ブラックホール回転エネルギーの電磁場による因果的引抜きⅡ

熊本大学理学部　小出眞路

２年前の第7回磁気圏ブラックホール研究会において，電磁エネルギー密度とエネルギー流束密
ル地平面においては負の電磁気
に「落下」するとしてブラックホール回転エネルギーの引き抜き機構が因果律的に理解できることを述べた．最近，K. Toma & F. Takahara (2016)はボイヤー・リンキスト座標およびカー・シルト座標においてフォース・フリーのプラズマが磁力線に沿ってブラックホールに連続的に入射される非定常な過程の解析的モデルを提示した．そこで電磁エネルギーの符号は座標系に依存し，負の電磁気的エネルギーの落とし込みは本質的でないと結論している．

まだ，この論文を読み込んでいません･･･
内容にはあまり言及しません。すいません。

第９回ブラックホール磁気圏勉強会　2016.3.2（水）＠夕張マウントレースイホテル

今回の目的

- ブランドフォード･ナエク機構での電磁場エネルギー密度 e^{∞}_{EM}
  - ボイヤ･リンキスト座標:　$e^{\infty}_{EM} < 0$
  - カー･シルト座標:　$e^{\infty}_{EM}{}' > 0$!
  果たして，そういうことはありえるのか？
  はっきりさせる.

- 今回，カー･シルト座標における電磁エネルギー密度とエネルギー流束の関係式を示す.それにより，Toma & Takahara (2016) の結論の検証を行う.

ブランドフォード・ナエク機構(BZ機構)

Blandford, Znajek (1977)

- フォース・フリー条件 ($E^{\infty}{}_{\mathrm{fluid}} << E^{\infty}{}_{\mathrm{EM}}$)，定常・軸対称
- カー・メトリック(ボイヤー・リンキスト座標)

  $a << 1$ (ブラックホールの回転パラメータ)

ブランドフォード・ナエク解

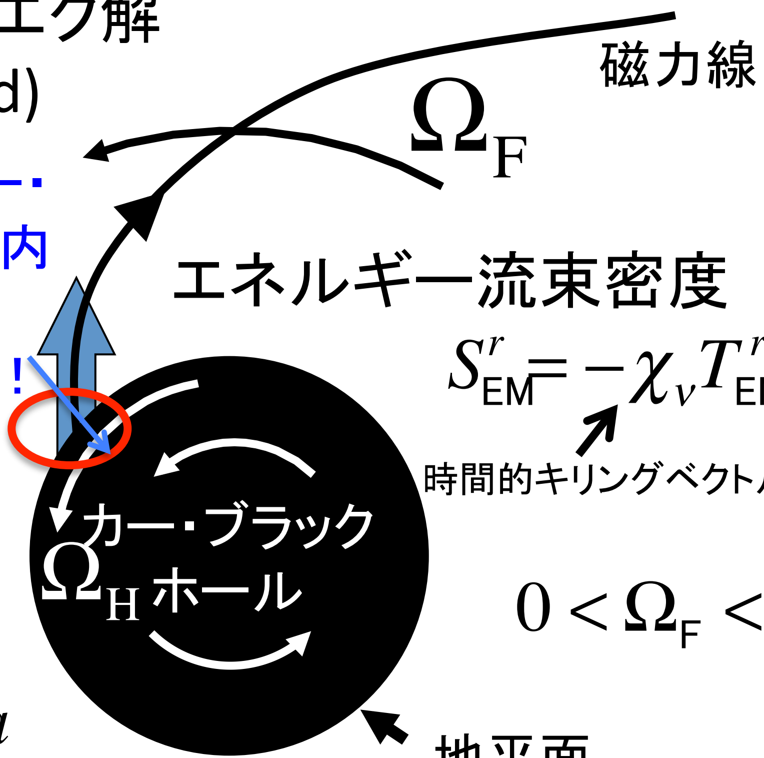
(split-monopole field)

地平面での物質・エネルギー・情報の流れる方向は外から内のみ.

もちろん，張力の働く方向も！

因果律問題

(Punsly & Coroniti 1990〜)



エネルギー流束密度

磁力線の回転角速度

地平面での空間の引きずり角速度

$$S^r_{\mathrm{EM}} = -\chi_\nu T^{r\nu}_{\mathrm{EM}} \propto \Omega_F(\Omega_H - \Omega_F)$$

時間的キリングベクトル

4元電磁場応力テンソル

$$0 < \Omega_F < \Omega_H \Rightarrow S^r_{\mathrm{EM}} > 0$$

$$\Omega_H = \frac{a}{4M}$$

Transport of electromagnetic energy and angular momentum

Unit system $\left[\begin{array}{l} c=1 \\ \mu_0=1 \end{array}\right.$

- General relativistic equations of conservation laws:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$$ (energy and momentum)

Electromagnetic energy-momentum tensor

- Maxwell equations:

Field strength tensor

4-current density

$$\nabla_\mu {}^*F^{\mu\nu}=0 \qquad \nabla_\mu F^{\mu\nu}=-J^\nu$$

dual tensor of $F_{\mu\nu}$

- Force-free condition: $F_{\mu\nu}J^\nu=0$

Kerr Metric: $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (x_0,x_1,x_2,x_3)=(t,r,\theta,\phi)$

$$g_{00}=-h_0^2;\quad g_{ii}=h_i^2;\ g_{0i}=-h_i^2\omega_i\ \ (i=1,2,3);\quad g_{ij}=0\ \ (i\neq j)$$

Lapse function: $\alpha=\sqrt{h_0^2+\sum_i (h_i\omega_i)^2}$

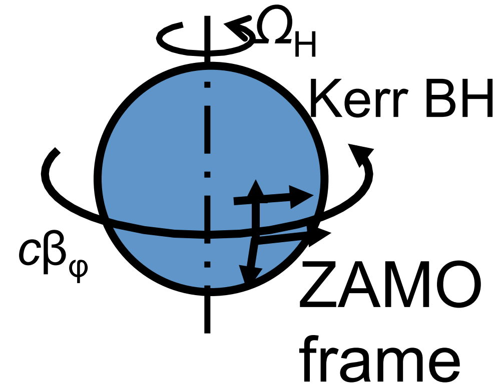
(gravitational time delay)

Shift vector: $\beta_i=h_i\omega_i/\alpha$

$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

(velocity of dragged frame)

Several coordinates around rotating black hole



- Boyer-Lindquist coordinates, Kerr-Schild coordinates
  ⇒ coordinates of global frame

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- (primary) LNRF, (spatially oblique in general)
  ⇒ vector and tensor

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + \sum_i g_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$$

← 数値計算に有効

- LNRF with tetrad (spatially orthogonal) ⇒ vector and tensor

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + \sum_i \left(d\hat{x}^i\right)^2$$

(Similar to that of Minkowski metric)

← 直感的理解に有効
(物理量が直感的に計算できる)

- Co-moving frame ⇒scalar variables

Transport of energy and angular momentum

Killing vector for Kerr space-time ξᵛ: $\chi^{\nu}=(-1,0,0,0)\quad \eta^{\nu}=(0,0,0,1)$

conservation of energy and angular momentum :

$$e^{\infty}=\alpha\chi_{\nu}T^{0\nu}=\alpha\left(\hat{e}+\omega^{\phi}\hat{l}^{\phi}\right)=e^{\infty}_{\mathrm{EM}}\qquad l^{\phi}=-\alpha\eta_{\nu}T^{0\nu}=l^{\phi}_{\mathrm{EM}}$$

$$S^{i}=\alpha\chi_{\nu}T^{i\nu}=S^{i}_{\mathrm{EM}}\qquad M^{i}=-\alpha\eta_{\nu}T^{i\nu}=M^{i}_{\mathrm{EM}}$$

$$\boxed{\frac{\partial e^{\infty}}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{S}}$$ (energy conservation) $$\boxed{\frac{\partial l^{\phi}}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}}$$ (angular momentum conservation)

Here,

$$e^{\infty}_{\mathrm{EM}}=\alpha\left(\frac{\hat{B}^{2}}{2}+\frac{\hat{E}^{2}}{2}\right)+\omega^{\phi}\cdot l^{\phi}_{\mathrm{EM}}$$ (electromagnetic energy density)

$$l^{\phi}_{\mathrm{EM}}=h_{3}\left(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}}\right)_{\phi}$$ (electromagnetic angular momentum density)

$$\mathbf{S}_{\mathrm{EM}}=\alpha^{2}\left(\hat{\mathbf{E}}-\boldsymbol{\beta}\times\hat{\mathbf{B}}\right)\times\left(\hat{\mathbf{B}}+\boldsymbol{\beta}\times\hat{\mathbf{E}}\right)$$

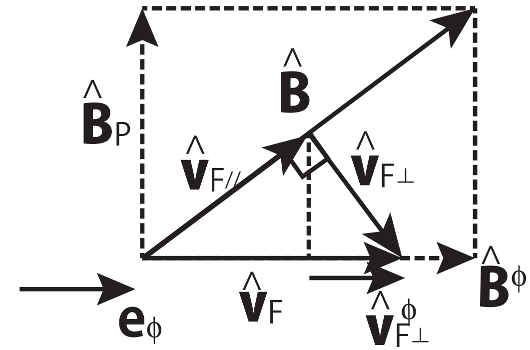
(electromagnetic energy flux density)

$$\mathbf{M}_{\mathrm{EM}}=\alpha^{2}h_{3}\left[\left(\frac{\hat{B}^{2}}{2}+\frac{\hat{E}^{2}}{2}\right)\delta^{i3}-\hat{B}_{3}\hat{\mathbf{B}}-\hat{E}_{3}\hat{\mathbf{E}}+\left(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}}\right)_{3}\boldsymbol{\beta}\right]$$

(electromagnetic angular momentum flux density)

When we can write $\hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{v}}_{F\perp} \times \hat{\mathbf{B}}$

$$(\hat{\mathbf{v}}_F = \hat{\mathbf{v}}_{F\perp} + \hat{\mathbf{v}}_{F//} \quad \hat{\mathbf{v}}_{F\perp} \perp \hat{\mathbf{B}}, \;\; \hat{\mathbf{v}}_{F//} // \hat{\mathbf{B}}),$$



In general, we have

electromagnetic energy-at-infinity:

$$\boxed{e^{\infty}_{EM} = \alpha\left(\frac{\hat{B}^2}{2} + \frac{\hat{E}^2}{2}\right) + \boldsymbol{\omega}\cdot \boldsymbol{l}_{\mathrm{EM}} = \alpha \hat{B}^2\left[\frac{1}{2}\left(1+\left(v_{F\perp}\right)^2\right) + \hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_{F\perp}\right]}$$

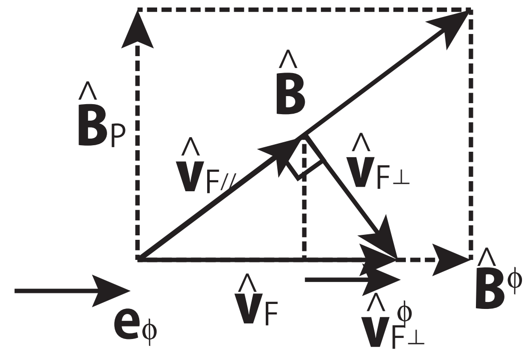
electromagnetic energy flux density:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{EM} &= \alpha^2\left(\hat{\boldsymbol{E}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right)\times\left(\hat{\boldsymbol{B}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}\times\hat{\boldsymbol{E}}\right) \\ &= \alpha e^{\infty}_{EM}\left(\hat{\boldsymbol{v}}_{F\perp} + \hat{\boldsymbol{\beta}}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(1 - v^2_{F\perp}\right)\left[\hat{B}^2\left(\hat{\boldsymbol{v}}_{F\perp} + \hat{\boldsymbol{\beta}}\right) - 2\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\right)\hat{\boldsymbol{B}}\right] \end{aligned}}$$

Energy flux in the case of Force-free（Blandford-Znajek mechanism）

Maxwell Equations and force-free condition yield

$$\hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{v}}_{F\perp} \times \hat{\mathbf{B}}, \qquad \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{F}} = \frac{h_\phi}{\alpha}(\Omega_{\mathrm{F}} - \omega_\phi)\mathbf{e}_\phi,$$



$$\hat{v}_{\mathrm{F}\perp} = \frac{\hat{v}_{\mathrm{F}}}{\sqrt{1+(\hat{B}^{\phi}/\hat{B}_{\mathrm{P}})^2}} = \frac{\hat{v}_{\mathrm{F}}}{\sqrt{1+\hat{v}_{\mathrm{F}}^2}}$$

$$\frac{\hat{v}_{\mathrm{F}\perp}}{\hat{v}_{\mathrm{F}}} = \frac{\hat{B}_{\mathrm{P}}}{\hat{B}}$$

At $r \to r_{\mathrm{H}}$ （horizon）, $\omega^{\phi} \to \Omega_{\mathrm{H}}$ and we can write $\dfrac{\hat{B}_{\varphi}}{\hat{B}^{\mathrm{P}}} \cong \dfrac{h_\phi}{\alpha}(\Omega_{\mathrm{F}} - \Omega_{\mathrm{H}})$

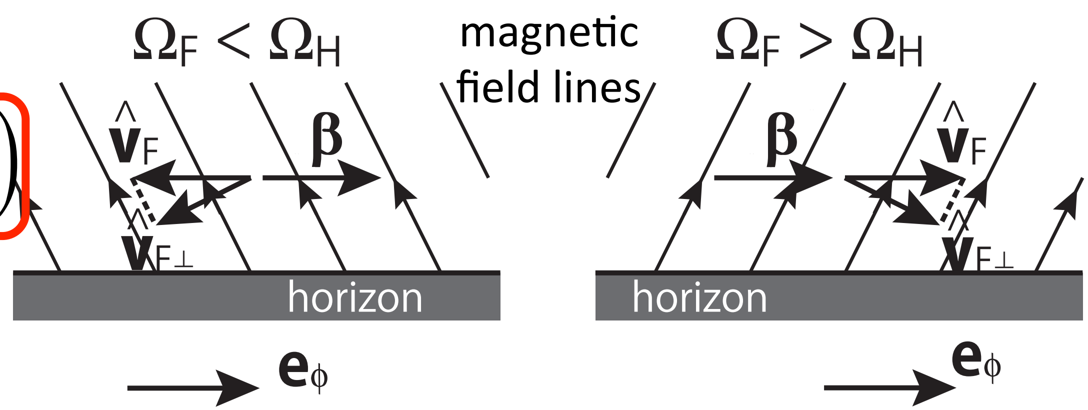
(Znajek condition)

At $r \to r_{\mathrm{H}}$ $\qquad \hat{v}_{\mathrm{F}} \to \infty$

$$\hat{v}_{\mathrm{F}\perp} \to 1 \qquad \omega^{\phi} \to \Omega_{\mathrm{H}}$$

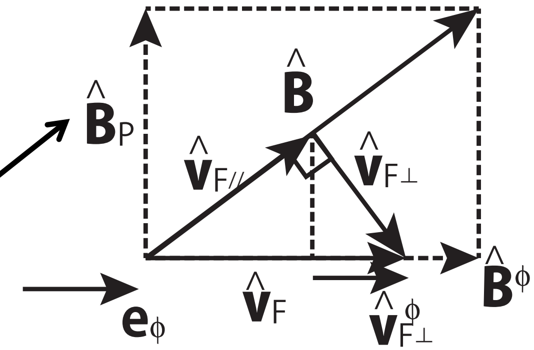
Near the horion, $v_{\mathrm{F}\perp}$ always directs toward the horizon.

$$\boxed{S_{EM}^{P} = \alpha e_{EM}^{\infty}\left(\hat{\mathbf{v}}_{F\perp} + \boldsymbol{\beta}\right)}$$



Causal extraction of black hole energy in Blandford-Znajek mechanism : electromagnetic negative energy

Near the horizon :



$$e_{\mathrm{EM}}^{\infty} = \alpha\left[\frac{1}{2}(1+\hat{v}_{\mathrm{F}\perp}^{2}) + \beta^{\phi}\hat{v}_{\mathrm{F}\perp}^{\phi}\right]\hat{B}^{2} \cong \frac{\Omega_{\mathrm{F}}}{\Omega_{\mathrm{F}}-\Omega_{\mathrm{H}}}\alpha\left(\hat{B}\right)^{2}$$

$$\hat{B} = \sqrt{(\hat{B}^{\phi})^{2}+(\hat{B}_{\mathrm{P}})^{2}} \cong |\hat{B}^{\phi}| = \left|\frac{R}{\alpha}(\Omega_{\mathrm{F}}-\Omega_{\mathrm{H}})\right|\hat{B}_{\mathrm{P}}$$

Poloidal component of magnetic field

$$\frac{\hat{v}^{\phi}_{\mathrm{F}\perp}}{\hat{v}_{\mathrm{F}\perp}} = \frac{\hat{B}_{\mathrm{P}}}{\hat{B}}$$

$$\hat{v}^{\phi}_{\mathrm{F}\perp} = \left(\frac{\hat{B}_{\mathrm{P}}}{\hat{B}}\right)^{2}\hat{v}_{\mathrm{F}\perp}$$

$$\hat{v}_{\mathrm{F}} = \frac{\hat{v}_{\mathrm{F}}}{1+\hat{v}_{\mathrm{F}}^{2}}$$

$$\boxed{e_{\mathrm{EM}}^{\infty} = \alpha\hat{B}^{2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\left(v_{F\perp}\right)^{2}\right)+\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{v}}_{F\perp}\right] \cong \frac{R_{\mathrm{H}}^{2}}{\alpha}\Omega_{\mathrm{F}}(\Omega_{\mathrm{F}}-\Omega_{\mathrm{H}})(\hat{B}_{\mathrm{PH}})^{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{S}_{EM}^{P} = \alpha e_{EM}^{\infty}\left(\hat{\mathbf{v}}_{F\perp}+\boldsymbol{\beta}\right) \cong R_{\mathrm{H}}^{2}\Omega_{\mathrm{F}}(\Omega_{\mathrm{F}}-\Omega_{\mathrm{H}})(\hat{B}_{\mathrm{PH}})^{2}\left(\hat{\mathbf{v}}_{F\perp}+\boldsymbol{\beta}\right)}$$

$0 < \Omega_{\mathrm{F}} < \Omega_{\mathrm{H}}$ In this case, electromagnetic energy is radiated. This is well-know condition where Blandford-Znajek mechanism works. Furthermore, we found $e_{\mathrm{EM}}^{\infty} < 0$

i.e. energy is negative. This means even in the Blandford-Znajek mechanism, (electromagnetic) negative energy is utilized for the energy extraction of black hole.

電磁場によるブラックホール回転エネルギーの引抜き機構のまとめ

(Koide & Baba 2014)

	機構	負のエネルギーの形態	角運動量の再配分をするトルク	出てくるエネルギーの形態	参考文献
	ペンローズ過程　（参考）	粒子の力学的エネルギー	粒子の分裂・相互作用の力	粒子の力学的エネルギー	Penrose (1969)
	磁気的ペンローズ過程	荷電粒子の力学的エネルギー	電磁気的力	荷電粒子の力学的エネルギー	Wagh (1989)
ブランドフォード・ナエク機構	force-freeブランドフォード・ナエク機構	電磁気的エネルギー	電磁気的張力(force-free)	電磁気的エネルギー	Blandford & Znajek (1977)
	MHDブランドフォード・ナエク機構	電磁気的エネルギー	電磁気的張力(MHD)	電磁気的エネルギーとプラズマの運動エネルギー(アルベン波)	Takahashi et. al(1991); Koide (2003); Komissarov (2005)
	MHDペンローズ過程	プラズマの力学的エネルギー	ローレンツ力	電磁気的エネルギーとプラズマの運動エネルギー(アルベン波)	Takahashi et. al(1991); Koide (2003); Komissarov (2005)
	超放射	電磁波の電磁気的エネルギー	量子効果によるHalf-mirror効果	電磁波の電磁気的エネルギー	Press & Teukolsky (1972); Lightman et. al (1975)
	磁気リコネクションによる機構	プラズモイドの力学的エネルギー	磁気リコネクションによる電磁気的張力	プラズモイドの力学的エネルギー	Koide (2009)

BZ機構の負の電磁エネルギーによる因果的理解

（2013年秋季天文学会, Koide 2014 PRD）

一般に負の電磁エネルギーを介してブラックホールの回転エネルギーの引き抜き機構を因果的に理解できることをボイヤー・リンキスト座標（カー・メトリック）において示した.

✓ $\hat{\boldsymbol{E}} = -\hat{\mathbf{v}}_{F\perp} \times \hat{\boldsymbol{B}}$ の $\hat{\mathbf{v}}_{F\perp}$ を電磁場の移動速度とする.

✓ 地平面では電磁場エネルギー密度 e^{∞}_{EM} と電磁場エネルギー流束密度 $\boldsymbol{S}^{P}_{EM}$ の関係が次のような式で表される.

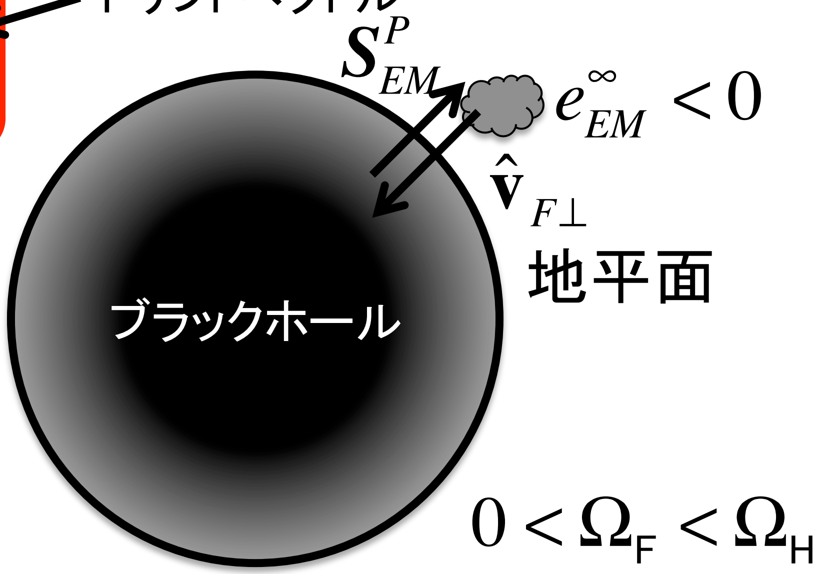
ラプス関数

ドリフトベクトル

$$\boxed{\boldsymbol{S}^{P}_{EM} = \frac{1}{h_r}\alpha e^{\infty}_{EM}\left(\hat{\mathbf{v}}_{F\perp} + \boldsymbol{\beta}\right)}$$

$$h_r = \sqrt{g_{rr}}$$

✓ 電磁場によるブラックホール回転エネルギーの引き抜きは $e^{\infty}_{EM} < 0$ のときに起こる.



ここでの議論は全てボイヤー・リンキスト座標により行った。

負の電磁エネルギーの落とし込みによるBZ機構の説明に対する異論

（當真さん（東北大）2015年日本天文学会春季大会，
K. Toma & F. Takahara 2016）

- 電磁場のエネルギー密度e_{EM}^{∞}は電磁場のエネルギー密度，エネルギー流束密度の成分であり，スカラーではない．それゆえ，電磁場エネルギー密度e_{EM}^{∞}の値は座標系に依存する．
- ブランドフォード・ナエク機構での電磁場エネルギー密度 e^{∞}_{EM}
  - ボイヤ・リンキスト座標：　$e^{\infty}_{EM} < 0$
  - カー・シルト座標：　$e^{\infty}_{EM}{}' > 0$！
- それゆえ，負の電磁場エネルギーをブラックボールに落とし込むことによりブラックホールの回転エネルギーを引き抜くという解釈は間違っている！

果たして，そうか？

回転するブラックホールのまわりの時空を表す座標

- ボイヤー・リンキスト座標（カー・メトリック）

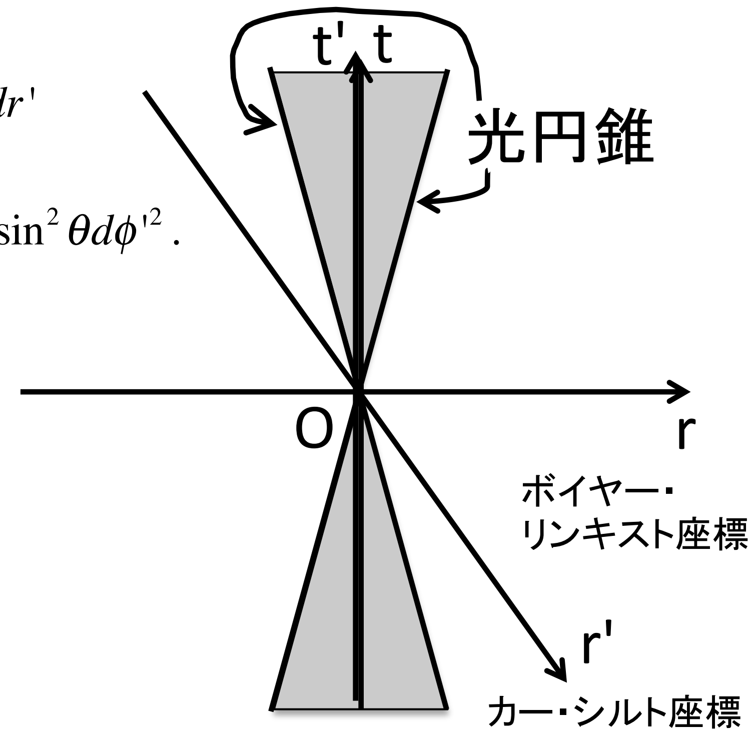
$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi^2 - 2\frac{2Mar}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi dt.$$

- カー・シルト座標（カー・シルト・メトリック）

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt'^2 - 2a\frac{2Mr}{\Sigma}\sin^2\theta dt' d\phi' + 2\frac{2Mr}{\Sigma}dt' dr'$$
$$+\left(1+\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dr'^2 - 2a\left(1+\frac{2Mr}{\Sigma}\right)\sin^2\theta dr' d\phi' + \Sigma d\theta'^2 + \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi'^2 .$$

座標変換

$$\begin{cases} dt' = dt + 2\dfrac{Mr}{\Delta}dx^1 = dt + 2\dfrac{Mr}{\Delta}dr \\ r' = x^{1'} = x^1 = r \\ \theta' = \bar{x}^{2'} = x^2 = \theta \\ d\phi' = dx^{3'} = dx^3 + \dfrac{a}{\Delta}dx^1 = d\phi + \dfrac{a}{\Delta}dr. \end{cases}$$

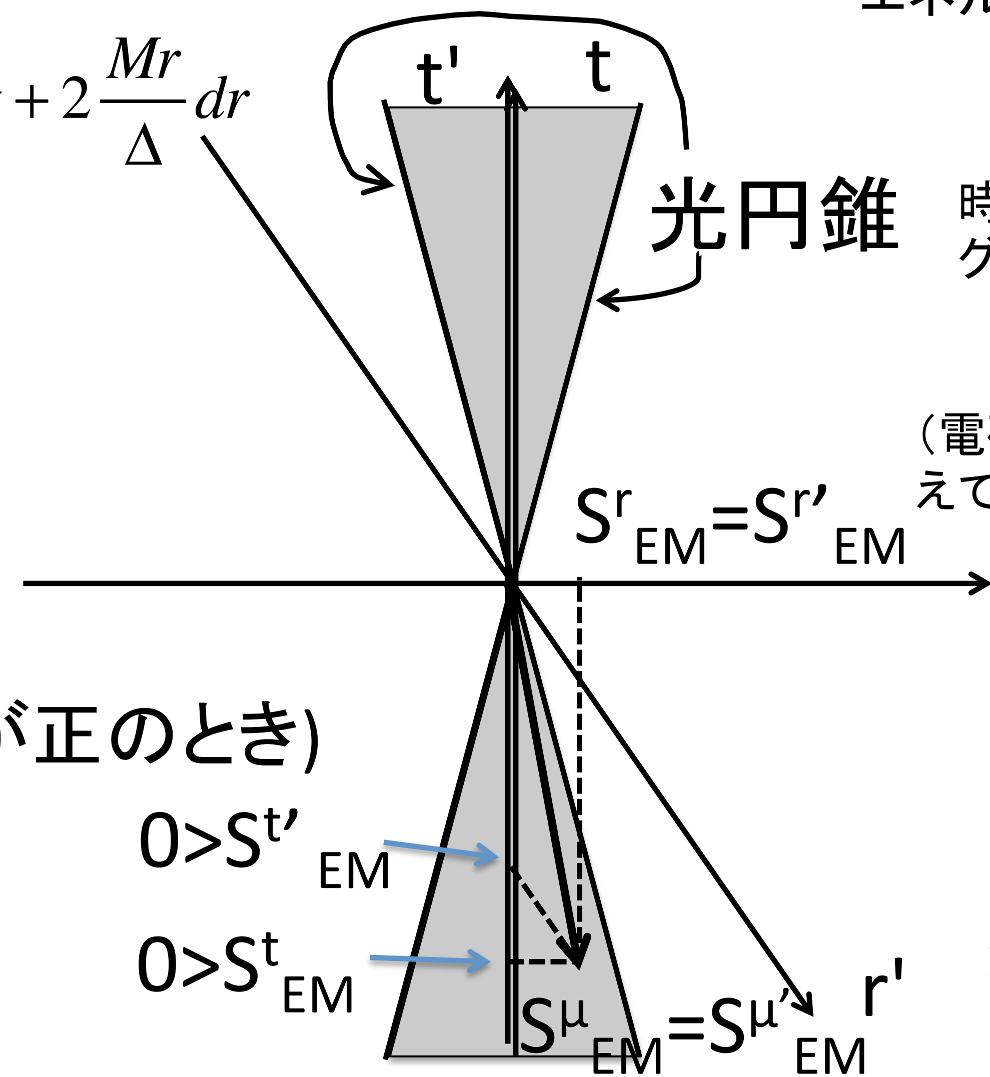


S^tが負であれば$S^{t'}$も負となること: 幾何学的理解

電磁場のエネルギー密度 $e^{\infty}_{\rm EM} = \alpha S^t_{\rm EM}$

$$dt' = dt + 2\frac{Mr}{\Delta}dr$$

$$r' = r$$



電磁場の4元エネルギー密度・エネルギー流束密度ベクトル

$$S^\mu_{\rm EM} = \chi_\nu T^{\mu\nu}_{\rm EM}$$

時間的キリングベクトル

4元電磁場応力テンソル

$$S^\mu{}_{\rm EM} S_{\mu \rm EM} \leqq 0$$

（電磁エネルギーが光速度を越えて伝播しないという条件）

ボイヤー・リンキスト座標

（t, r, θ, φ）

カー・シルト座標

（t', r', θ', φ'）

S^tが負であれば$S^{t'}$も負となること: ブラックホール地平面の極近傍での証明

ボイヤー・リンキスト座標とカー・シルト座標の変換則は

$$dt' = dt + 2\frac{Mr}{\Delta}dr$$

なので, $S^t = -\chi_\nu T^{t\nu}$ の変換性は $S^{t'} = S^t + 2\frac{Mr}{\Delta}S^r$.

先に得られた地平面近傍での電磁場のエネルギー流束密度と密度の関係

$$\boldsymbol{S}_{EM}^{P} = \frac{1}{h_r}\alpha e_{EM}^{\infty}\left(\hat{\mathbf{v}}_{F\perp} + \boldsymbol{\beta}\right)$$

を用いると, $e^{\infty} = \alpha S^t$ より

$$S_{\mathrm{EM}}^{t'} = S_{\mathrm{EM}}^{t} + 2\frac{Mr}{\Delta h_r}S_{\mathrm{EM}}^{t}v_{\mathrm{F}\perp}^{r} = S_{\mathrm{EM}}^{t}\left(1 + 2\frac{Mr}{\cancel{\Delta}}\sqrt{\frac{\cancel{\Delta}}{\cancel{\Sigma}}}\sqrt{\frac{\cancel{\Delta\Sigma}}{A}}v_{\mathrm{F}\perp}^{r}\right) = S_{\mathrm{EM}}^{t}\left(1 + \sqrt{\frac{(2Mr)^2}{A}}v_{\mathrm{F}\perp}^{r}\right)$$

$v^r_{F\perp} \geqq -1$より $1 + \sqrt{\frac{(2Mr)^2}{A}}v_{\mathrm{F}\perp}^{r} \geq 1 - \sqrt{\frac{(2Mr)^2}{A}} > 0$

地平面の外では $(2Mr)^2 < A = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$ であるので, S^t_{EM}と$S^t_{EM}{}'$は同じ符号である.

（証明終り）

S^tが負であれば$S^{t'}$も負となること:
数学的証明 （助言: 高橋労太さん）

ボイヤー・リンキスト座標とカー・シルト座標の変換則は

$$dt' = dt + 2\frac{Mr}{\Delta}dr$$

$$\left(S^{\mu} = S^{\mu}_{\mathrm{EM}}\right)$$

なので, $S^{t'} = S^{t} + 2\frac{Mr}{\Delta}S^{r}$

以下では，座標系で電磁場エネルギーの符号が変わり得る場合として$S^r>0$, $S^t<0$とする.

電磁場のエネルギー密度・エネルギー流束密度ベクトルS^μは

$$-\varepsilon = S^{\mu}S_{\mu} \leqq 0 \qquad （ここで, \varepsilon \geqq 0）$$

である（光速度を超えてエネルギーが伝わらないという条件）.

$$S^{\mu}S_{\mu} + \varepsilon = g_{\phi\phi}\left(S^{\phi}\right)^2 + 2g_{t\phi}S^{t}S^{\phi} + g_{tt}\left(S^{t}\right)^2 + g_{rr}\left(S^{r}\right)^2 + g_{\theta\theta}\left(S^{\theta}\right)^2 + \varepsilon = 0$$

S^ϕは実数なので,

$$\left(g_{t\phi}S^{t}\right)^2 \geq g_{\phi\phi}\left[g_{tt}\left(S^{t}\right)^2 + g_{rr}\left(S^{r}\right)^2 + g_{\theta\theta}\left(S^{\theta}\right)^2 + \varepsilon\right]$$

ボイヤー・リンキスト座標の計量（カー・メトリック）

$$g_{tt}=-\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right),\ \ g_{rr}=\frac{\Sigma}{\Delta},\ \ \mathrm{g}_{\theta\theta}=\Sigma,\ \ g_{\phi\phi}=\frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta,\ \ g_{\phi t}=-\frac{2Mar}{\Sigma}\sin^2\theta$$

$$A=\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\Delta\sin^2\theta,\ \ \Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta,\ \ \Delta=r^2-2Mr+a^2$$

より，　$\left(g_{t\phi}\right)^2-g_{\phi\phi}g_{tt}=\Delta\sin^2\theta$　なので，

$$\Delta\sin^2\theta\left(S^t\right)^2=\left(\left(g_{t\phi}\right)^2-g_{\phi\phi}g_{tt}\right)\left(S^t\right)^2\geq\frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta\left[\frac{\Sigma}{\Delta}\left(S^r\right)^2+\Sigma\left(S^\theta\right)^2+\varepsilon\right]$$

$r>r_H$ではΔ＞0であるので，

$$\left(S^t\right)^2>\frac{A}{\Delta^2}\left(S^r\right)^2$$

さらに，A > (2Mr)^2，なので，　$|S^t|>\frac{2Mr}{\Delta}|S^r|$

すなわち，　$S^{t}{}'=S^t+\frac{2Mr}{\Delta}S^r<0.$　（証明終り）

ここまでのまとめ

- ボイヤー･リンキスト座標とカー･シルト座標において電磁場エネルギー密度の符号は不変であることを3つの方法で確かめた.
- 座標系によらずブラックホール回転エネルギーの電磁気的な引き抜きは負の電磁場エネルギーを介していると説明できることを確認した.

Kerr-Schild座標系でのエネルギーの輸送

- BZ機構においてはブラックホール地平面および内部で本当に負の電磁場エネルギーによりエネルギーが外向きに運ばれているのか？
- Kerr-Schild座標系で，e^{∞}とSの関係式を見る。
  - ブラックホールの地平面・内部でのSとe^{∞}の状況を確認する.

Kerr-Schild座標系でのエネルギーの輸送:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$ (Boyer-Lindquist座標, Kerr-Shild座標)

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + \sum_i g_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$$ (LNRF座標)

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + \sum_i \left(d\hat{x}^i\right)^2$$ (テトラッドLNRF座標)

Force-Free: $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ $\quad T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F^{\mu}{}_{\rho} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \left(F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right)$

$$S^\mu = \chi_\nu T^{\mu\nu} \qquad \chi^\nu = (-1,0,0,0)$$ (Killingベクトル)

$$\nabla_\mu S^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} S^\mu\right) = 0$$

$$S^0 = \frac{1}{\alpha} \tilde{S}^0 \qquad S^i = \tilde{S}^i + \tilde{\beta}^i \tilde{S}^0 \qquad \sqrt{-g} = h_1 h_2 h_3$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{S}^0 = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(h_1 h_2 h_3 \alpha \tilde{S}^i\right) = -\nabla \cdot \left(\alpha \vec{\tilde{S}}\right)$$ （電磁エネルギーの保存式）

$$\tilde{S}^0 = \tilde{\chi}_\nu \tilde{T}^{0\nu} = \alpha\left(\tilde{T}^{00} + \tilde{\beta}^i \tilde{T}^{0}{}_{i}\right) = e^\infty$$

$$\tilde{S}^i = \tilde{\chi}_\nu \tilde{T}^{i\nu} = \alpha\left(\tilde{T}^{i0} + \tilde{\beta}^j \tilde{T}^{i}{}_{j}\right)$$

$$\vec{\tilde{S}} = \tilde{S}_i \vec{\tilde{e}} = \hat{S}_i \vec{\hat{e}} = \vec{\hat{S}}$$

テトラッド座標において $\vec{\hat{E}} = -\vec{\hat{v}}_{\mathrm{F}\perp} \times \vec{\hat{B}}$ とできたとすると

$$\vec{\hat{S}} = \alpha e^\infty\left(\vec{\hat{v}}_{F\perp} + \vec{\hat{\beta}}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(1-\left|\vec{\hat{v}}_{F\perp}\right|^2\right)\left[\left|\vec{\hat{B}}\right|^2\left(\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{F\perp} + \vec{\hat{\beta}}\right) - 2\left(\vec{\hat{\beta}}\cdot\vec{\hat{B}}\right)\vec{\hat{B}}\right]$$

すなわち，

$$\vec{\tilde{S}} = \alpha e^\infty\left(\vec{\tilde{v}}_{F\perp} + \vec{\tilde{\beta}}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(1-\left|\vec{\tilde{v}}_{F\perp}\right|^2\right)\left[\left|\vec{\tilde{B}}\right|^2\left(\vec{\tilde{v}}_{F\perp} + \vec{\tilde{\beta}}\right) - 2\left(\vec{\tilde{\beta}}\cdot\vec{\tilde{B}}\right)\vec{\tilde{B}}\right]$$

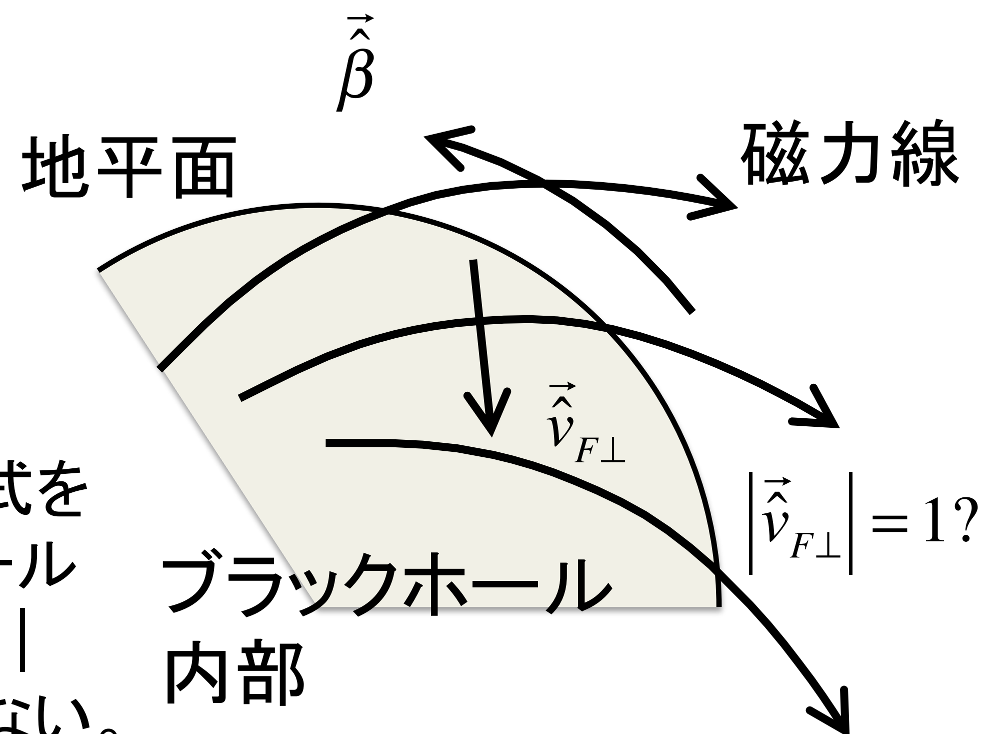
成分で書くと，

$$\tilde{S}^i = \alpha e^\infty\left(\tilde{v}^i_{F\perp} + \tilde{\beta}^i\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(1 - \tilde{v}^k_{F\perp}\tilde{v}_{F\perp,k}\right)\left[\left(\tilde{B}^k\tilde{B}_k\right)\left(\tilde{v}^i_{F\perp} + \tilde{\beta}^i\right) - 2\left(\tilde{\beta}^k\cdot\tilde{B}_k\right)\tilde{B}^i\right]$$

$$\tilde{S}^i = \alpha e^{\infty}\left(\tilde{v}^i_{F\perp} + \tilde{\beta}^i\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(1 - \tilde{v}^k_{F\perp}\tilde{v}_{F\perp,k}\right)\left[\left(\tilde{B}^k\tilde{B}_k\right)\left(\tilde{v}^i_{F\perp} + \tilde{\beta}^i\right) - 2\left(\tilde{\beta}^k \cdot \tilde{B}_k\right)\tilde{B}^i\right]$$

$$\left|\vec{\hat{v}}_{F\perp}\right| = 1?$$

$$\tilde{S}^i = \alpha e^{\infty}\left(\tilde{v}^i_{F\perp} + \tilde{\beta}^i\right)$$



まだ，｜$v_{F\perp}$｜の具体的な表式を得てはいないが，ブラックホールの地平面および内部で｜$v_{F\perp}$｜=1となっているとは到底思えない。

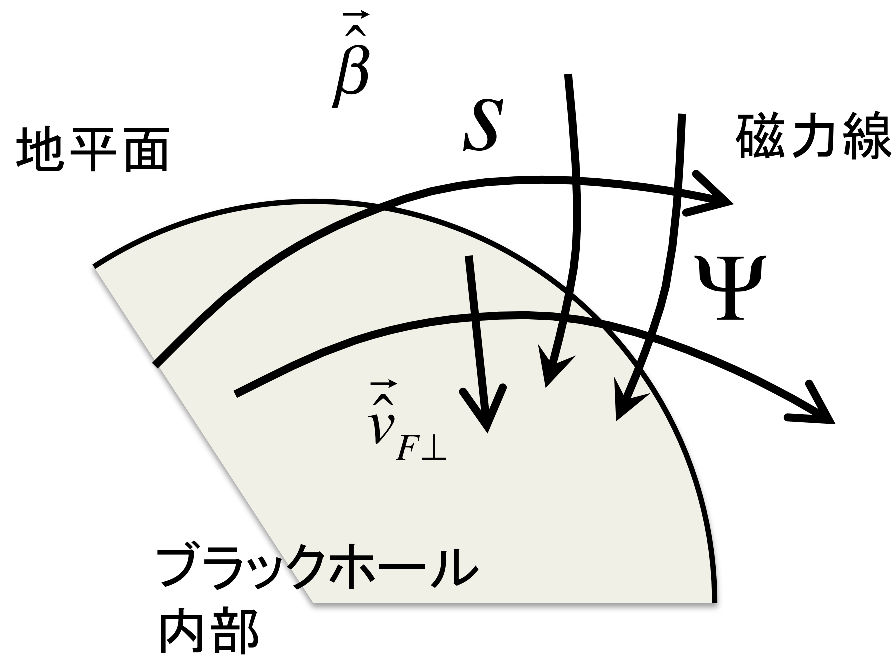
Constants along magnetic surface in stationary, axis-symmetric MHD case on Kerr-Schild coordinates

(t, s, Ψ, ϕ) coordinates:

$$\tilde{B}^{\Psi} = 0$$

$$B^{s}(\Psi) = h_{\Psi} h_{\phi} \tilde{B}^{s}$$ （div B=0）

$$\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi) = \alpha\left[\left(\tilde{v}^{\phi} + \tilde{\beta}^{\phi}\right)\hat{B}^{s} - \tilde{B}^{\phi}\left(\tilde{v}^{s} + \tilde{\beta}^{s}\right)\right]$$



$$\tilde{v}^{\Psi} + \tilde{\beta}^{\Psi} = 0$$

$$I(\Psi) = \alpha\sqrt{\gamma_{\phi}}\left[\left(1 + \tilde{\beta}^{\Psi}\tilde{v}_{\mathrm{F}\Psi} + \tilde{\beta}^{s}\tilde{v}_{\mathrm{Fs}}\right)\tilde{B}_{\phi} - \left(\tilde{\beta}^{\Psi}\tilde{B}_{\Psi} + \tilde{\beta}^{s}\tilde{B}_{\mathrm{s}}\right)\tilde{v}_{\mathrm{F}\phi}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

$$\tilde{J}^{\Psi} + \tilde{\rho}_{\mathrm{e}}\tilde{\beta}^{\Psi} = 0$$ （force-free）