とブラックホールの判別に使える

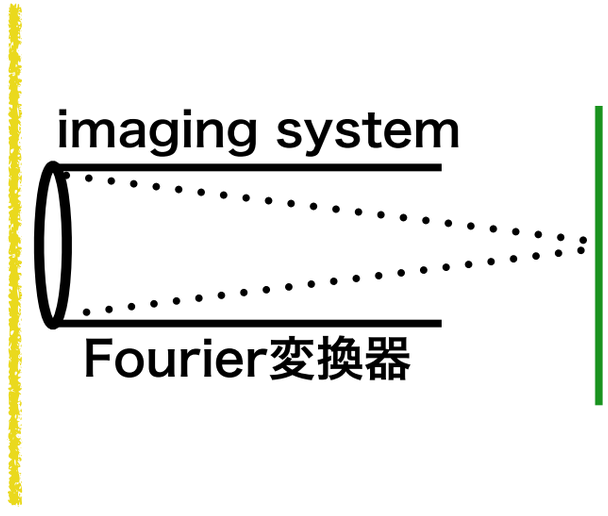


波動光学における干渉と像





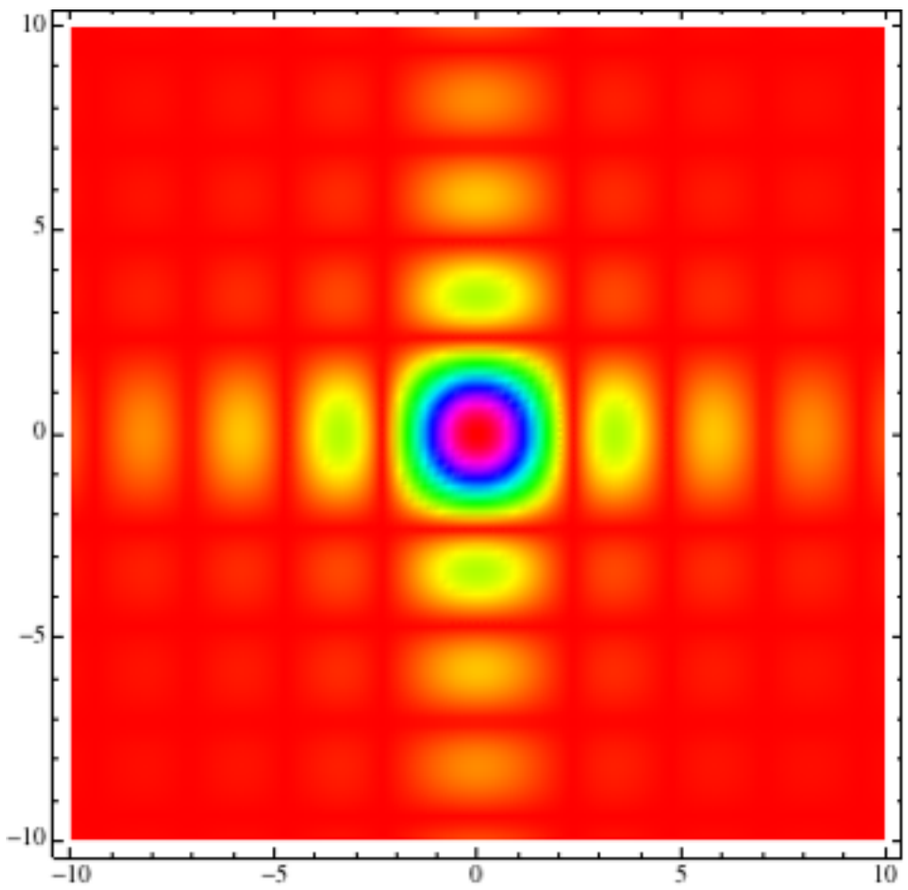
矩形開口(正方形)



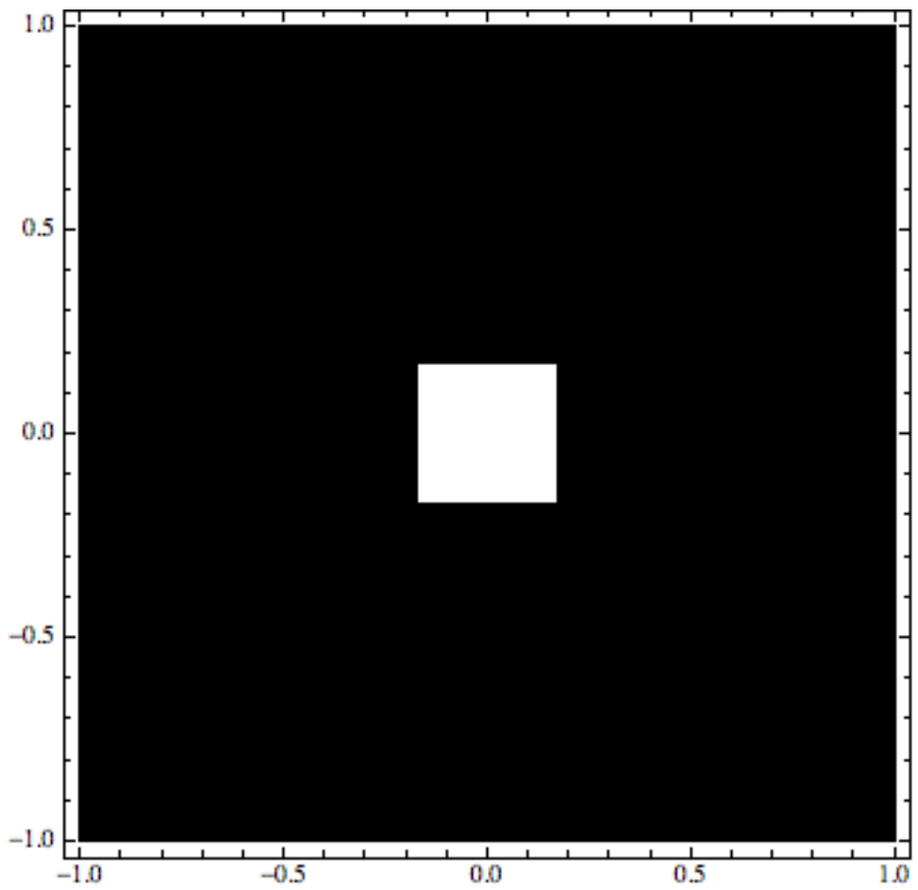
スクリーン
(x, y)

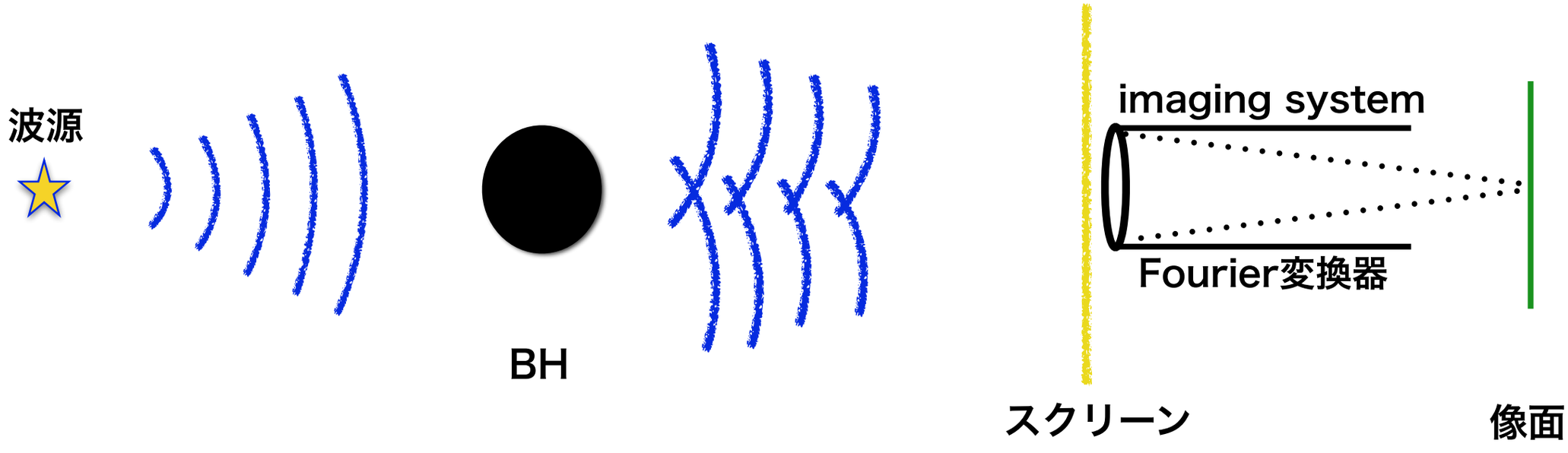
像面
(x_I, y_I)

干渉パターン



像





①　ブラックホール時空上での波の散乱問題

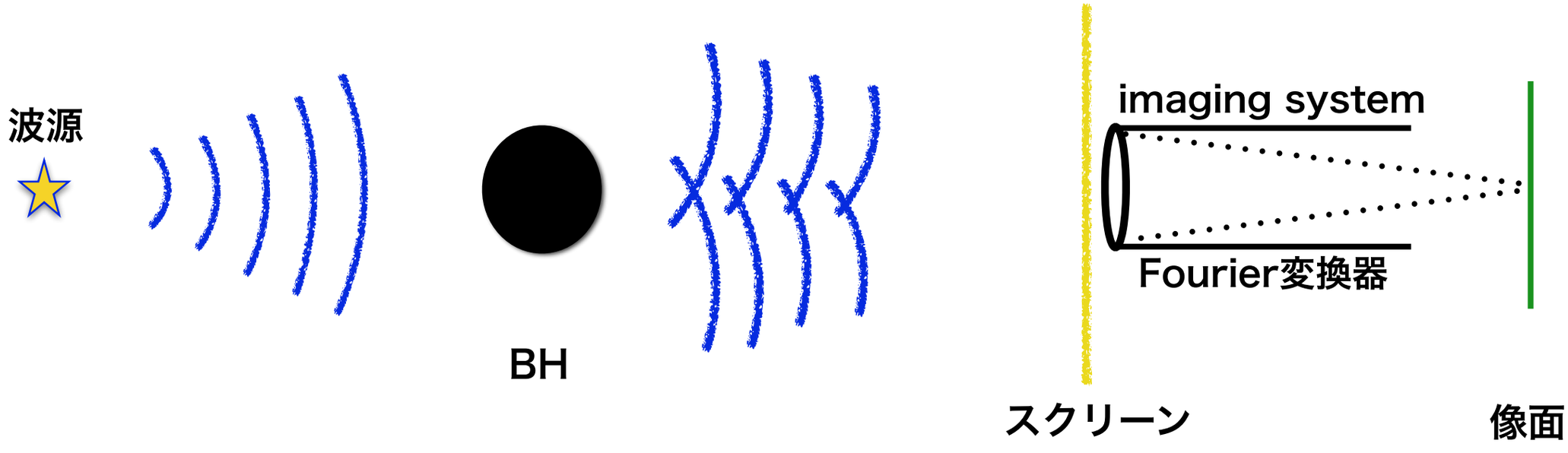
Green関数を用いた計算　　(散乱体はブラックホール)

②　レンズ方程式の再導出

波動光学 —Eikonal極限→ 幾何光学

③　干渉パターンと像

ブラックホールシャドウの輪郭の再現



① **ブラックホール時空上での波の散乱問題**

Green関数を用いた計算　　(散乱体はブラックホール)

② **レンズ方程式の再導出**

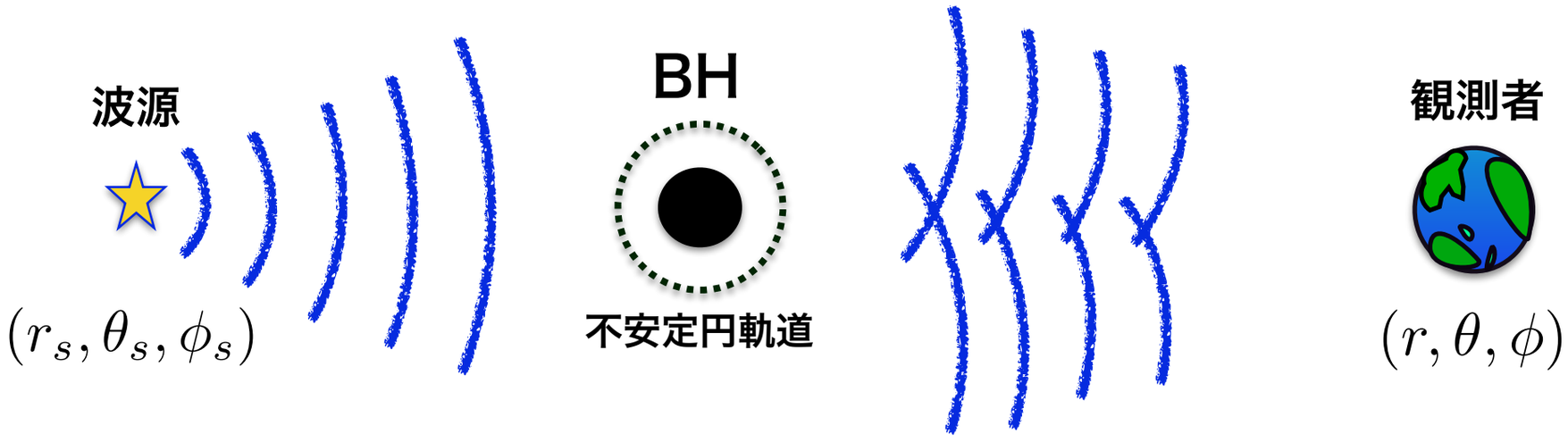
波動光学 —Eikonal極限→ 幾何光学

③ **干渉パターンと像**

ブラックホールシャドウの輪郭の再現

散乱問題

ブラックホールを散乱体とする波の散乱問題を考える。



波源　　偏光は考えない (scalar wave) 、単色点源

Klein Gordon方程式

$$\Box\Phi = S \qquad S \sim e^{-i\omega t}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_s)$$

Green関数

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x_s}) = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x_s})$$

Green関数と斉次解

Green関数が満たす式

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x_s}) = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x_s})$$

G は 斉次方程式 $\Box\Phi = 0$ の独立解を用いて構成できる

$$G \sim \frac{\Phi^{(1)}(\vec{x})\Phi^{(2)}(\vec{x}_s)}{W}$$

W : Wronskian

斉次方程式の解を求める

$$\Box\Phi = 0$$

変数分離できる

$$\Phi = \sum_{l,m} \frac{R_{lm}(r)}{\sqrt{\Delta}} S_{lm}(\theta) e^{-i\omega t} e^{im\phi}$$

WKB近似で計算

r成分

$$\frac{d^2R_{lm}}{dr^2} + \omega^2 F R_{lm} = 0$$

短波長

$$\omega M \gg 1$$

微小量

$$\epsilon = \frac{1}{\omega M} \ll 1$$

WKB近似 (next to leading まで)

$$R_{lm} \sim \frac{1}{(\omega^2 F)^{1/4}}\ e^{i\int^r dr\sqrt{\omega^2 F}}$$

Hamilton Jacobi のSと対応

$$S = -Et + L_z\phi + \int^r dr\ \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} + \int^\theta d\theta\ \sqrt{\Theta}$$

$$= \int^r dr \frac{\sqrt{(\omega(r^2+a^2) - ma)^2 - \Delta(A_{lm} + a^2\omega^2 - 2am\omega)}}{\Delta}$$

波の計算

$$= \int^r dr \frac{\sqrt{(E(r^2+a^2) - L_z a)^2 - \Delta(\mathcal{Q} + L_z^2 + a^2E^2 - 2aL_zE)}}{\Delta}$$

粒子の計算

保存量の対応

$$E \longleftrightarrow \omega$$

$$L_z \longleftrightarrow m$$

$$\mathcal{Q} \longleftrightarrow A_{lm} - m^2$$

遠方での表式と独立解

$$\frac{d^2R_{lm}}{dr^2}+\omega^2FR_{lm}=0$$

短波長

$$\omega M\gg 1$$

微小量

$$\epsilon=\frac{1}{\omega M}\ll 1$$

観測者と波源はBHから遠方にあるとする。$r\ ,\ r_s\gg 1$

WKB解

$$R_{lm}\sim\frac{1}{(\omega^2F)^{1/4}}\ e^{i\int^r dr\sqrt{\omega^2F}}$$

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega r}\right)$

$$R_{lm}=\frac{1}{\omega r}\exp\left[i\left\{\omega r_*-\frac{\pi l}{2}+\delta_{lm}+\frac{A_{lm}+a^2\omega^2}{2\omega r}\right\}\right]$$

phase shift

$$\delta_{lm}=\omega\int_{r_0}^{\infty}dr\left(F^{\frac{1}{2}}-\frac{dr^*}{dr}\right)-\omega r_0^*+\frac{\pi}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)$$

独立解

$$R_{lm}^{(1)}=\frac{1}{\omega r}\sin\left(\omega r^*-\frac{\pi l}{2}+\delta_{lm}+\frac{A_{lm}+a^2\omega^2}{2\omega r}\right)$$

$$R_{lm}^{(2)}=\frac{-i}{\omega r}\exp\left[i\left(\omega r^*-\frac{\pi l}{2}+\delta_{lm}+\frac{A_{lm}+a^2\omega^2}{2\omega r}\right)\right]$$

θ成分

$$\Phi = \sum_{l,m} \frac{R_{lm}(r)}{\sqrt{\Delta}} S_{lm}(\theta) e^{-i\omega t} e^{im\phi}$$

Spheroidal harmonics

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_{lm}}{d\theta}\right) + \left(a^2\omega^2\cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + A_{lm}\right) S_{lm} = 0$$

$$x = \log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 S_{lm}}{dx^2} + \Theta\sin^2\theta\ S_{lm}$$

Schrödinger型の方程式

WKB解

$$S_{lm} \sim \frac{1}{\Theta^{1/4}}[e^{iS_\theta} + (-)^{l+m} e^{-iS_\theta}]$$

$$S_\theta \equiv \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta\sqrt{\Theta}$$

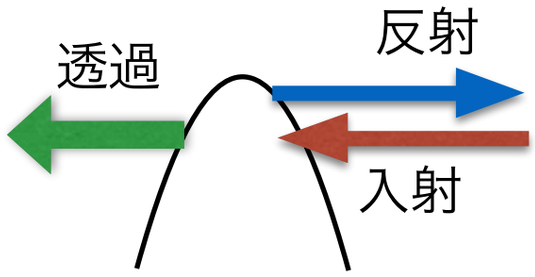
Green関数

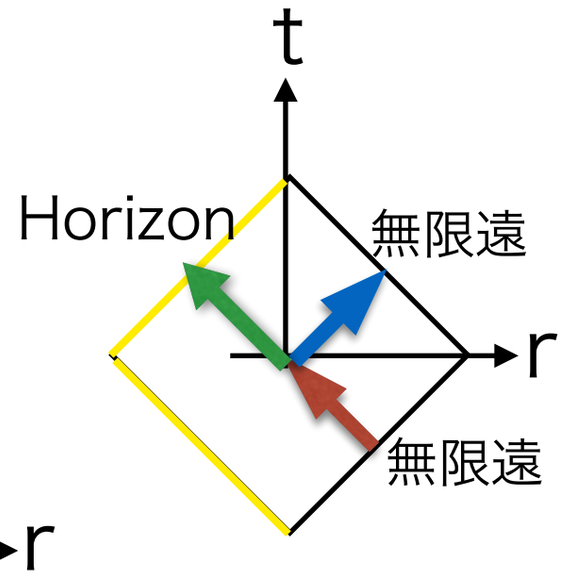
○ KG方程式のWKB解を用いて構成する

$$G(x,x_s) = i\omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} R^{(1)}_{lm}(r_s) R^{(2)}_{lm}(r) S_{lm}(\theta) S^*_{lm}(\theta_s) e^{im(\phi-\phi_s)}$$

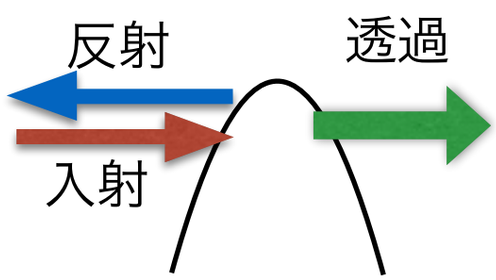
2つの独立なmodeで組む

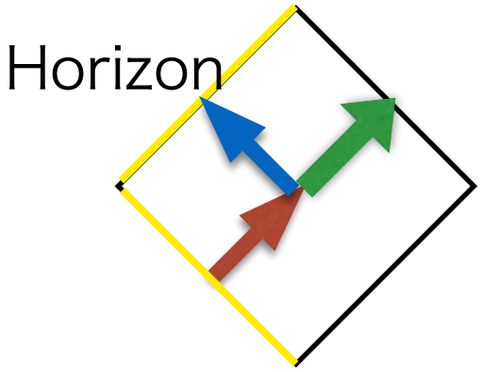
$$R^{(1)}_{lm} = \frac{1}{\omega r} \sin\left(\omega r^* - \frac{\pi l}{2} + \delta_{lm} + \frac{A_{lm} + a^2\omega^2}{2\omega r}\right)$$





$$R^{(2)}_{lm} = \frac{-i}{\omega r} \exp\left[i\left(\omega r^* - \frac{\pi l}{2} + \delta_{lm} + \frac{A_{lm} + a^2\omega^2}{2\omega r}\right)\right]$$

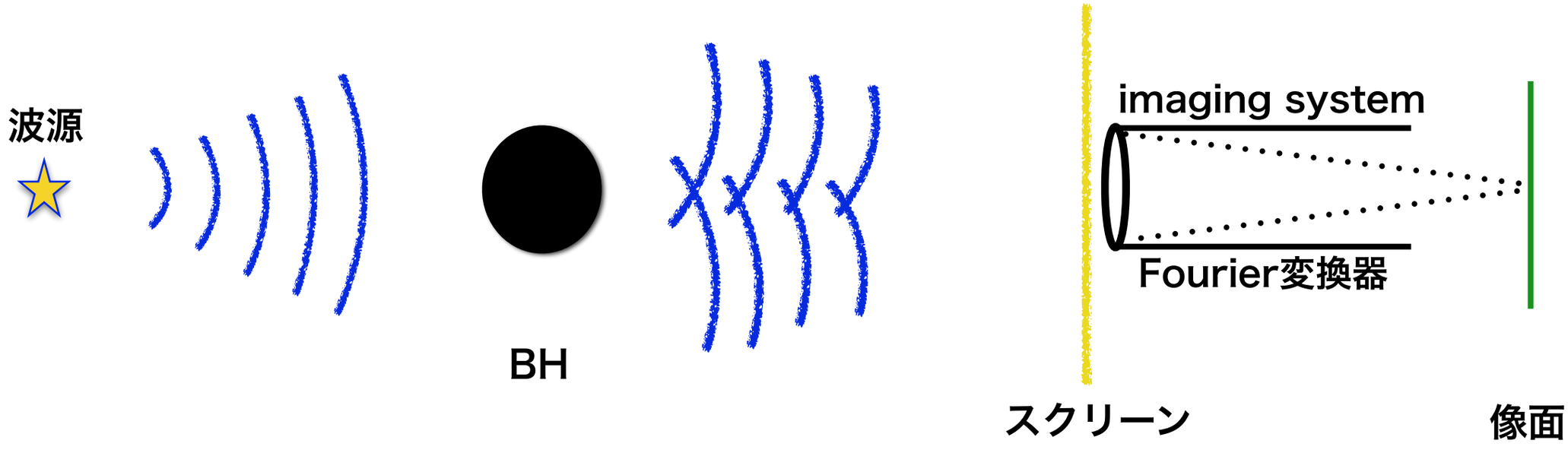




Green関数

$$G(x,x_s) = \frac{e^{i\omega(r^*+r_s^*)}}{2i\omega r r_s} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} e^{im(\phi-\phi_s)} S_{lm}(\theta) S^*_{lm}(\theta_s) e^{i2\delta_{lm}} e^{i\frac{A_{lm}+a^2\omega^2}{2\omega r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

散乱体の情報



①　ブラックホール時空上での波の散乱問題

Green関数を用いた計算　　(散乱体はブラックホール)

②　レンズ方程式の再導出

波動光学　—Eikonal極限→　幾何光学

③　干渉パターンと像

ブラックホールシャドウの輪郭の再現

停留条件と光線の方程式

○ Green関数(WKB form)

$$G(x,x_s)=\frac{e^{i\omega(r^*+r_s^*)}}{2i\omega r r_s}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}e^{im(\phi-\phi_s)}S_{lm}(\theta)S_{lm}^*(\theta_s)e^{i2\delta_{lm}}e^{i\frac{A_{lm}+a^2\omega^2}{2\omega r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

$$\sim\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}e^{im(\phi-\phi_s)}\ e^{i\int_{\theta_s}^{\theta}\sqrt{\Theta_w}d\theta}e^{i2\delta_{lm}}\ e^{i\frac{A_{lm}+a^2\omega^2}{2\omega r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

○ 位相部分の停留条件を求める　(最小作用の原理、フェルマーの原理)

lに関する停留条件

$$2\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{\mathcal{R}}}-\int_{\theta_s}^{\theta}\frac{|d\theta|}{\sqrt{\Theta}}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)$$

レンズ方程式

mに関する停留条件

$$\phi-\phi_s=2\int_{r_0}^{\infty}dr\frac{\omega(r^2+a^2)-ma}{\Delta\sqrt{\mathcal{R}}}-\int_{\theta_s}^{\theta}|d\theta'|\left(\frac{a\omega}{\sqrt{\Theta}}-\frac{m}{\sin^2\theta'\sqrt{\Theta}}\right)-a\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)$$

レンズ方程式と光線の巻きつき Schwarzschild

$$G(x,x_s)=\frac{e^{i\omega(r^*+r_s^*)}}{2i\omega r r_s}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^*(\theta_s,\phi_s)e^{i2\delta_l}e^{i\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{2\omega}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

mの和は加法定理を使う

$$=\frac{e^{i\omega(r^*+r_s^*)}}{4\pi i\omega r r_s}\sum_{W=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{i2\pi W(L-1/2)}LP_L(\cos\gamma)e^{i2\delta_L}e^{i\frac{L^2}{2\omega r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}dL$$

Poissonの和公式

停留条件

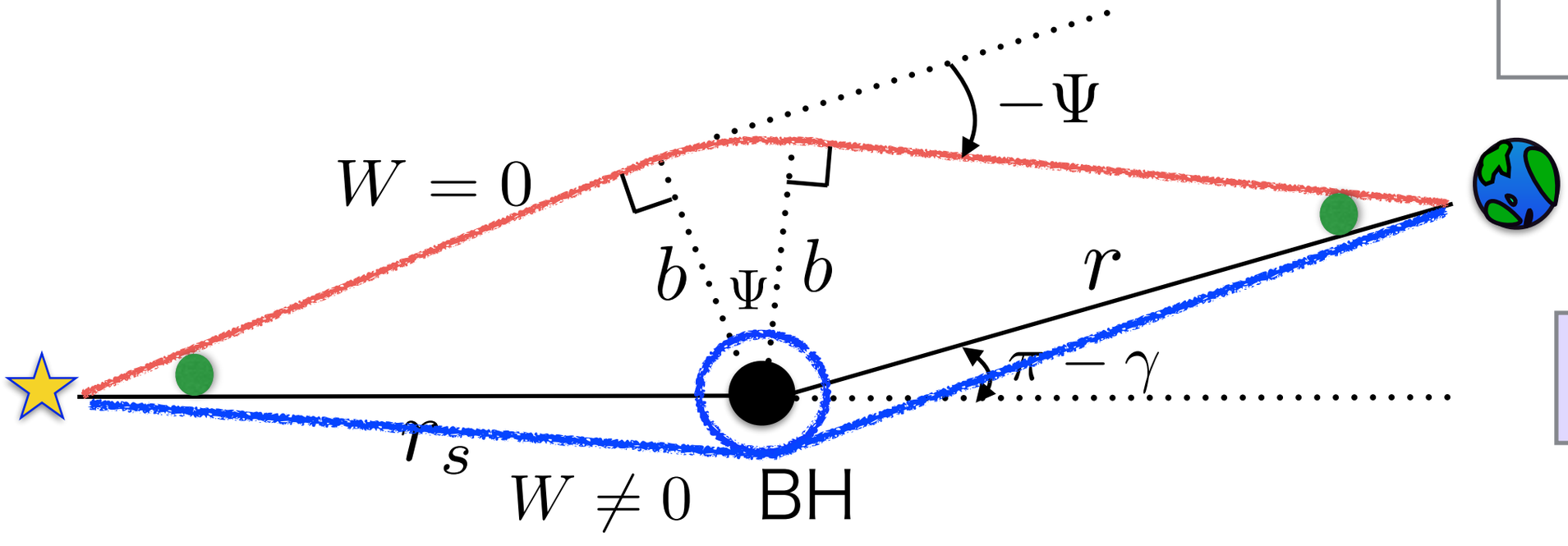
$$b\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)=-\Psi-2\pi W\pm(\pi-\gamma)$$

$r, r_s \gg 1$

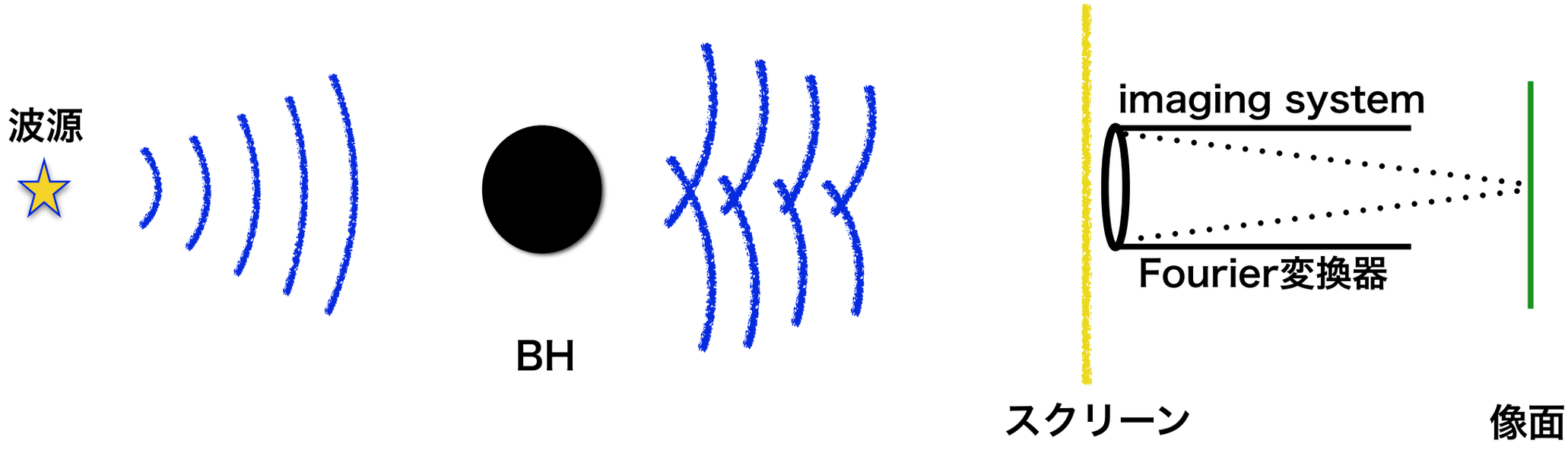
$L=l+\frac{1}{2}$　$\Psi\equiv 2\frac{d\delta_L}{dL}$

$b=\frac{L}{\omega}$　:衝突径数

W　:整数



W：巻きつき数



①　ブラックホール時空上での波の散乱問題

Green関数を用いた計算　　(散乱体はブラックホール)

②　レンズ方程式の再導出

波動光学 —Eikonal極限→ 幾何光学

③　干渉パターンと像

ブラックホールシャドウの輪郭の再現

Green関数の和

Schwarzschildの場合　$S_{lm}(\theta)e^{im\phi}$ → $Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$G(x,x_s)=\frac{e^{i\omega(r^*+r_s^*)}}{2i\omega r r_s}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta_s,\phi_s)e^{i2\delta_l}e^{i\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{2\omega}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

加法定理　　S行列

lの和

・Poissonの和公式

$$\sum_{l=0}^{\infty} \longrightarrow \sum_{W=-\infty}^{\infty}\int dL\; e^{i2\pi W(L-1/2)}$$

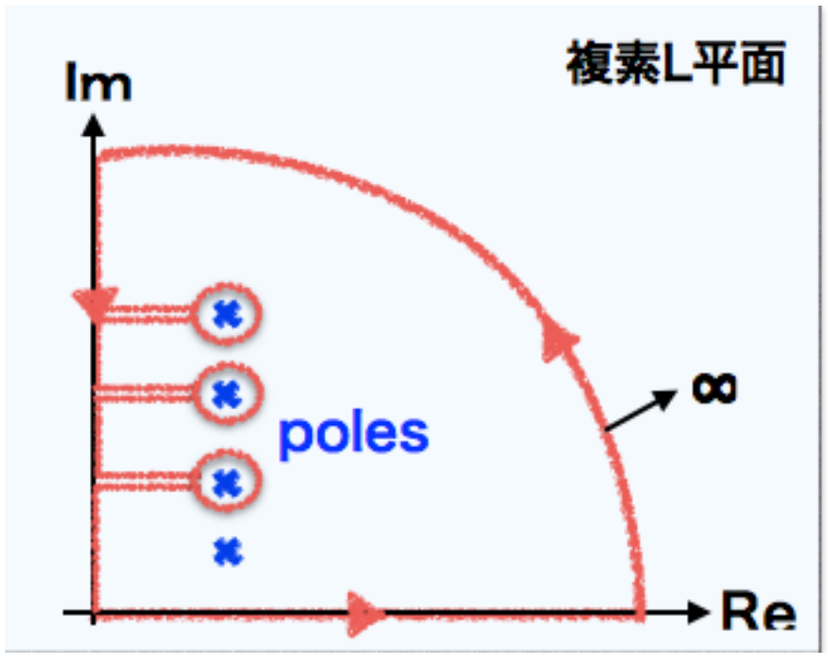
W：巻きつき数(整数)

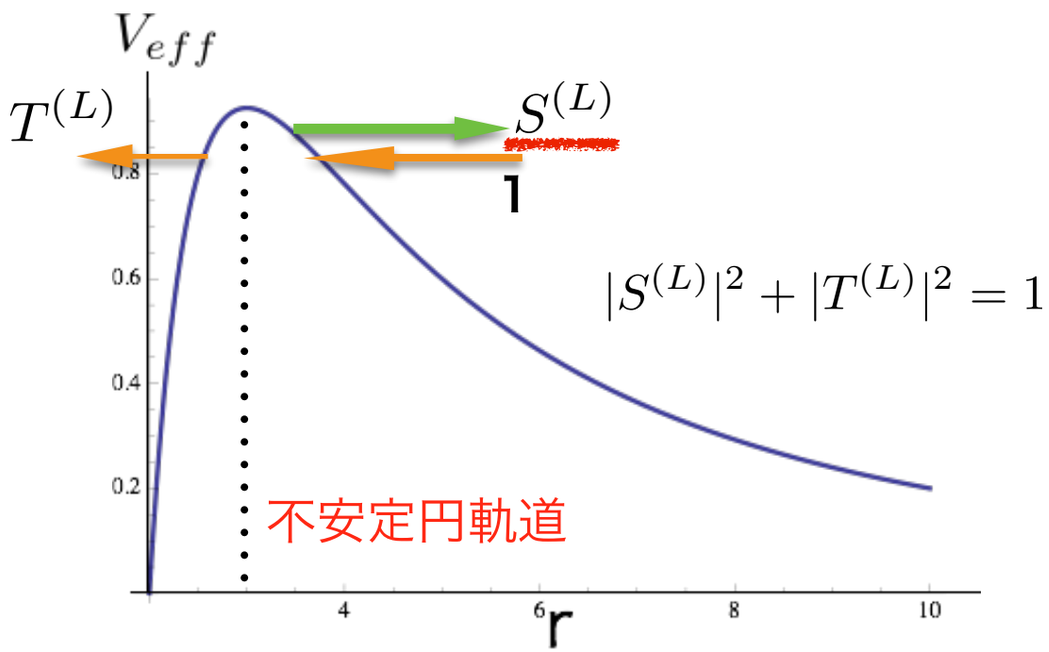
・不安定円軌道に巻き付いたもののみ取る。　$W=1$ のみ取る

・S行列のpoleを拾う(留数定理)

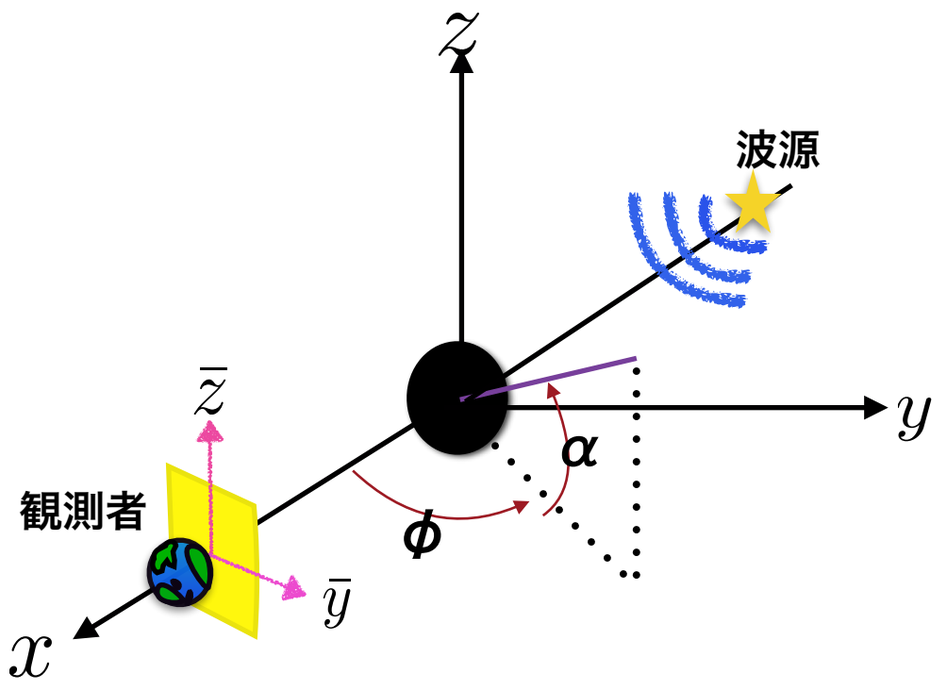
$$L_n=3\sqrt{3}M\omega+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

WKB近似で計算した BH準固有振動



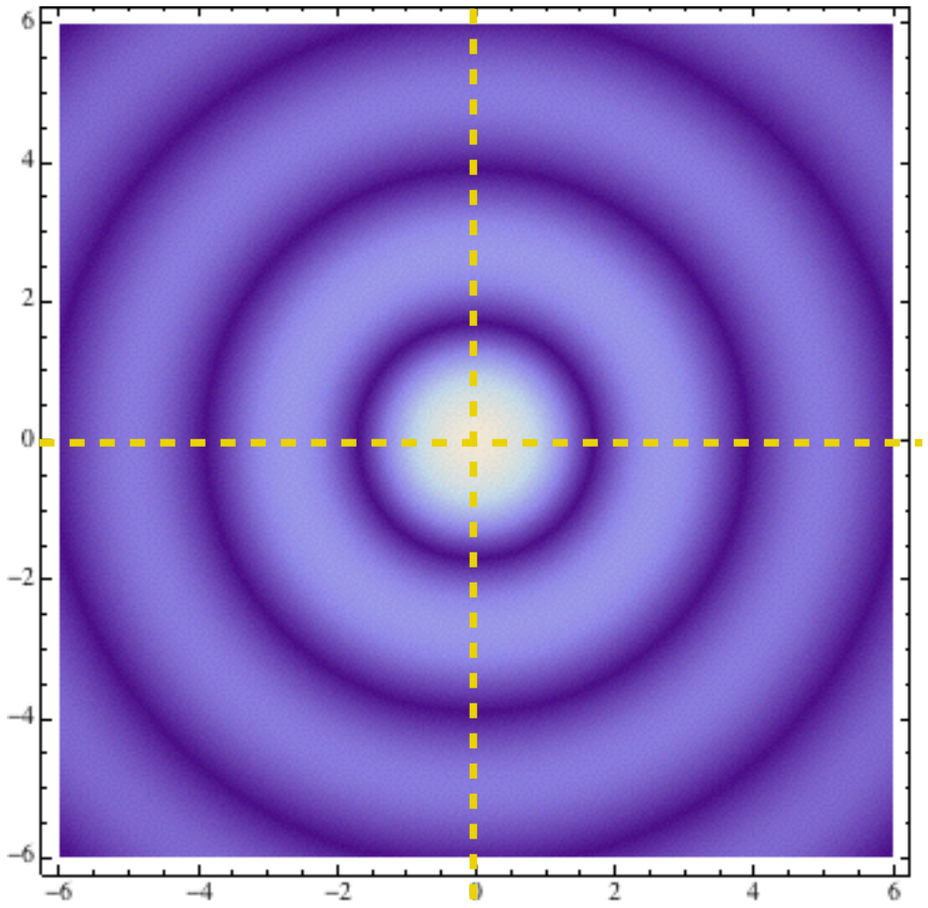


Schwarzschildの場合

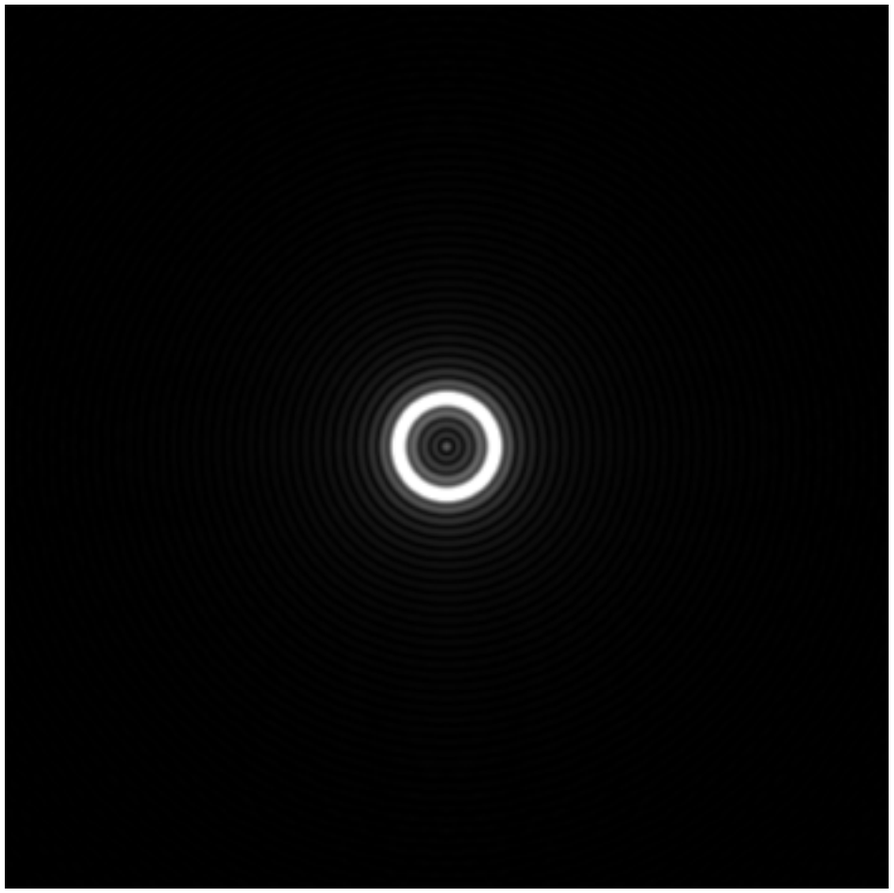


$W = 1$のみ ⟷ 不安定円軌道に巻き付いたもののみ見る

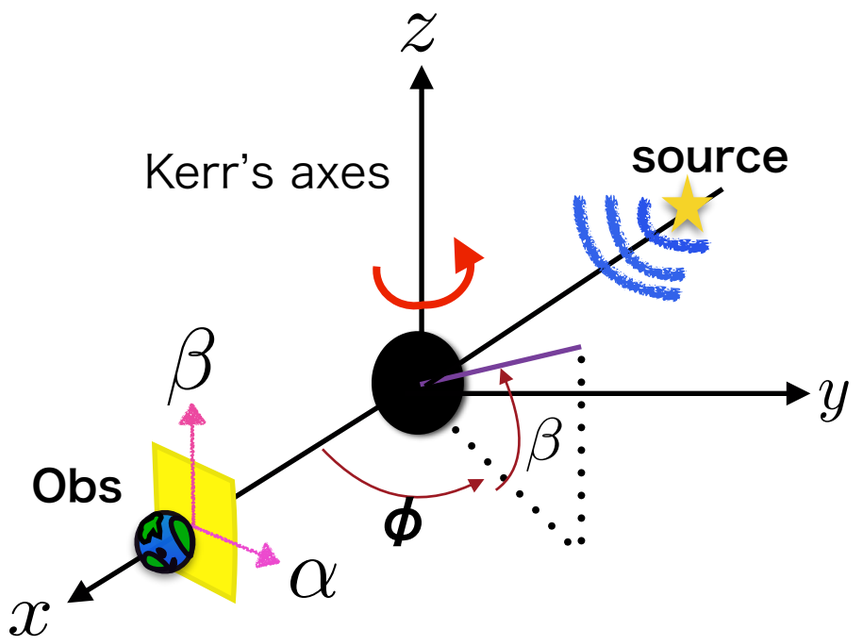
干渉パターン



image



Green関数　Kerrの場合



sourceの位置	$\theta_s = \frac{\pi}{2}$	$\phi_s = \pi$
観測者の位置	$\theta \sim \frac{\pi}{2}$	$\phi \sim 0$
スクリーン上の座標	$\alpha = \phi$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta \ll 1$

Green関数

$$G(x, x_s) = \frac{e^{i\omega(r^* + r_s^*)}}{2i\omega r r_s} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} e^{im(\phi - \phi_s)} S_{lm}(\theta) S_{lm}^*(\theta_s) e^{i2\delta_{lm}} e^{i\frac{A_{lm} + a^2\omega^2}{2\omega r}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_s}\right)}$$

$$\mathcal{Q} \longleftrightarrow A_{lm} - m^2$$

$$S_{lm}(\theta) S_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\left[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta} + e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}\right]$$

$$G = \frac{e^{i\omega(r + r_s)}}{2\pi i\omega r r_s} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} e^{im(\alpha - \pi)} \frac{2}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\left[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta} + e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}\right] e^{i\delta_{lm}} e^{i\frac{\mathcal{Q} + m^2 + a^2\omega^2}{2\omega}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_s}\right)}$$

和の処理(シャドウの計算をヒントに)

m, l について和を取る ⟷ いろいろな光線について足す

$$G = \frac{e^{i\omega(r+r_s)}}{2\pi i\omega r r_s} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} e^{im(\alpha-\pi)} \frac{2}{\sqrt{\mathcal{Q}}} \left[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta} + e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta} \right] e^{i\delta_{lm}} e^{i\frac{\mathcal{Q}+m^2+a^2\omega^2}{2\omega}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{r_c^3(4Ma^2 - r_c(r_c-3M)^2)}{a^2(M-r_c)^2}\,\omega^2 \qquad m = \frac{r_c^2(r_c-3M)+a^2(r_c+M)}{a(M-r_c)}\,\omega$$

mについての和は積分にしてしまう。

$$G = \frac{e^{i\omega(r+r_s)}}{2\pi i\omega r r_s} \sum_{W=-\infty}^{\infty} \int_{m_1}^{m_2} dm \int_0^{\infty} dL e^{2\pi i W\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} e^{im(\alpha-\pi)} \frac{2}{\sqrt{\mathcal{Q}}} \left[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta} + e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta} \right] e^{i\delta_{lm}} e^{i\frac{\mathcal{Q}+m^2+a^2\omega^2}{2\omega}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

l積分は留数定理

$$G = \frac{e^{i\omega(r+r_s)}}{2\pi i\omega r r_s} \int_{m_1}^{m_2} dm\; 2\pi i\gamma(\alpha,\beta,m,\mathcal{Q}) = \frac{e^{i\omega(r+r_s)}}{\omega r r_s} \int_{r_1}^{r_2} dr_c \underbrace{\frac{dm}{dr_c}\,\gamma(\alpha,\beta,m(r_c),\mathcal{Q}(r_c))}_{r_c\ \text{のみの関数}}$$

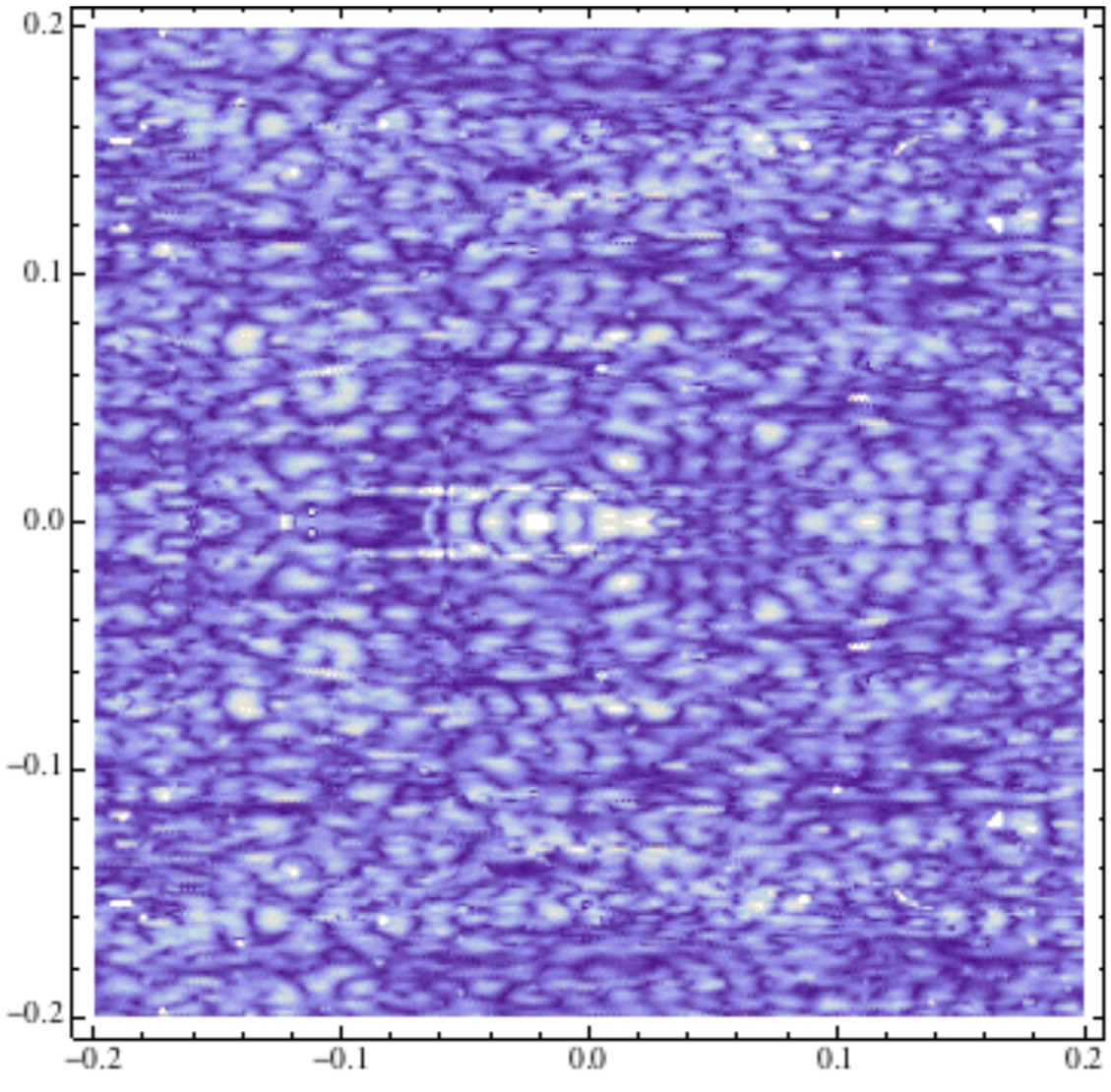
→ 干渉パターン

干渉パターンと像

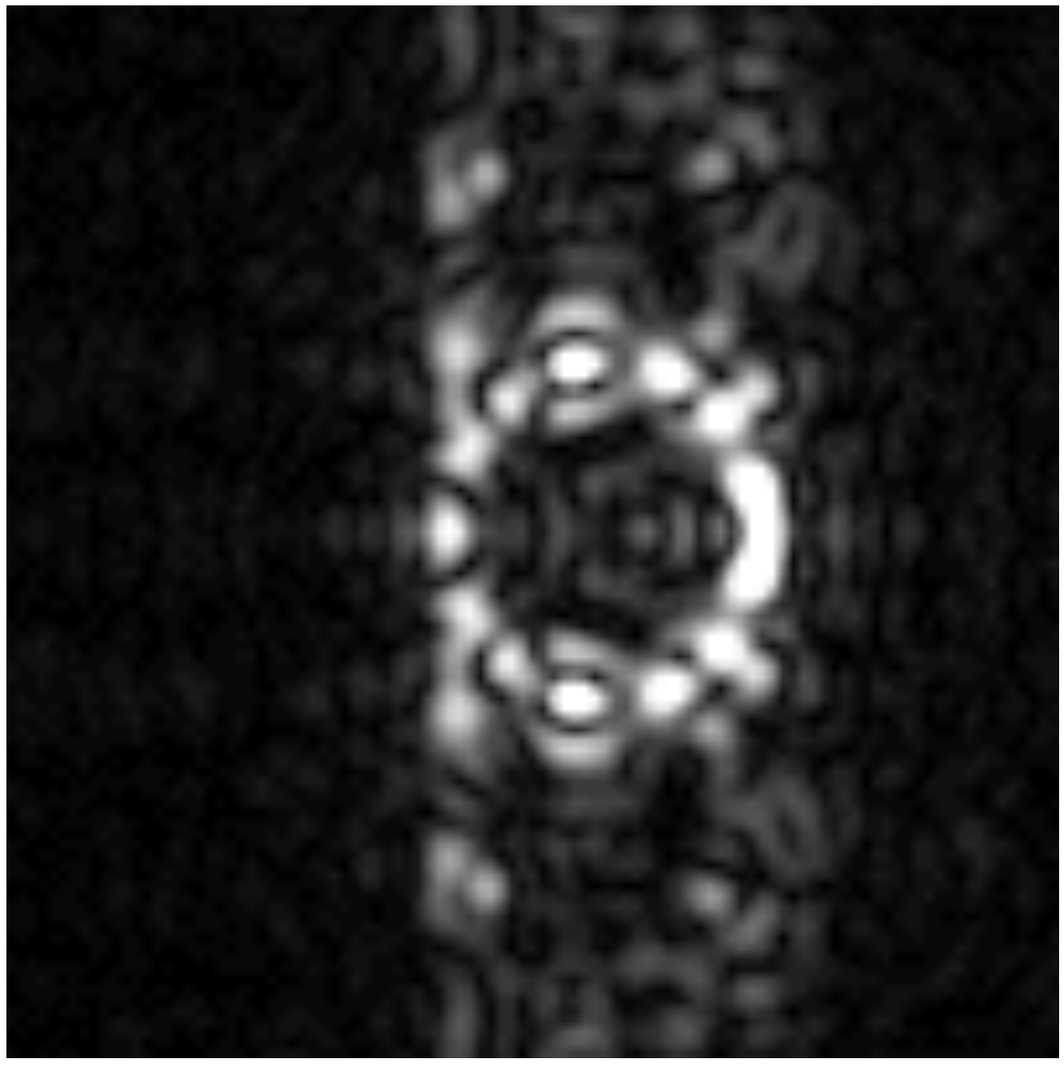
$$G(x, x_s) = \frac{e^{i\omega(r+r_s)}}{\omega r r_s} \int_{r_1}^{r_2} dr_c \, \frac{dm}{dr_c} \, \gamma(\alpha, \beta, m(r_c), \mathcal{Q}(r_c))$$

$\frac{a}{M} = 0.99 \quad \omega M = 50$ の場合

干渉パターン



像



輪郭がでそうだけど、めちゃくちゃ、、、、、

簡易計算

$$G = \frac{e^{i\omega(r+r_s)}}{2\pi i\omega r r_s}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} e^{im(\alpha-\pi)}\frac{2}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\left[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}+e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}\right]e^{i\delta_{lm}}e^{i\frac{\mathcal{Q}+m^2+a^2\omega^2}{2\omega}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_s}\right)}$$

ブラックホールを波源とした場合の計算

$$\Phi(\theta,\phi) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\, e^{im\alpha}[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}+e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}]$$

$$\mathcal{Q} = \frac{r_c^3(4Ma^2 - r_c(r_c-3M)^2)}{a^2(M-r_c)^2}\,\omega^2 \qquad m = \frac{r_c^2(r_c-3M)+a^2(r_c+M)}{a(M-r_c)}\,\omega$$

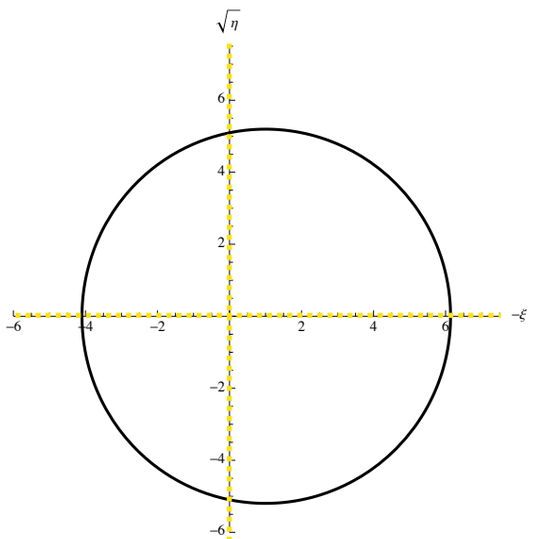
$$\Phi(\theta,\phi) = \int_{m_1}^{m_2} dm\frac{1}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\, e^{im\alpha}[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}+e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}]$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} dr_c\frac{dm}{dr_c}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\, e^{im\alpha}[e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}+e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}]$$

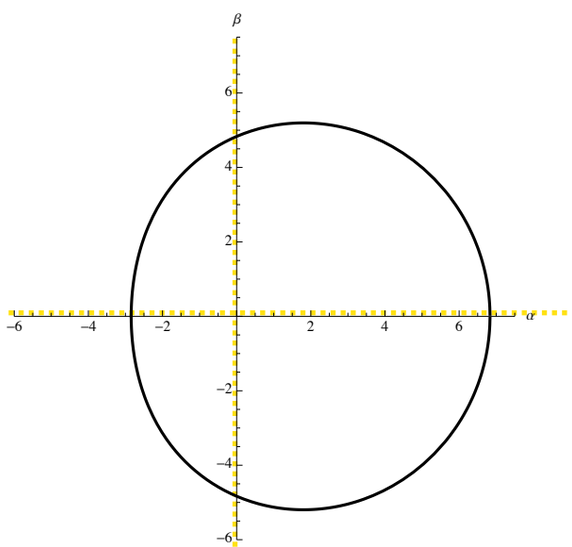
シャドウの輪郭

幾何光学

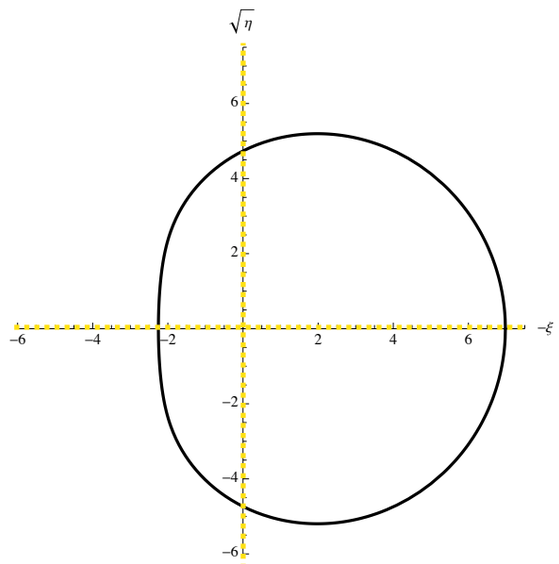
a=0.5



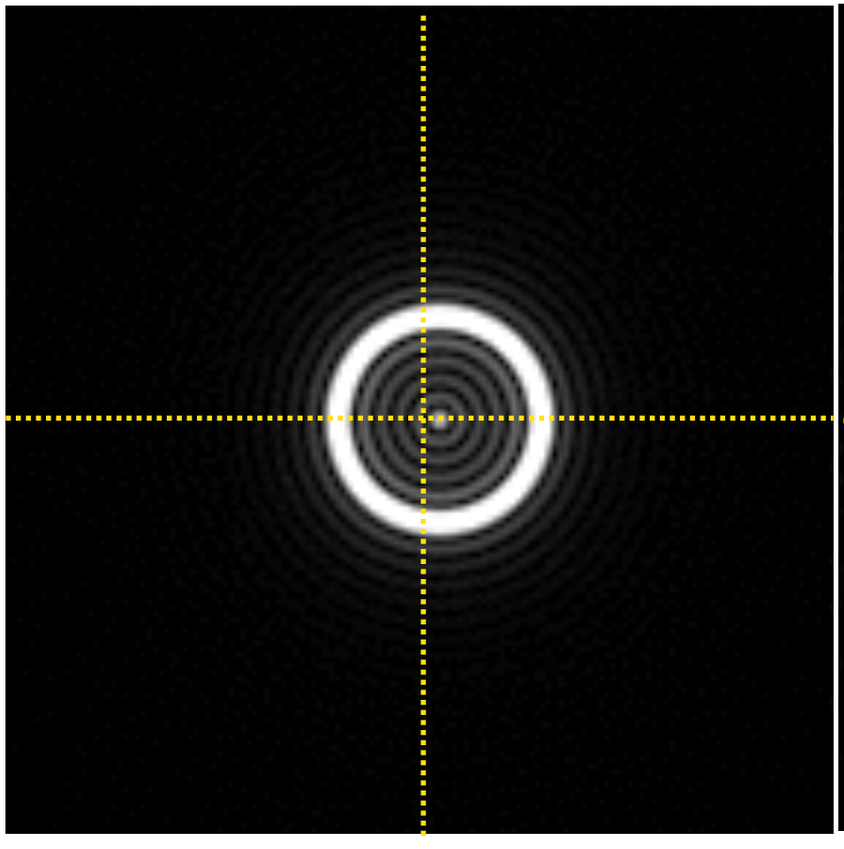
a=0.9

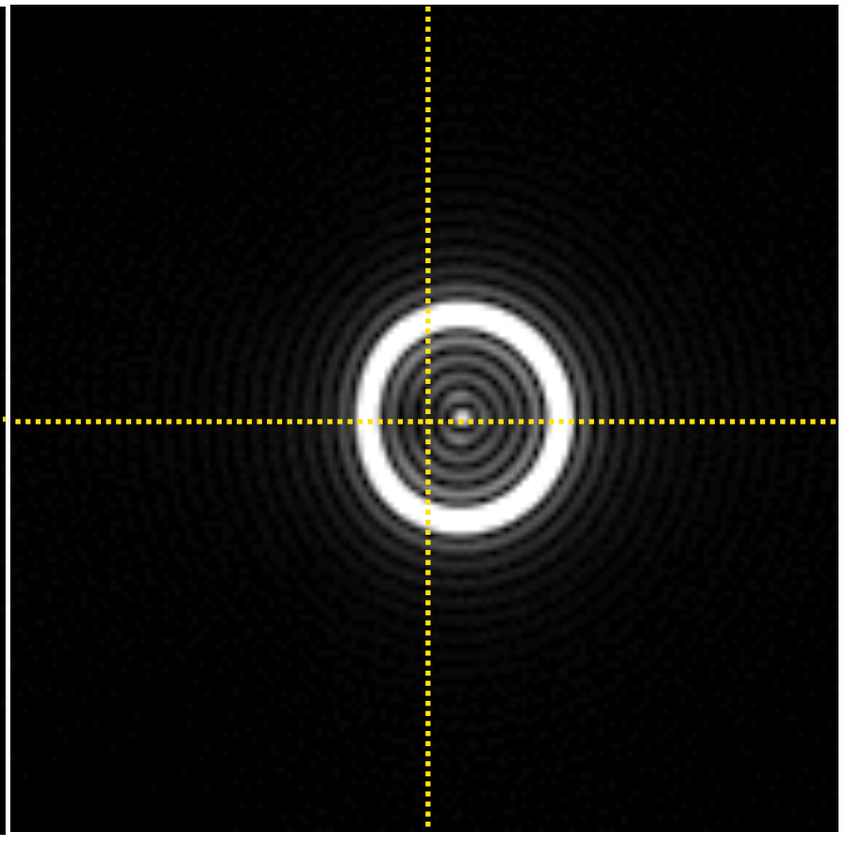


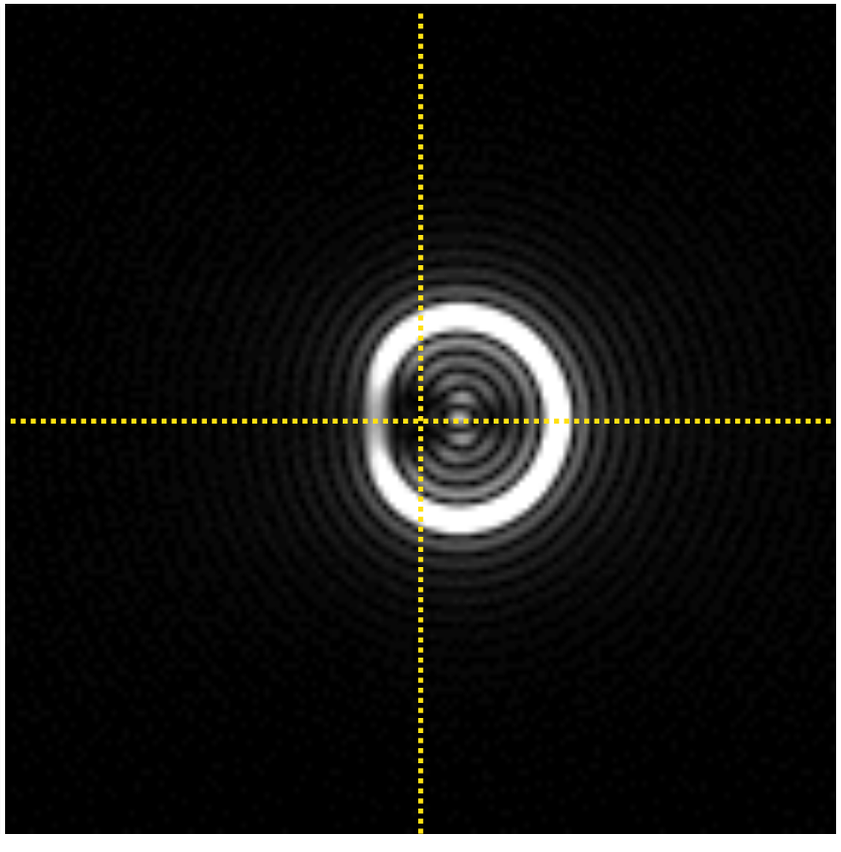
a=0.99



波動光学





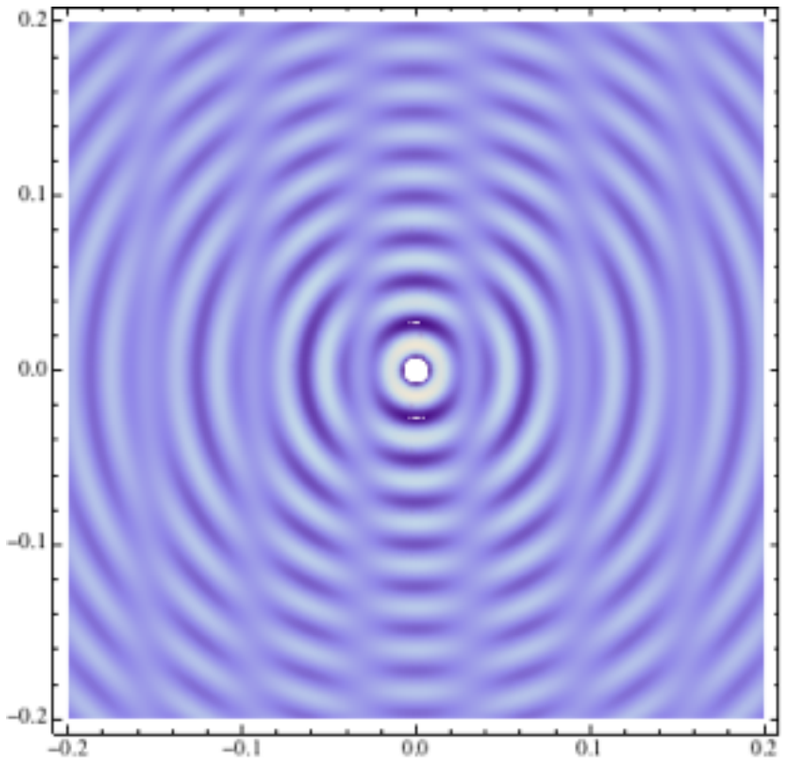


干渉パターン

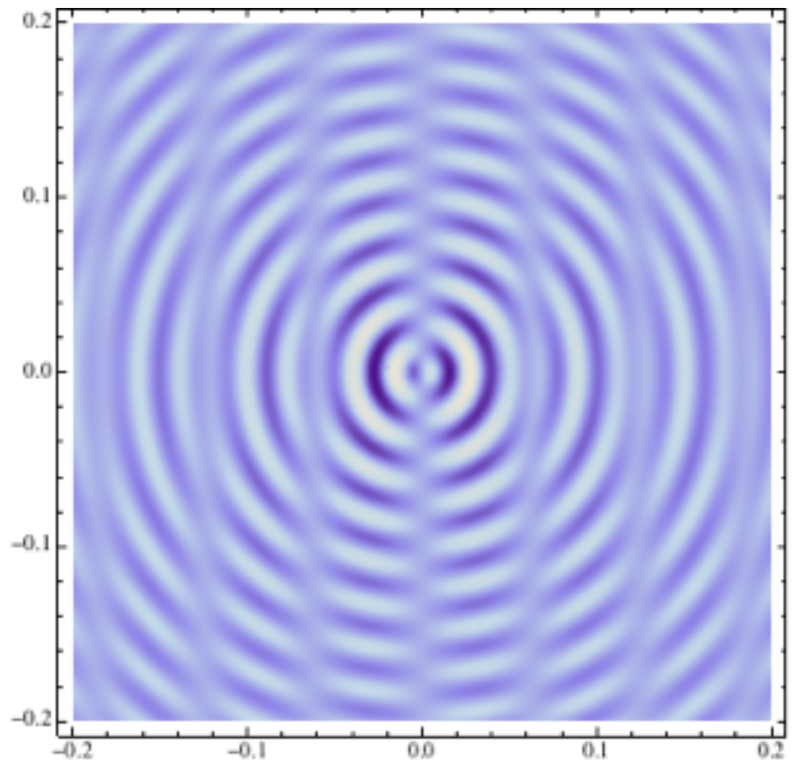
$$\Phi(\theta,\phi)=\int_{m_1}^{m_2} dm\; e^{i\sqrt{\mathcal{Q}(m)}\beta}e^{im\alpha}$$

$a=0.5$

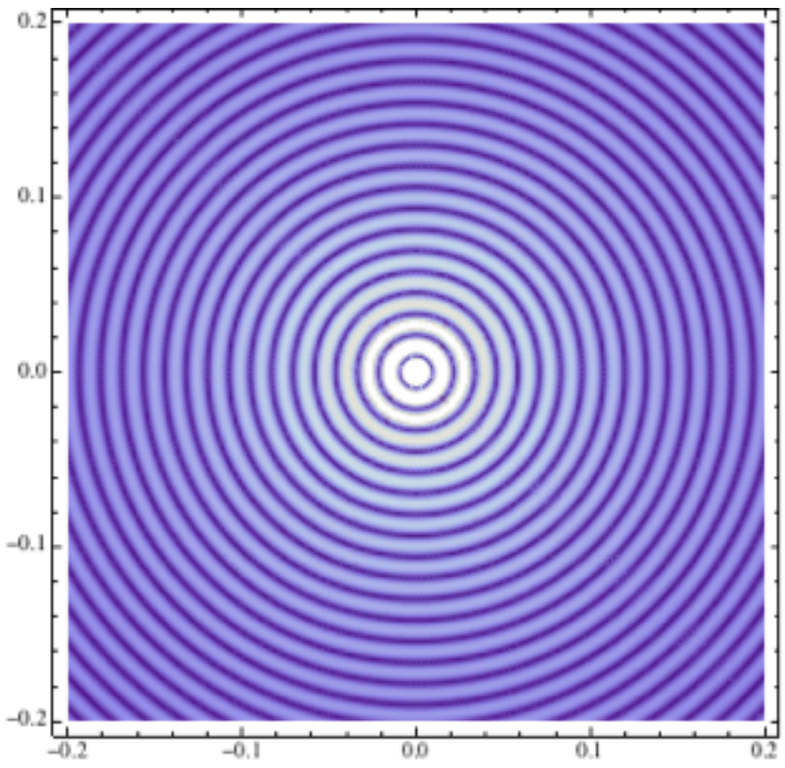
Re Φ



Im Φ

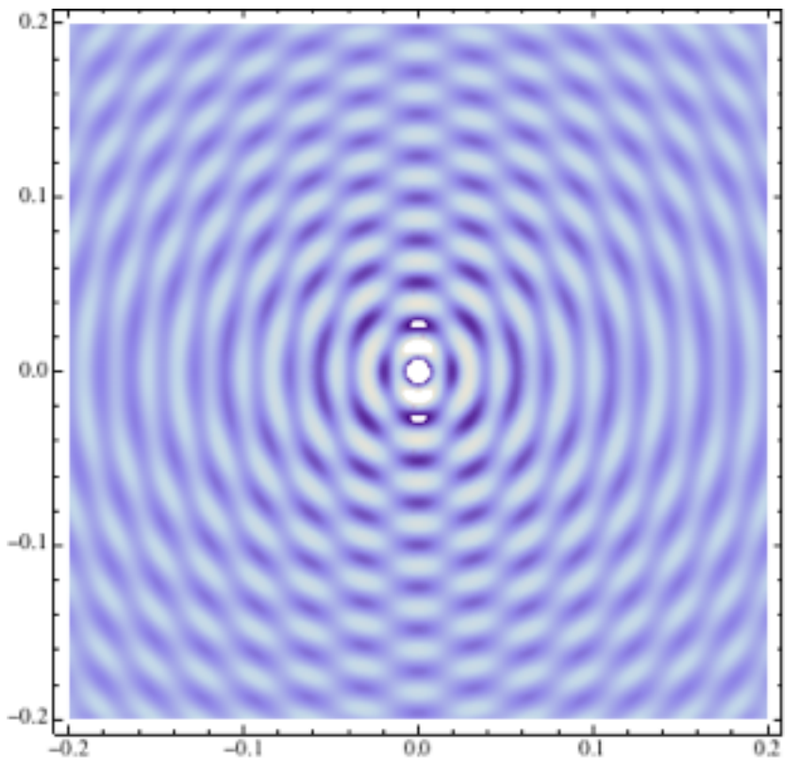


$|\Phi|$

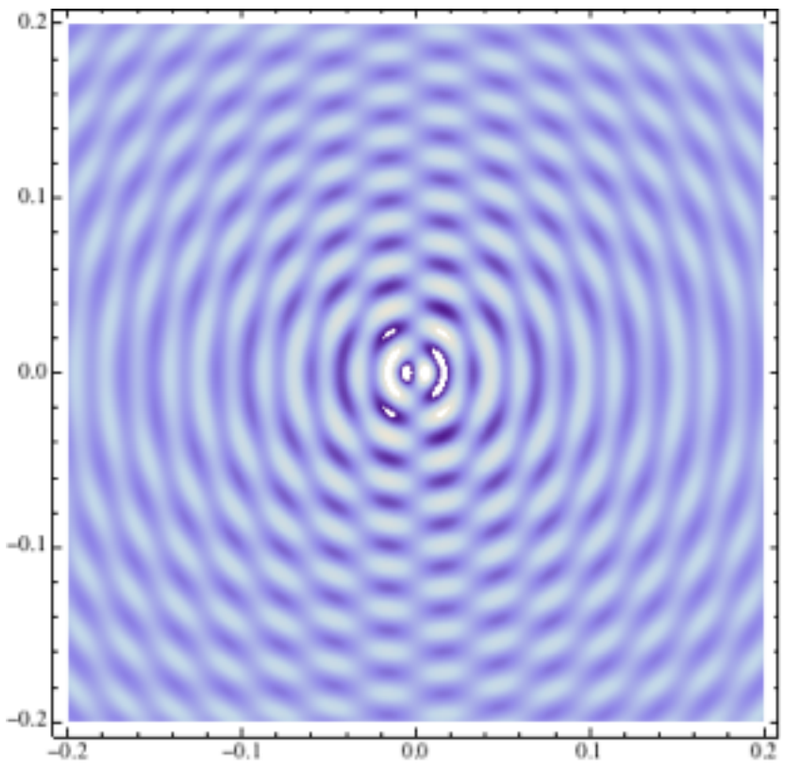


$a=0.9$

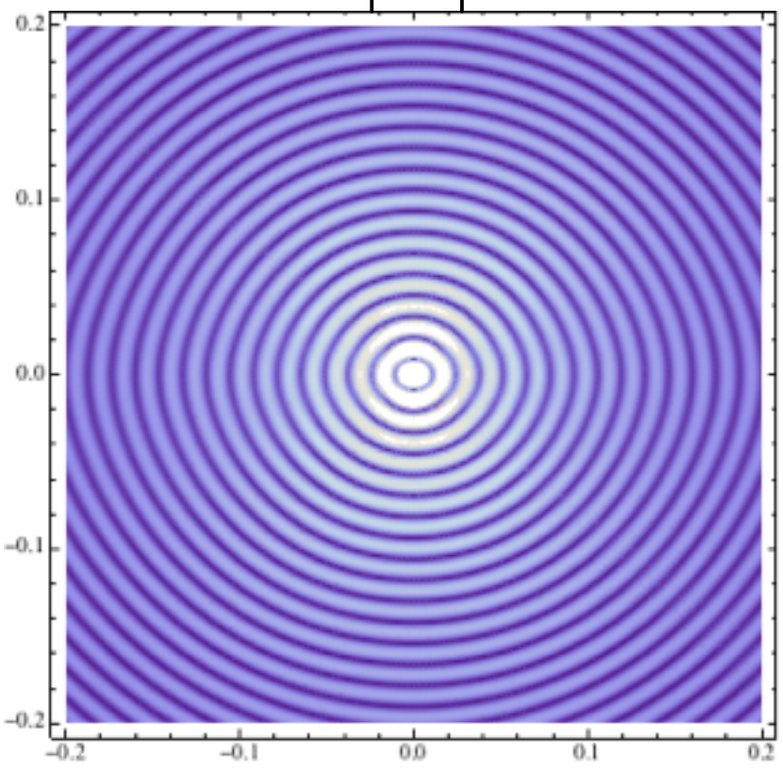
Re Φ



Im Φ



$|\Phi|$



まとめ 波を用いてブラックホールシャドウを描いた。

① **ブラックホール時空上での波の散乱問題　(WKB法)**

Green関数

② **レンズ方程式の再導出**

Green関数の位相部分の停留条件 → レンズ方程式

③ **干渉パターンと像**

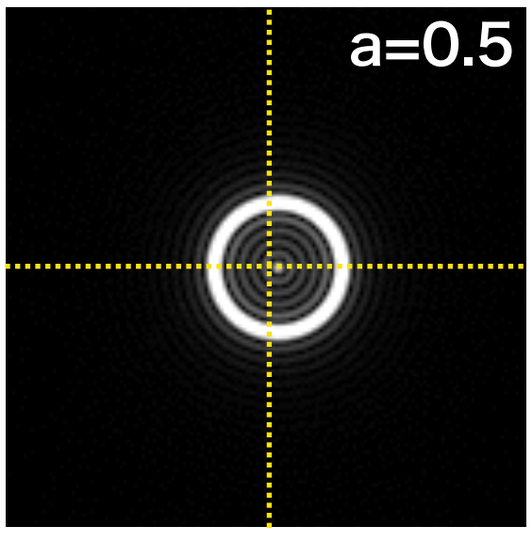
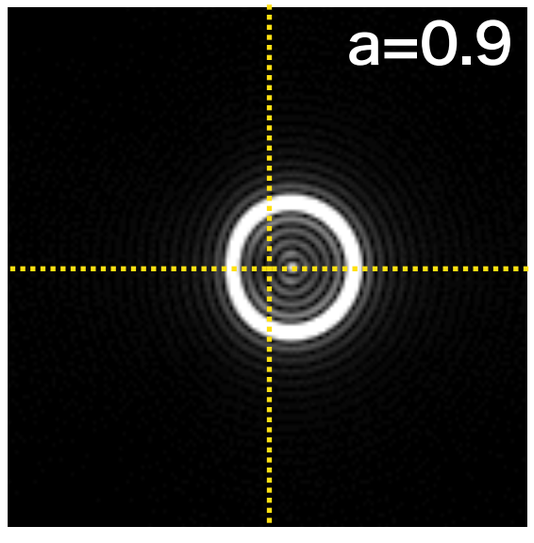
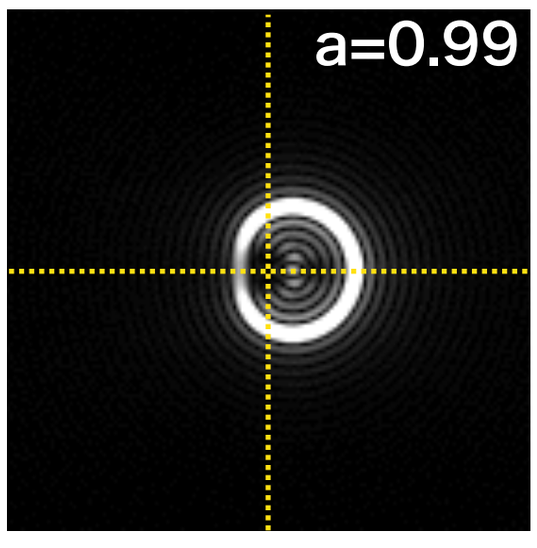
Green関数の和の処理

Schwarzschild … うまくいってる

Kerr … なんかうまくいかない(対称性？)

簡易計算による像(Kerr周りの場の配位、BHを波源)

$$\Phi(\theta,\phi)=\sum_m e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}e^{im\alpha}$$

不安定円軌道という条件は使う

シャドウの輪郭を再現