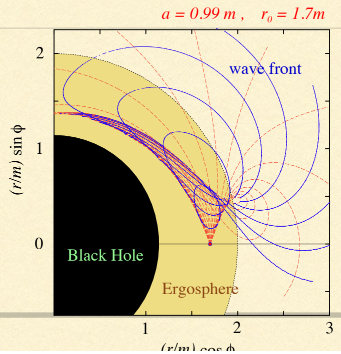
ブラックホール磁気圏研究会@北海道　　2016.03.02-05

# BHからのエネルギー引き抜き：
## イントロダクション

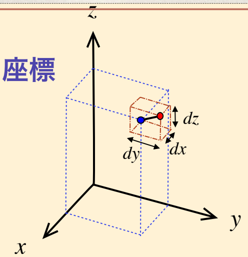
高橋真聡（愛教大）

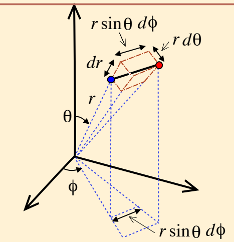



エルゴ領域：光波面への
時空の引きずりの効果

---

デカルト座標



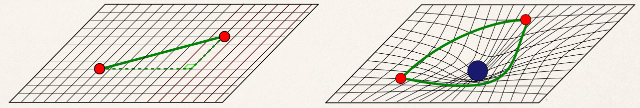

球座標

位置（座標値）を
角度と距離で指定

３次元

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \qquad \Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2$$

２点間距離 → ピタゴラスの定理



平坦な時空　　曲がった時空

４次元

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2$$

アインシュタイン方程式の解

$$\Delta s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)c^2\Delta t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2$$

時空の歪みを示す

---

時空の幾何学（1）

## ブラックホールの曲がった時空

---

## 我々のすむ宇宙は、４次元の世界（時間＋３次元空間）

平坦な時空：　『特殊相対論』で表される

慣性系　$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2$

曲がった時空：　大域的には『一般相対論』が必要

加速度系：　重力がある場合、宇宙膨張している場合、など

$$\Delta s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)c^2\Delta t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2$$

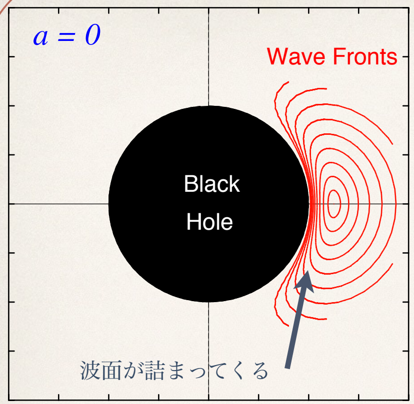
地球の観測者

ただし曲がった時空でも、
局所的には『特殊相対論』が適用できる

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2$$

$\Delta\tau$

BH近くの人




遠方の観測者（私たち）

BH近傍の宇宙飛行士

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r_{\rm em}}}}\,\Delta\tau$$

**時間差** 長くなる

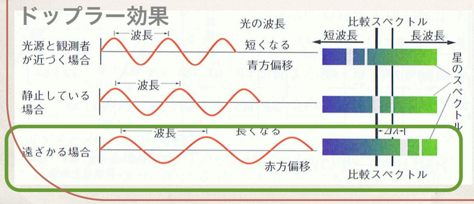
$$\Delta r = \sqrt{1-\frac{2M}{r_{\rm em}}}\,\Delta\ell$$

**距離差** 短くなる

$$\nu_{\rm obs} = \sqrt{1-\frac{2M}{r_{\rm em}}}\,\nu_{\rm em}$$

**振動数** 小さくなる

＝重力によって 波長が伸びる(重力赤方偏移)

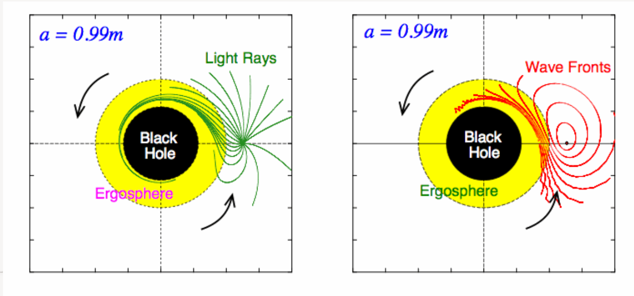



# 時空の引きずり

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g_{jk}(dx^j + \beta^j dt)(dx^k + \beta^k dt)$$

$$\alpha = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\rm FIDO} = \text{“lapse function”} = \text{“redshift factor”}$$

$$\beta^j = -\frac{dx^j}{dt} = \text{“shift function”}$$




# 時空の引きずり

# 時空の引きずり

自転するブラックホール

*erogosphere* *event horizon*

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

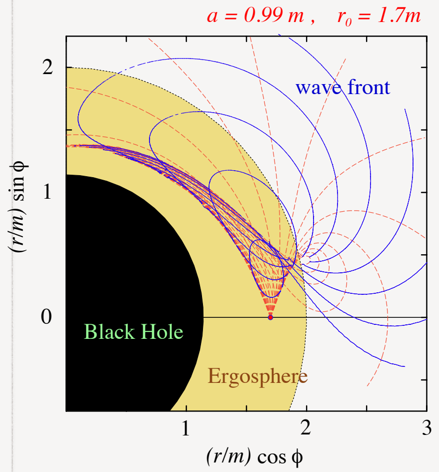
$$= -\alpha^2 dt^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma}\sin^2\theta\underbrace{(d\phi - \omega dt)^2}_{d\tilde{\phi}^2} + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2$$

*lapse function :* $\alpha^2 = \dfrac{\Sigma\Delta}{\mathcal{A}} \longrightarrow 0$

*shift vector :* $\beta^\phi = -\omega = -\dfrac{2mar}{\mathcal{A}} \longrightarrow \dfrac{a}{2mr_+} \equiv \omega_H$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$
$$\mathcal{A} = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta^2$$
$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = (r-r_+)(r-r-)$$

# ERGOSPHERE




Space-time dragging effect by rotating black hole

**Negative potential region**

**→ "Penrose process"**

**Magnetic field lines are also dragged near the horizon.**

**Energy extraction due to magnetic torque:**

**"Blandford-Znajek process "**

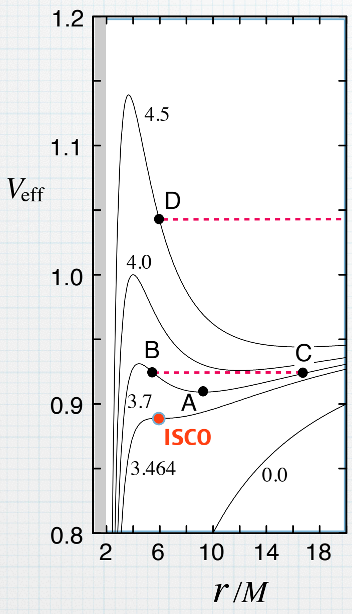
# PENROSE PROCESS

# BH回転エネルギーの引き抜き機構

いくつかあります

- Penrose process
  粒子/光子
  負のポテンシャル領域が存在すること
  磁気圏の場合 Ergosphere外でも可能
- Superradiance radiation
  波
  ergoregion / super-sonic region が存在すること
- Blandford-Znajek (BZ) prcess
  磁場
  磁力線がBHの自転方向に引きずられていること
- Negative Energy MHD inflows
  磁気流体
  流体に比して、磁場が優勢である時に可能

# Effective Potential




**Schwarzschild Black Hole**

from equation of motion (radial)

$$m^2\dot{r}^2 = E^2 - V(r)$$

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

**A** ： circlar orbit

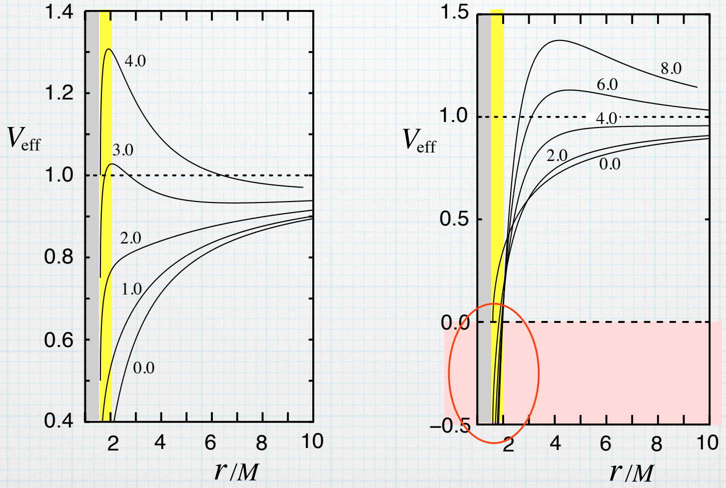
**B-C** ： elliptical orbit

**D-** ： paraboloidal orbit

**ISCO :** inner most stable circular orbit

# Effective Potential

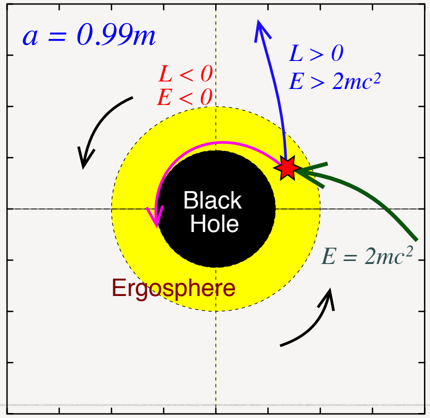
カー・ブラックホール




# PENROSE PROCESS (1969)

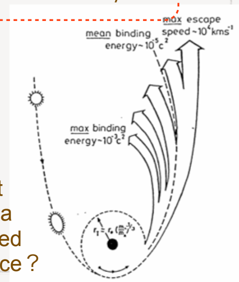
Accretion of negative energy particles

Outgoing particle can release higher than incident energy.



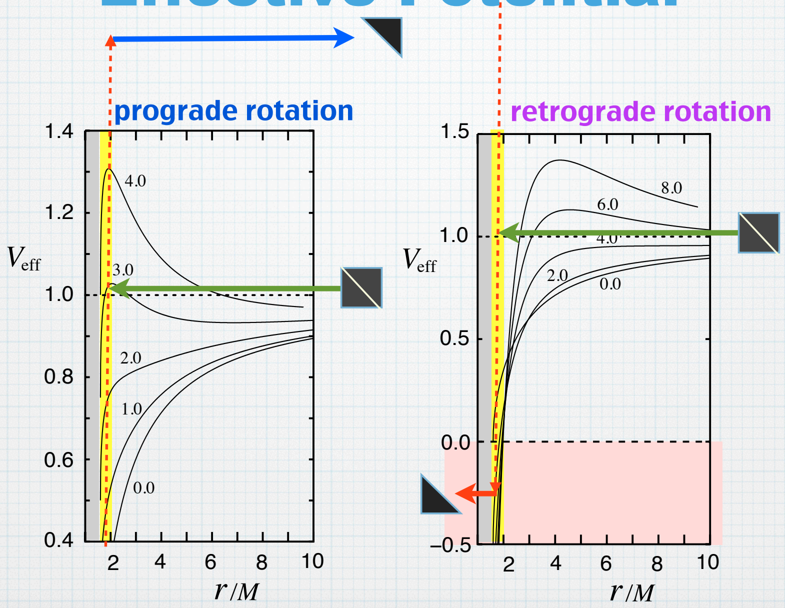

There is a **restriction** that the relative velocity of two particles exceeds c/2.

Bardeen+1972




The Penrose process is not realistic when a star is destroyed by the tidal force ?

# Effective Potential




# Restriction on Penrose-Process

Wagh & Dadhich(1989)

Inertial frame of particle 1 : $\boldsymbol{e}^i_{(t)} = U^i_1\ ,\quad \boldsymbol{e}^i_{(a)}\ (a=1,2,3)$

Energy of particle 1 :

$$E_1 = U_1^\mu k_\mu = U_1^{(\alpha)} k_{(\alpha)} = k_{(t)} \qquad U_1^{(\alpha)} = (1,0,0,0)$$

Energy of particle 2 (after devision) :

$$E_2 = U_2^\mu k_\mu = U_2^{(\alpha)} k_{(\alpha)} = \gamma k_{(t)} + \gamma v^{(\alpha)} k_{(\alpha)} = \gamma k_{(t)} + \gamma |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{k}| \cos\theta$$

$$U_2^{(\alpha)} = (\gamma, \gamma \boldsymbol{v}) \qquad \gamma = (1 - |\boldsymbol{v}|^2)^{-1/2}$$

relative velocity

$$\left( \begin{array}{l} k^\mu k_\mu = k^{(\alpha)} k_{(\alpha)} = k_{(t)} k^{(t)} + k_{(a)} k^{(a)} = E_1^2 - |\boldsymbol{k}|^2 \\ k^\mu k_\mu = g_{tt} \end{array} \right.$$

$$|\boldsymbol{k}| = (E_1^2 - g_{tt})^{1/2} \qquad -1 \le \cos\theta \le 1$$

## Restriction on Penrose-Process (2)

Wagh & Dadhich(1989)

$$\gamma\left[E_1 - |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] \le E_2 \le \gamma\left[E_1 + |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right]$$

for Penrose Process $E_2 < 0$

$$|\boldsymbol{v}| \ge \frac{E_1}{\sqrt{E_1^2 - g_{tt}}}$$

Estimate of the velocity of the lower limit

$a = M$

$E_1 \ge 1/\sqrt{3}$ ( **ISCO** )

$g_{tt}(r_H) \ge -1$

**near the Event Horizon**

$$|\boldsymbol{v}| \ge \frac{1}{2}c$$

**strict condition !**

---

**When electromagnetic field exist、**

**the restriction of the limitation on Penrose process is relaxed.**

## What is the Extracted energy ?

**Rotational energy of a Black Hole**

**Electrostatic potential energy**

**due to the dragging effects of Kerr space-time**

---

## MAGNETIC PENROSE PROCESS

*(Parasana 1978)*

真空磁気圏として扱う

*Ergosphere* 外に

負のポテンシャル領域が可能

~~There is a **restriction** that the relative velocity of two particles exceeds c/2.~~

静電ポテンシャルに由来

荷電粒子に帯するペンローズ過程

制限緩くなる *(Wald 1974)*

*OK !*

---

## Restriction on Penrose-Process (3)

Wagh & Dadhich(1989)

Electrostatic potential $\Phi\ (= A_t)$ in Kerr spacetime

$$\gamma\left[E_1 - |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] - e_2\Phi \le E_2 \le \gamma\left[E_1 + |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] - e_2\Phi$$

$$\gamma\left[E_1 - |\boldsymbol{v}|(E_1^2 - g_{tt})^{1/2}\right] \le e_2\Phi$$

$E_2 < 0$

for Magnetic Penrose Process

$0 < e_2\Phi < E_1$ $\quad |\boldsymbol{v}| < 1/2$ is possible

$E_1 < e_2\Phi$ $\quad$ **no-restrictions !**

# SUPER-RADIANCE RADIATION

# Super-radiance (1)

Boyer-Lindquist coordinate (Kerr geometry) における波動方程式 (スカラー場) は,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[(\sqrt{-g})g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha}\right]_{,\beta}=0 \tag{1.8}$$

である．Kerr 時空の場合に，これを具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned}\left[-\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta}+a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{Mar}{\Delta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial\phi}+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{a^2}{\Delta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}&\\ +\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)&=0\,.\end{aligned} \tag{1.9}$$

と表せる．ここで $\sqrt{-g}=(r^2+a^2\cos^2\theta)\sin\theta$ である．この方程式は、以下のように

$$\Phi(t,r,\theta,\phi)=e^{-i\omega t}e^{im\phi}R(r)S(\theta) \tag{1.10}$$

とおくと変数分離できる。これを適用すると、(1.9) 式は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\omega^2\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta}-\frac{4Mar\omega m}{\Delta}+\frac{a^2m^2}{\Delta}\\ &=-\frac{1}{S\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+a^2\omega^2\sin^2\theta+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\,.\end{aligned} \tag{1.11}$$

と書ける．左辺は $r$ のみの関数、右辺は $\theta$ だけの関数であるが、これらが等しい値をもつことよ

# Super-radiance (2)

と書ける．左辺は $r$ のみの関数、右辺は $\theta$ だけの関数であるが、これらが等しい値をもつことより、おのおのが定数（$A$ とおく）でなければならない。このことより（1.11）式を以下の二つの式

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{\omega^2(r^2+a^2)^2-4Mar\omega m+a^2m^2}{\Delta}-A\right]R=0\,, \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)-\left(a^2\omega^2\sin^2\theta+\frac{m^2}{\sin^2\theta}-A\right)S=0\,. \tag{1.13}$$

に分離（変数分離）できる．

関数 $S$ は $\theta=0,\pi$ で regular でなければならないが、(1.13) 式は $A$ についての固有値方程式となる．この関数 $S$ は，$a\omega=0$ である最もシンプルな場合に “spheroidal wave function” となるのだが、その解は，$S(\theta)=P_{\ell m}(\cos\theta)$, $A=\ell(\ell+1)$ となる．

一方、(1.12) 式は、事象の地平面で発散してしまう。この事情を回避するために、動径方向の長さに関して変数変換を行う。すなわち、

$$\frac{dr^*}{dr}=\frac{r^2+a^2}{\Delta} \tag{1.14}$$

を満たすような半径 $r^*$ を導入する（“tortose” coordinate)。この座標変換により、$r$ 座標について $(r_H,+\infty)$ であった変域が、$r^*$ 座標では $(-\infty,+\infty)$ の変域に変更される（有限の半径に特異点が現れなくなる)。この座標変換により、(1.12) 式は

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\frac{2r\Delta}{(r^2+a^2)^2}\frac{dR}{dr^*}+\left[\omega^2+\frac{a^2m^2-4Marm\omega-\Delta A}{(r^2+a^2)^2}\right]R=0 \tag{1.15}$$

# Super-radiance (3)

と書き換えられる。遠方 $(r\to\infty)$ においては、上式は

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr^*}+\omega^2R\sim 0 \tag{1.16}$$

となり、その解は

$$R\sim\frac{1}{r}e^{\pm i\omega r^*} \tag{1.17}$$

となる。この解は、遠方での ingoing wave と outgoing wave を与える。事象の地平面 $(\Delta\to 0)$ では、(1.15) 式は

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\left[\omega^2-\frac{2am\omega}{2Mr_H}+\frac{a^2m^2}{(2Mr_H)^2}\right]R=\frac{d^2R}{dr^{*2}}+[\omega-m\omega_H]^2R=0 \tag{1.18}$$

となる。ここで、$\omega_H=a/(2Mr_H)$ である。この場合の解は、

$$R\sim e^{\pm i(\omega-m\omega_H)r^*} \tag{1.19}$$

となる。

事象の地平面のすぐ外側にいる観測者（ergosphere 内にいて、$\phi$ 方向に角速度 $\Omega=d\phi/dt\sim\omega_H>0$ で回転する）にとっては、

$$\begin{aligned}\Phi&=e^{-i\omega t}e^{im\phi}e^{\pm i(\omega-m\omega_H)r^*}S(\theta) &(1.20)\\ &=e^{-i(\omega-m\omega_H)t}e^{\pm i(\omega-m\omega_H)r^*}e^{im(\phi-\omega_Ht)}S(\theta) &(1.21)\end{aligned}$$

となる。このうち $e^{-i(\omega-m\omega_H)r^*}$ の方が、ingoing wave に対応する。

# Super-radiance (4)

## 地平面を横切る波のエネルギーフラックス

スカラー場のエネルギーモーメンタム・テンソルは、

$$4\pi T_{\alpha\beta} = \Phi_{,(\alpha}\Phi^*_{,\beta)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}|\Phi_{,\gamma}\Phi^{,\gamma}| \tag{1.22}$$

ここで $\Phi^*$ は complex conjugation．地平面を横切るエネルギーフラックスは、energy flux vector $\mathcal{E}^r = T^{r\mu}\xi_\mu$ を地平面 $(r = r_H)$ にわたって表面積分した

$$\frac{dE}{dt} = \int T^r_t \sqrt{-g}\; d\theta\; d\phi \tag{1.23}$$

で得られる。ここで、

$$4\pi T^r_t = Re(\Phi_{,t}\Phi^{*,t}) = Re\left(\Phi_{,t}\Phi^*{}_{,r^*}\frac{r^2+a^2}{\Sigma}\right) = \omega(\omega - m\omega_H)S^2(\theta)\;\frac{2Mr_H}{\Sigma} \tag{1.24}$$

であることより、

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \omega(\omega - m\omega_H)\frac{2Mr_H}{4\pi}\int S^2(\theta)\;\sin\theta d\theta d\phi} \tag{1.25}$$

を得る。上式より、$(\omega - m\omega_H) < 0$ のとき、$dE < 0$ となるとわかる。すなわち、波の位相速度がブラックホールの角速度より小さい場合（$0 < \omega/m < \omega_H$）には、ブラックホールのエネルギーが地平面の外部に運ばれることになる。この波によるエネルギー引き抜き機構は “superradiance” と呼ばれる。

# （一般相対論での）　磁場の表現（1）

- マックスウェル方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- 電磁場テンソル（特殊相対論）

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = (c\rho_e,\; j^i)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c}j^\nu \\ \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}\partial_\nu F_{\sigma\lambda} &= 0 \end{aligned}}$$

- 座標変換（一般相対論に拡張）　共変微分に置き換え

赤道領域の降着円盤の上下に
低密度プラズマが分布する状況

# 磁場＋プラズマの場合

を流れる電流

ブラックホール自身は、磁場を作らない → 降着円盤が作る

ただし、帯電ブラックホールが自転すると磁場が見える
電場のローレンツ変換 → 磁場となる
BH 内部の電流による磁場発生などは無い

# （一般相対論での）　磁場の表現（2）

- 電場と磁場を電磁場テンソルで書く

例えば、、、 $E_x = F^{xt}$

$$B_x = \epsilon_{xtyz}k^t F^{yz} = -F^{yz}$$

- Black Hole 時空（遠方の観測者から見た座標系）

$$E_\alpha = F_{\alpha\beta}k^\beta \qquad B_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,k^\beta F^{\gamma\delta}$$

電磁場の４元ポテンシャル　$A^\mu$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\partial_\mu A^\mu = 0$　ローレンツ条件

$\Box A^\alpha = (4\pi/c)j^\alpha$

非同次マックスウェル方程式

## 磁力線の運動とは？

- 磁場が回転する（プラズマが磁力線に凍結）
- プラズマの回転＝磁力線の回転とみなせる

## 磁場(磁力線)にトルクが作用する

Znajek condition (1977)

- Lorentz force to act on BH from the outside

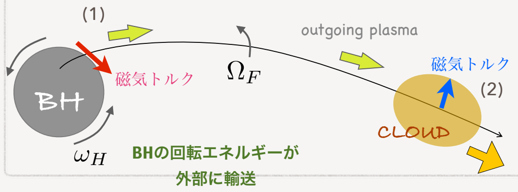
応力 $T_\phi = \frac{1}{4\pi} B_p B_\phi \sim -\frac{(\omega - \Omega_F)}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{(A_{\phi,\theta})^2}{\sqrt{\Sigma}}$ The square of mag.field

- Angular Mom./ Energy Flux

$\mathcal{L}^r = -\sqrt{g_{\phi\phi}}\, T_\phi \qquad \mathcal{E}^r = \Omega_F \mathcal{L}^r$

もしもBH時空が磁気圏を
引きずっている状況なら、、

When $B_\phi < 0$
the energy flux
streams **outward**.




## 磁場も引きずられる

$F_{\theta\phi}$ $(\partial_\theta A_\phi)$ $\quad F_{r\phi}$ $(\partial_r A_\phi)$

磁力線

$A_\phi(r,\theta) = \text{constant} \longrightarrow B_r,\ B_\theta$

$F_{r\theta} \longrightarrow B_\phi$

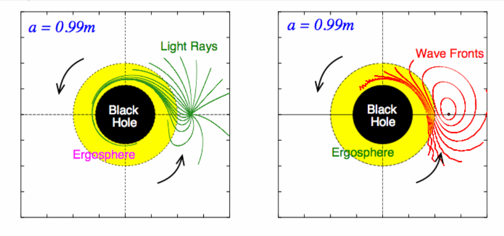
- ブラックホールの時空の引きずりにより
  磁場にトルクが作用する
- 磁場による「エネルギー と 角運動量」の輸送

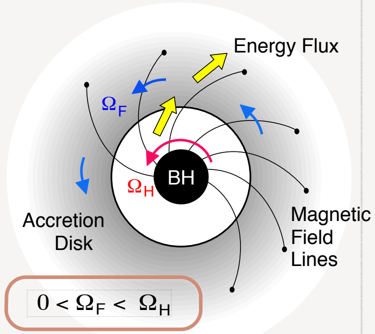
## BLANDFORD-ZNAJEK PROCESS

BLANDFORD & ZNAJEK (1977)
ZNAJEK (1977)

# MAGNETIC INTERACTION

The dragging of space-time trails the magnetic field lines.




このとき、外向きの電磁場のエネルギーフラックスが発生！

＝「回転エネルギー引き抜き」

# BLANDFORD & ZNAJEK PROCESS (1977)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\delta}F_\delta{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2\right)$$

(1) Poynting-flux ($r$-compornant):

$$\mathcal{E}^r(r,\theta) \equiv T^r{}_t = \epsilon_0 \frac{E_\theta B_\phi}{\sqrt{-g}}$$

ideal MHD condition

where $\sqrt{-g} = \Sigma \sin\theta$ , $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ and $E_\theta = \Omega_F F_{\theta\phi} = \Omega_F A_{\phi,\theta}$.

(2) The boundary condition at the horizon : toroidal compornent of magnetic fields

$$B_\phi^H[\Psi(\theta)] = (\omega_H - \Omega_F)\frac{(r_H^2 + a^2)\sin\theta}{\Sigma_H}(A_{\phi,\theta})_H$$

Znajek condition (1977)

(3) Blandford-Znajek Power (Poynting-flux at the horizon):

$$\mathcal{E}_H^r[\Psi(\theta)] = \epsilon_0 \Omega_F(\omega_H - \Omega_F)\frac{(r_H^2 + a^2)}{\Sigma_H^2}(A_{\phi,\theta})_H^2$$

BZ flux　角速度の差 と 磁場強度 に依存

# ENERGY FLUX

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta}P + \frac{1}{4\pi}\left(F^\alpha{}_\gamma F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\right)$$

$$T^{00}_{\rm em} = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) \equiv u_{\rm em}$$ エネルギー密度

$$c\,\Sigma\, T^{0i}_{\rm em}\boldsymbol{e}_i = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{S}$$ エネルギー密度流速（ポインティング・フラックス）

# POYNTING POWER FOR GRB

Lee+ 1999

Rotational energy of BH

$$E_{\rm rot} = f(a)M_{\rm BH}\,c^2 \qquad f(a) = 1 - \sqrt{(1/2)[1 + \sqrt{1-a^2}]} \quad (< 0.29)$$

Total BZ energy

$$E_{\rm BZ} = 1.8\times 10^{54}\varepsilon f(a)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ \text{erg} \qquad \varepsilon = \Omega_F(\omega_H - \Omega_F)$$

time scale $\tau \sim \dfrac{E_{\rm rot}}{B^2 r_H^2 c} \sim 10^3\left(\dfrac{10^{15}{\rm G}}{B}\right)^2\left(\dfrac{M}{M_\odot}\right)$ sec

BZ power $P_{\rm BZ} \sim 2.0\times 10^{50}\left(\dfrac{B}{10^{15}{\rm G}}\right)^2\left(\dfrac{M}{M_\odot}\right)^2$ erg/sec

e.g., $E_\gamma \geq 3\times 10^{53}$ erg　for GRB971214

*Znajek Condition (1977)*

ここがツボ！

## 磁場の座標変換（座標系による成分の違い）

- Boyer-Lindquist coordinate　（遠方にいる観測者の系）

$$E_\alpha = F_{\alpha\beta}k^\beta \qquad B_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,k^\beta F^{\gamma\delta}$$

- ZAMO（時空の引きずりと一緒に回転）

$$\bar{E}_\alpha = F_{\alpha\beta}u^\beta_{\rm zamo} \qquad \bar{B}_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u^\beta_{\rm zamo}F^{\gamma\delta}$$

- Kerr-Shild coordinate　（ingoing null 系）

$$\tilde{E}_\alpha = F_{\alpha\beta}k^\beta \qquad \tilde{B}_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,k^\beta F^{\gamma\delta}$$

## 「事象の地平面」での境界条件

- 磁場をアンカーするような "表面" は無い！
  ただし、磁場を引きずる（電気抵抗 30Ω に相当）
- 磁力線(磁気面)は地平面を貫通しても良い存在
  磁気フラックス：スカラーで表される（座標系によらない）
- 磁場の成分の中には発散するものがある
  重力赤方偏移の因子が含まれるため
- トロイダル磁場が non-zero 値をもつ　*Znajek Condition*

表 3.1: BL-ZAMO-KS における電場と磁場の対応　　*by* 高橋ノート

| BL | ZAMO | KS　Ingoing-null |
|---|---|---|
| $E_t = 0$ | $\overline{E}_t = 0$ | $\tilde{E}_t = 0$ |
| $E_r = \Omega_F F_{r\phi}$ | $\overline{E}_r = \frac{1}{\alpha_z}(\Omega_F - \omega)F_{r\phi}$ | $\tilde{E}_r = E_r \quad [\tilde{E}^r = E^r]$ |
| $E_\theta = \Omega_F F_{\theta\phi}$ | $\overline{E}_\theta = \frac{1}{\alpha_z}(\Omega_F - \omega)F_{\theta\phi}$ | $\tilde{E}_\theta = E_\theta \quad [\tilde{E}^\theta = E^\theta]$ |
| $E_\phi = 0$ | $\overline{E}_\phi = 0$ | $\tilde{E}_\phi = 0$ |
| $B_t = 0$ | $\overline{B}_t = -\frac{\omega}{\alpha_z}B_\phi$ | $\tilde{B}_t = 0$ |
| $B^r = \frac{G_t}{\sqrt{-g}}F_{\theta\phi}$ | $\overline{B}^r = \frac{\alpha_z}{\sqrt{-g}}F_{\theta\phi}$ | $\tilde{B}^r = B^r \quad [\tilde{B}_r = B_r - \frac{a}{\Delta}B_\phi]$ |
| $B^\theta = \frac{-G_t}{\sqrt{-g}}F_{r\phi}$ | $\overline{B}^\theta = \frac{-\alpha_z}{\sqrt{-g}}F_{r\phi}$ | $\tilde{B}^\theta = B^\theta \quad [\tilde{B}_\theta = B_\theta]$ |
| $B_\phi = \frac{\rho_w^2}{\sqrt{-g}}F_{\theta r}$ | $\overline{B}_\phi = \frac{1}{\alpha_z}B_\phi$ | $\tilde{B}_\phi = B_\phi$ |

（2）表 3.1 より、$\tilde{B}_r = (-1/\Delta)[\Sigma B^r - aB_\phi]$ である。ここで、$\tilde{B}_r$ は地平面で有限値を持つため、地平面近傍で $[\Sigma B^r - aB_\phi] \sim O(\Delta)$ であることがわかる。これより、トロイダル磁場についての地平面での境界条件：

*Znajek condition (1977)*

$$(B_\phi)_{\rm H} = \frac{\Sigma_{\rm H}}{a}(B^r)_{\rm H} = \frac{\Sigma_{\rm H}}{a}\left(\frac{G_t}{\sqrt{-g}}F_{\theta\phi}\right)_{\rm H} = \frac{2mr_{\rm H}\sin\theta}{\Sigma_{\rm H}}(\Omega_F - \omega_{\rm H})\,F^{\rm H}_{\theta\phi} \tag{3.32}$$

を得る。

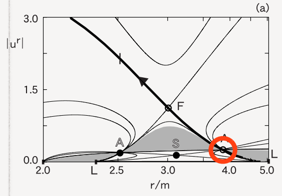
(注) BL 系での $B_\phi$ について： horizon 近傍での $F_{\theta r}$ の振舞いについては、BL 系での議論のみでは不明である。Ingoing 系での境界条件 (この系での磁場は発散しない) を考慮することで、$F_{\theta r} \sim O(1/\Delta)$ のように発散する量であることがわかる。

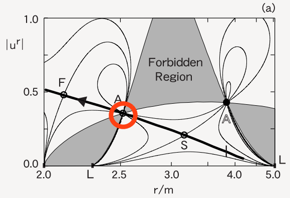
# NEGATIVE ENERGY MHD INFLOWS

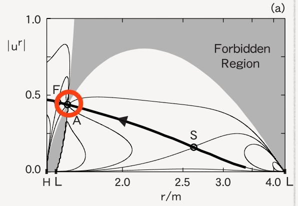
TAKAHASHI ET AL. (1990)

# MHD ACCRETION ONTO BLACK HOLES

BH: slowly rotating | BH: slowly rotating | BH: rapidly rotating




hydro-like | magneto-like | magneto-like

**weak-magnetic field limit**
**=> Hydro Dynamical Flow**

**strong-magnetic field limit**
**=> Force-free magnetosphere**

Some critical points make regularity conditions.

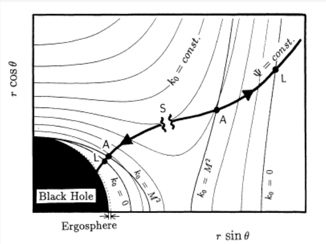
Plasma source => Slow Point => Alfven P. => Fast P. => Event Horizon
(boundary conditions)

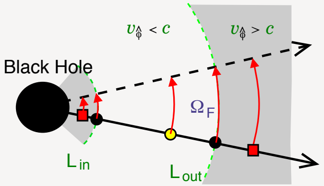
# MHD FLOWS IN A BLACK HOLE MAGNETOSPHERE

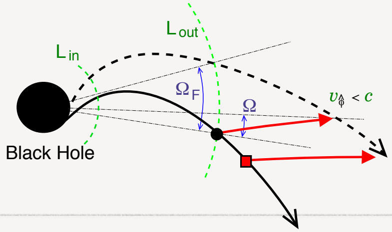
inner/outer Light surfaces

Alfven points

Magnetosonic points




# NEGATIVE ENERGY INFLOWS

MHD flow のエネルギー

$$E = \left( \frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F}{\alpha} \right)_{\rm A} e$$

MHD flow の角運動量

$$L = \left( \frac{-g_{\phi\phi}}{\alpha} \right)_{\rm A} (\Omega_F - \omega_{\rm A})\, e$$

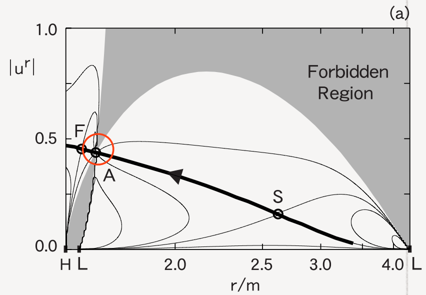
Total-energy in rotational frame

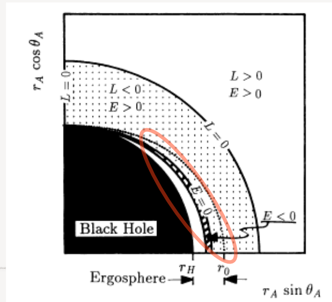
$$e \equiv E - \Omega_F L > 0$$

Gravitational-Lorentz factor

$$\alpha \equiv g_{tt} + 2 g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2$$

$(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F)_{\rm A} < 0 \Rightarrow \boxed{E < 0}$



When the Alfven point locates inside the Ergosphere,

## Energy Extraction from a Rotating BH by MHD Inflows is possible.

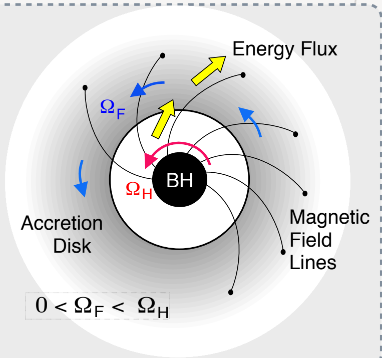
TAKAHASHI + 1990

fluid part | EM part

$$E(\Psi) = \mu u_t - \frac{\Omega_F}{4\pi\eta} B_\phi$$

$-$ $\qquad$ $+/-$ $\qquad$ $-$

Negative energy inflow ・・が可能！ gas accretion BZ process




This situation would be possible in the magnetically-dominated BH magnetosphere .

---

引き抜かれたエネルギー起源の現象を観測するには？

# ディスカッション：**エネルギー引き抜きの総合的理解**


高橋真聡（愛教大）


---

では、始めましょう・・・

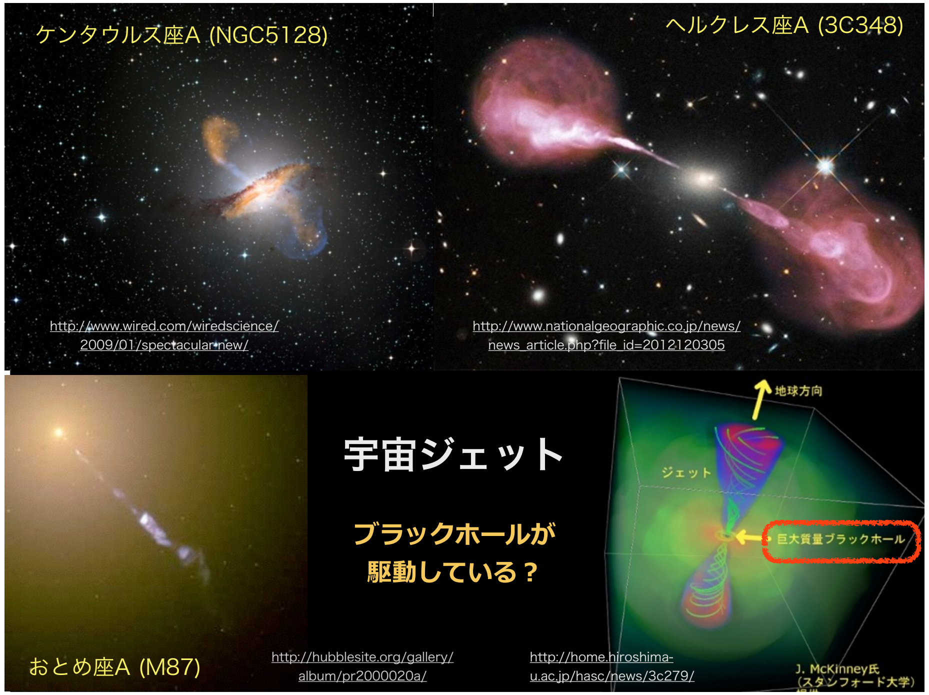
---

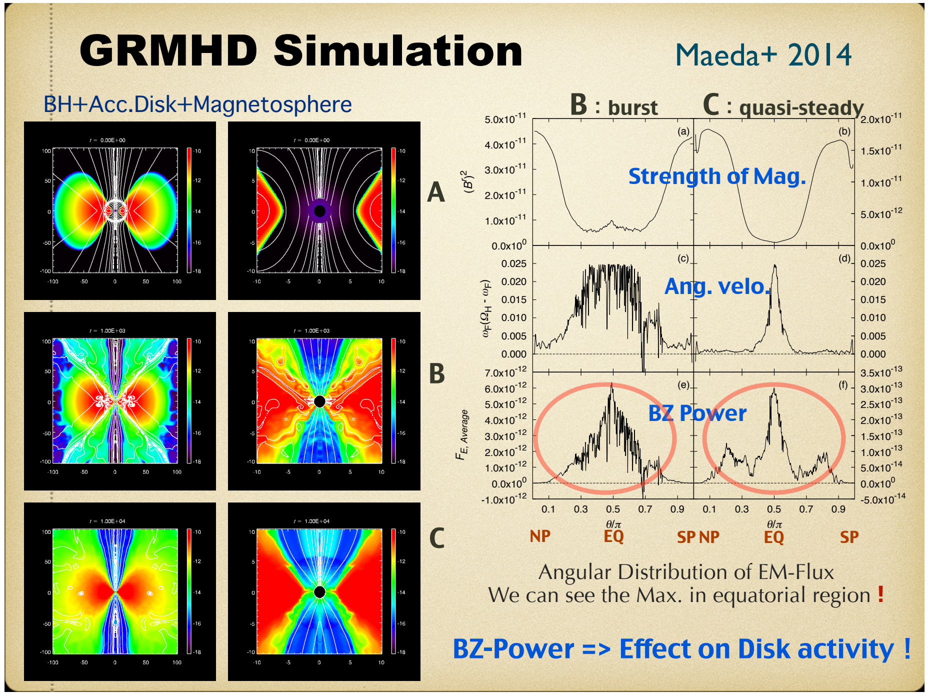
## APPLICATIONS

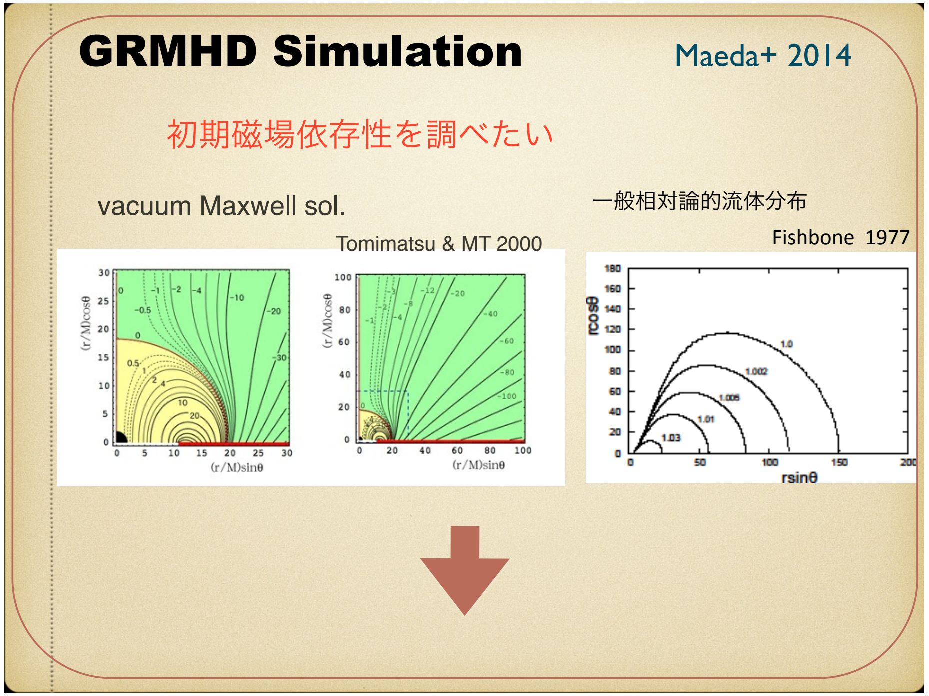
Penrose Process : 粒子加速・宇宙線の起源

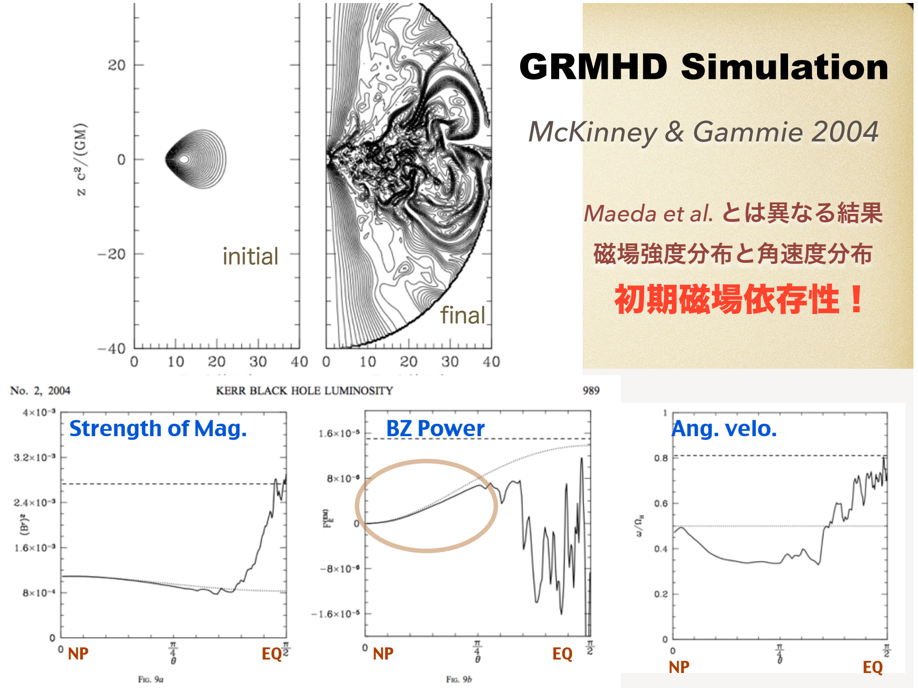
BZ-Power : 宇宙ジェットのエネルギー源
高エネルギー放射
（コロナ・降着ガス円盤）

Superradiance : ブラックホール爆弾
降着ガス円盤の不安定性


ケンタウルス座A (NGC5128)
ヘルクレス座A (3C348)
http://www.wired.com/wiredscience/2009/01/spectacular-new/
http://www.nationalgeographic.co.jp/news/news_article.php?file_id=2012120305
宇宙ジェット
ブラックホールが
駆動している？
地球方向
ジェット
巨大質量ブラックホール
おとめ座A (M87)
http://hubblesite.org/gallery/album/pr2000020a/
http://home.hiroshima-u.ac.jp/hasc/news/3c279/
J. McKinney氏
（スタンフォード大学）


GRMHD Simulation
Maeda+ 2014
BH+Acc.Disk+Magnetosphere
A
B
C
B : burst
C : quasi-steady
Strength of Mag.
Ang. velo.
BZ Power
NP
EQ
SP
Angular Distribution of EM-Flux
We can see the Max. in equatorial region !
BZ-Power => Effect on Disk activity !


GRMHD Simulation
Maeda+ 2014
初期磁場依存性を調べたい
vacuum Maxwell sol.
Tomimatsu & MT 2000
一般相対論的流体分布
Fishbone 1977
rcosθ
rsinθ


initial
final
GRMHD Simulation
McKinney & Gammie 2004
Maeda et al. とは異なる結果
磁場強度分布と角速度分布
初期磁場依存性！
No. 2, 2004
KERR BLACK HOLE LUMINOSITY
989
Strength of Mag.
BZ Power
Ang. velo.
NP
EQ

# ブラックホール・オーロラ

AGN BH近傍のスペクトルを説明？

Fe-line (光源として)

soft X-ray excess (inverse Compton)
power-law component (inverse Compton)

---



## ランキン=ユゴニオ条件

- PARTICLE NUMBER FLUX $U \equiv nu^{\alpha}\ell_{\alpha}$ (number density, four-velocity; ショック面に垂直な単位ベクトル)
- NORMAL COMP. OF THE MAGNETIC FIELD $B_{\perp} \equiv B^{\alpha}\ell_{\alpha}$ (magnetic field)
- ENERGY-MOMENTUM FLUX

$$W \equiv \frac{\mu}{n}U^2 + P + \frac{B^2}{8\pi} \qquad B^2 \equiv \alpha B_p^2 + \frac{B_\phi^2}{\rho_w^2}$$

relativistic enthalpy, pressure, gravitational Lorentz factor

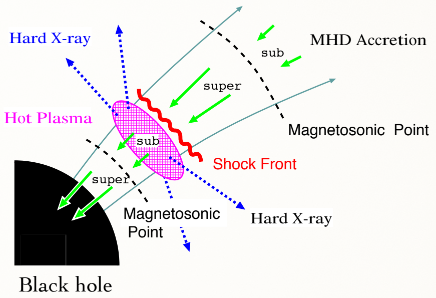
ショック面前後で $U,\ B_{\perp},\ W$ が保存する

上流 → 下流が決まる

---

## 衝撃波で加熱：BH近傍からの放射（観測量となる）

Plasma Source
(accretion disk / corona)
↓
*Slow magnetosonic point*
↓
*Alfven point*
↓
*Fast magnetosonic point* → MHD Shock
shock-free flow ↓ shocked flow ↓
Event Horizon ← 2nd *Fast magnetosonic point*



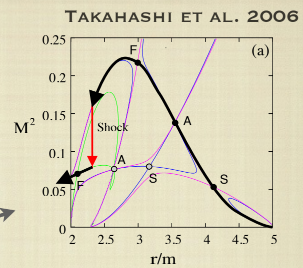

---

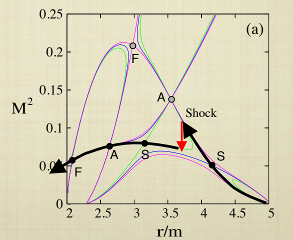
## MHD ACCRETION ONTO BH

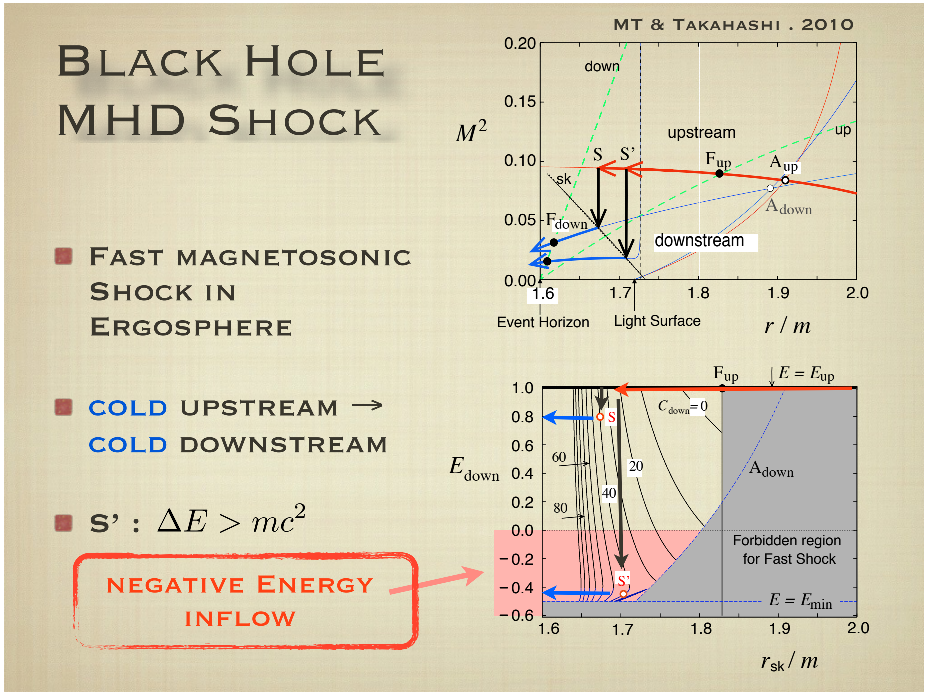
TAKAHASHI ET AL. 2006

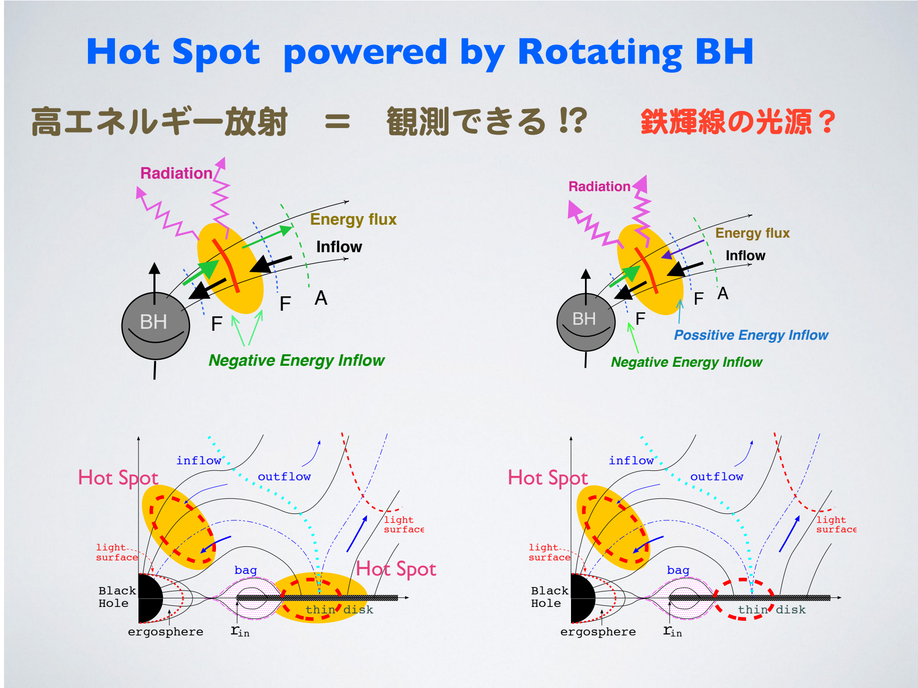
### HOT PLASMA REGION FOR HIGH ENERGY RADIATION

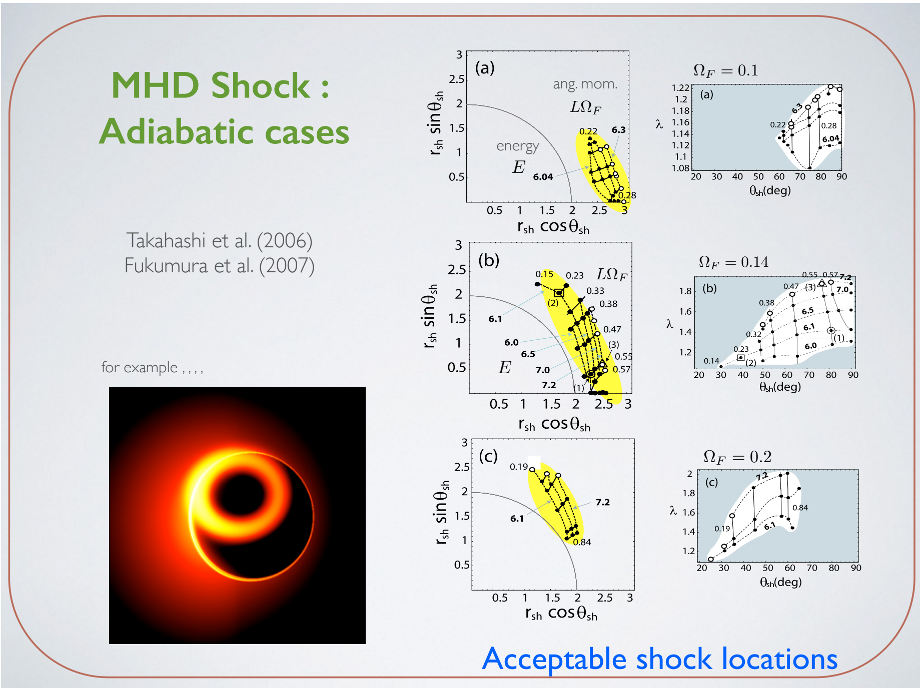
- FAST MAGNETOSONIC SHOCK
- HYDRO-LIKE
- MAGNETO-LIKE
- SLOW MAGNETOSONOC SHOCK

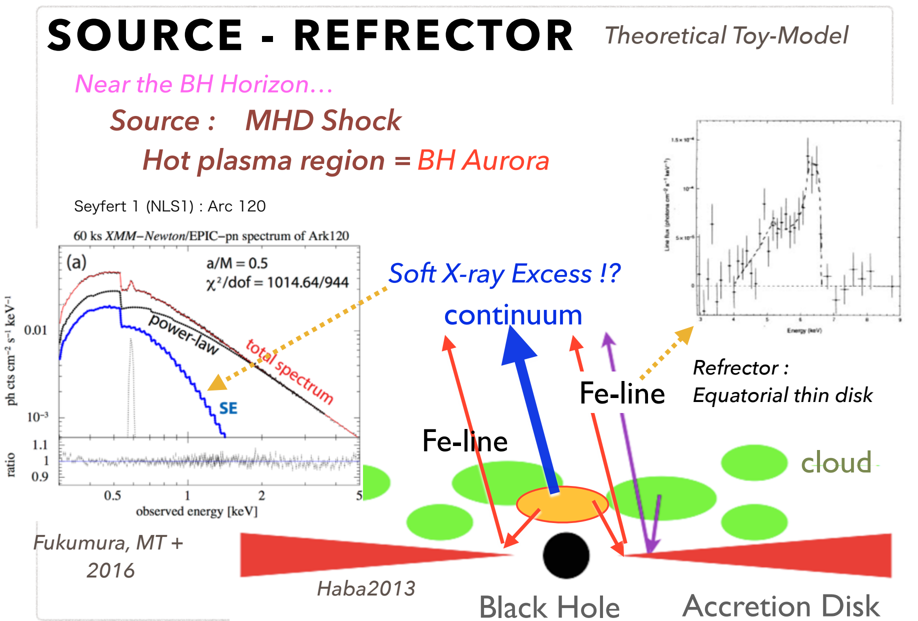



Black Hole
MHD Shock
MT & Takahashi . 2010
Fast magnetosonic shock in ergosphere
cold upstream →
cold downstream
S' : $\Delta E > mc^2$
Negative Energy inflow
$M^2$
down
upstream
up
S
S'
sk
$F_{up}$
$A_{up}$
$F_{down}$
$A_{down}$
downstream
Event Horizon
Light Surface
$r / m$
$F_{up}$
$E = E_{up}$
$C_{down}=0$
$E_{down}$
$A_{down}$
Forbidden region
for Fast Shock
$E = E_{min}$
$r_{sk} / m$


Hot Spot powered by Rotating BH
高エネルギー放射 = 観測できる !? 鉄輝線の光源？
Radiation
Energy flux
Inflow
BH
F
A
Negative Energy Inflow
Possitive Energy Inflow
Hot Spot
inflow
outflow
light surface
bag
Black Hole
ergosphere
$r_{in}$
thin disk

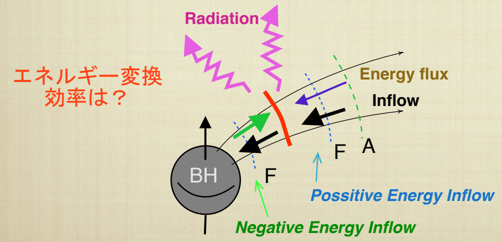

MHD Shock :
Adiabatic cases
Takahashi et al. (2006)
Fukumura et al. (2007)
for example , , , ,
ang. mom.
$L\Omega_F$
energy
$E$
$r_{sh}\sin\theta_{sh}$
$r_{sh}\cos\theta_{sh}$
$\Omega_F = 0.1$
$\Omega_F = 0.14$
$\Omega_F = 0.2$
$\theta_{sh}$(deg)
Acceptable shock locations


SOURCE - REFRECTOR
Theoretical Toy-Model
Near the BH Horizon…
Source : MHD Shock
Hot plasma region = BH Aurora
Seyfert 1 (NLS1) : Arc 120
60 ks XMM–Newton/EPIC–pn spectrum of Ark120
a/M = 0.5
χ²/dof = 1014.64/944
power-law
total spectrum
SE
observed energy [keV]
Soft X-ray Excess !?
continuum
Fe-line
Fe-line
Refractor :
Equatorial thin disk
cloud
Fukumura, MT +
2016
Haba2013
Black Hole
Accretion Disk

# Black Hole Aurora

- Hot Spot in Magnetosphere
- very close to the Event Horizon !
- Ultra-High Energy radiation

Note: 10-20% escape/ GR red-shift effect
--> Information of spacetime ?




# 今後に向けて

- BH時空の理解

  重力赤方偏移・時空の引きずり効果の発現の仕方

- BH回転エネルギー放出の統合的記述？

  粒子として、波として、流体／磁気流体として… ？

- 何を観測すべきか？

  BH Shadow,　Fe line ,　Ultra High-Energy radiation

# BH回転エネルギーの引き抜き機構

- Penrose process

  粒子/光子　　負のポテンシャル領域が存在すること
  磁気圏の場合 Ergosphere外でも可能

- Superradiance radiation

  波　　ergoregion / super-sonic region が存在すること

- Blandford-Znajek (BZ) prcess

  磁場　　磁力線がBHの自転方向に引きずられていること

- Negative Energy MHD inflows

  磁気流体　　流体に比して、磁場が優勢である時に可能