

Superradianceとしての BZ process

名古屋大学 南部保貞

2016/3/2-4

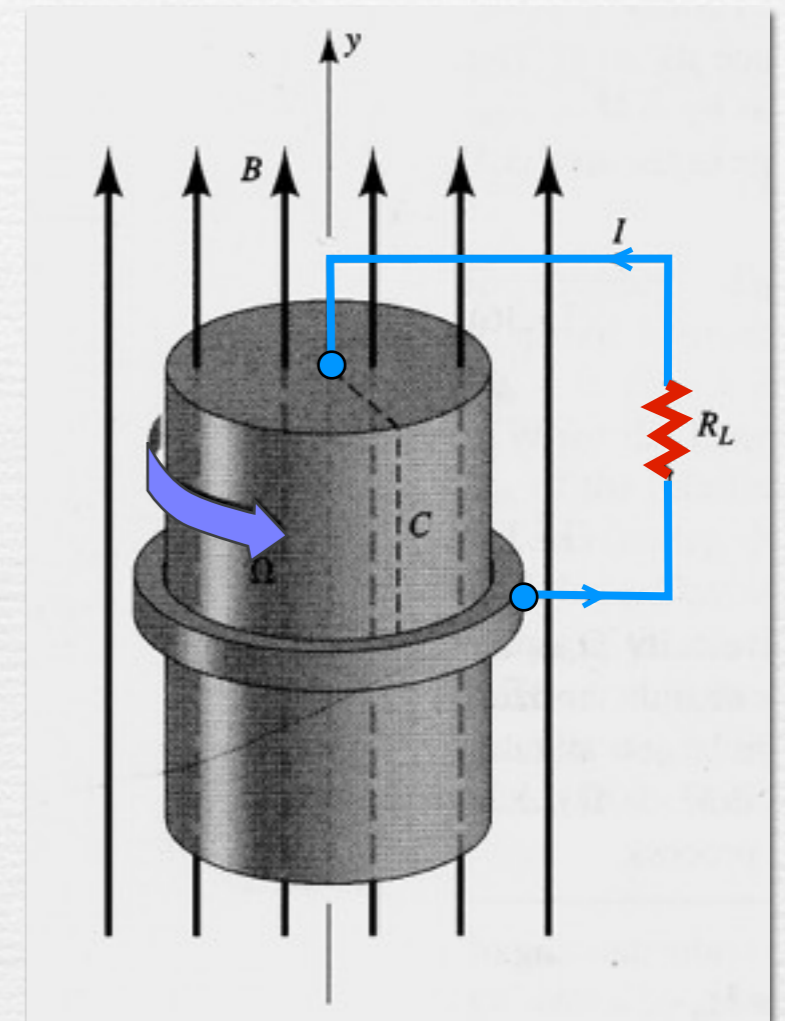
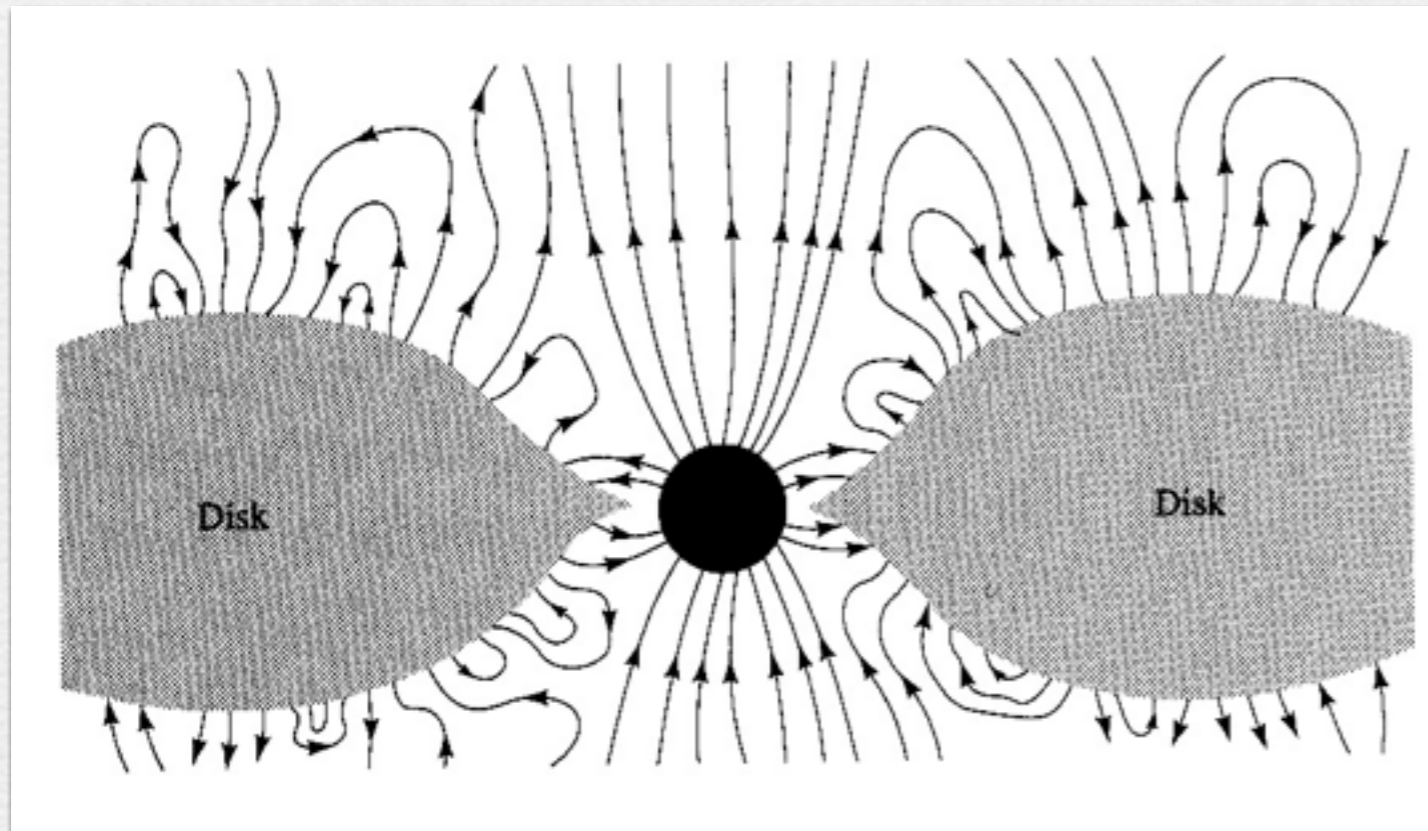
BH磁気圏研究会@夕張マウントレースイ・ホテル

Introduction

Black hole 磁気圏

磁場を用いてBHの回転エネルギーを取り出す

Massの最大33%



unipolar generator

内容

- BH時空でのエネルギー引き抜き
- Superradiance
- BH磁気圏とBZ process
- Superradianceの粒子極限とBH bomb

参考文献

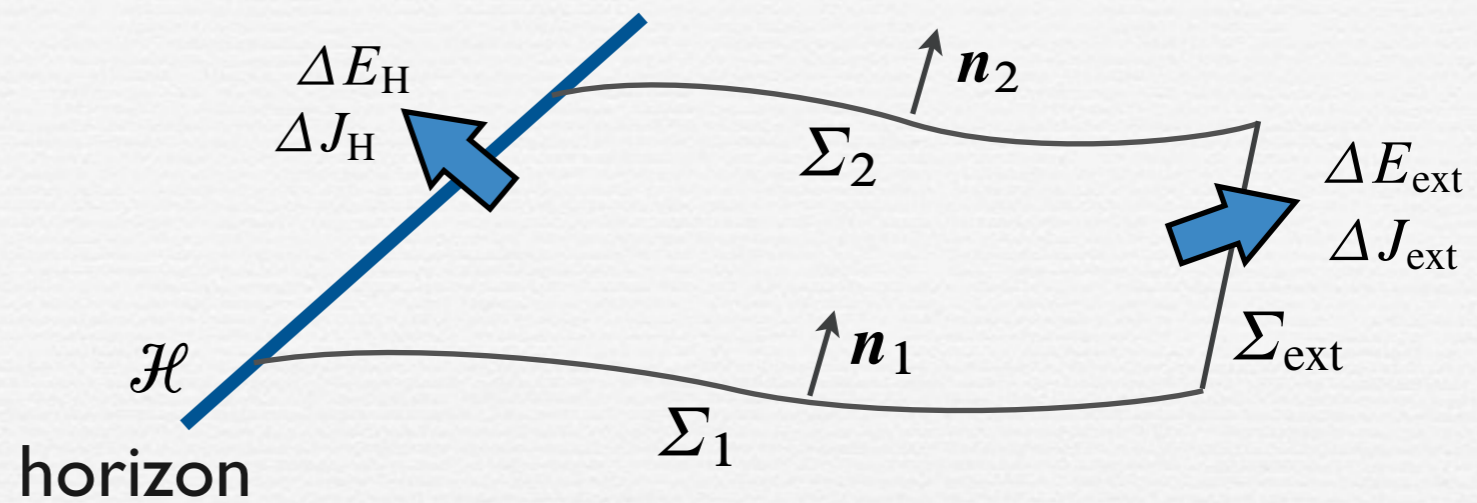
1. “Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes”
R.D.Blandford and R.L.Znajek, *Mon.Not.R.astr.Soc.*(1977)179,433
2. “Black holes:The membrane paradigm” K.Thorne *et al.* (Yale Univ.Press 1986)
3. “Force-Free Approximation - the Black Hole Magnetosphere”
V. Beskin (Springer 2009)
4. “Extracting black-hole’s rotational energy: the generalized Penrose process”
J.P. Lasota *et al.* (arXiv:1310.7499)
5. “Spacetime approach to force-free magnetospheres” S.E.Gralla and T.Jacobson
(arXiv:1401.6159)
6. “Superradiance” R.Brito, V.Cardoso and P.Pani (arXiv:1501.0657)

BH時空でのエネルギー引き抜き

保存則とenergy gain

Killing vector

$$\xi(t) = \frac{\partial}{\partial t} \quad \xi(\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}$$



保存量

$$P^\mu = -T^\mu{}_\nu \xi^\nu(t) \quad \nabla_\mu P^\mu = 0$$

$$M^\mu = T^\mu{}_\nu \xi^\nu(\phi) \quad \nabla_\mu M^\mu = 0$$

$$E = - \int_\Sigma P_\mu n^\mu dV \quad \text{エネルギー}$$

$$J = - \int_\Sigma M_\mu n^\mu dV \quad \text{角運動量}$$

保存則

$$E_2 - E_1 = -\Delta E_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{H}}$$

$$J_2 - J_1 = -\Delta J_{\text{ext}} - \Delta J_{\text{H}}$$

Energy gain

エネルギーがBHから引き抜かれる条件

$$\Delta E \equiv E_2 - E_1 + \Delta E_{\text{ext}} = -\Delta E_{\text{H}}$$

$$\Delta E > 0 \iff \Delta E_{\text{H}} < 0$$

エネルギー条件とエネルギー引き抜き

null energy condition

$$\underline{T_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu} \Big|_{\mathcal{H}} \geq 0$$

$$\ell = \xi_{(t)} + \Omega_H \xi_{(\phi)}$$

angular velocity of horizon

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}$$


$$(-P_\mu + \Omega_H M_\mu) \ell^\mu$$

horizon上で積分

$$-\int_{\Delta\mathcal{H}} P_\mu \ell^\mu dV + \Omega_H \int_{\Delta\mathcal{H}} M_\mu \ell^\mu dV \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_H \geq \Omega_H \Delta J$$

エネルギー引き抜きがある場合は

$$0 > \Delta E_H \geq \Omega_H \Delta J$$

$$\therefore \Delta J < 0$$

回転エネルギーが取り出される

ブラックホール熱力学

第1法則：

$$\Delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\Delta A_H}{4\pi} + \Omega_H \Delta J + T_H \Delta S$$

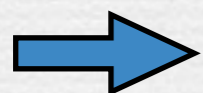
κ : 表面重力

A_H : horizon面積

第2法則：

$$\Delta A_H \geq 0$$

(under weak energy condition)



BHのparameterの変化に対して

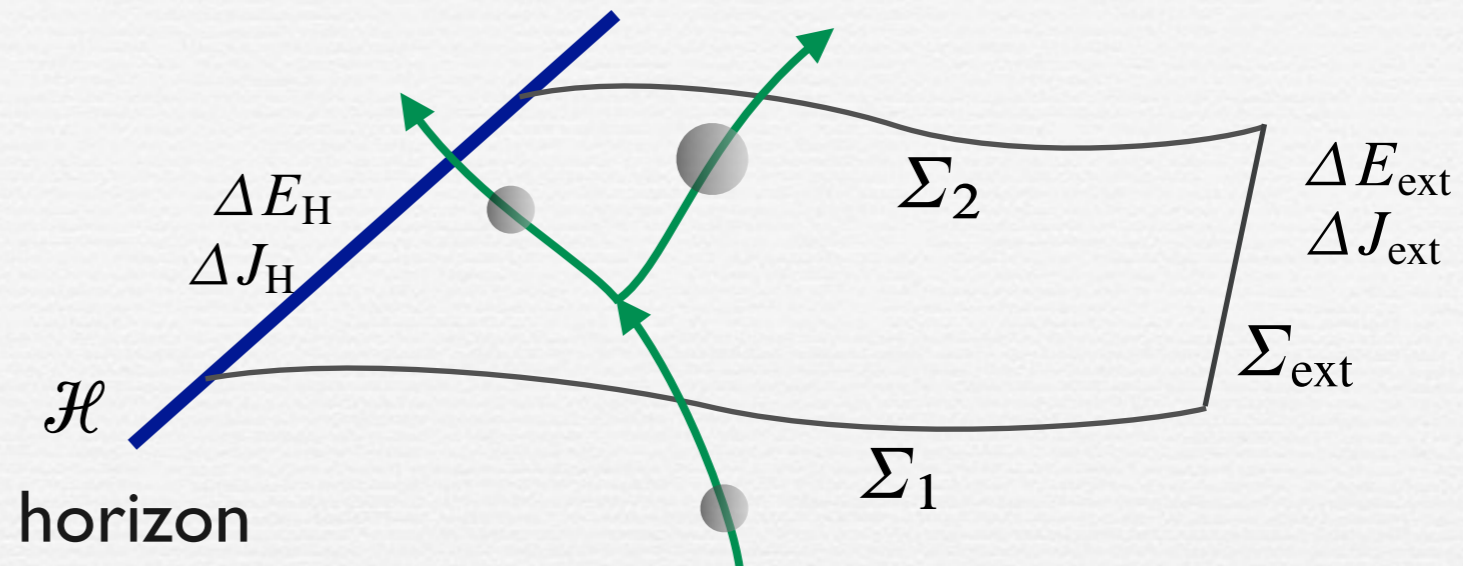
$$\Delta M \geq \Omega_H \Delta J$$

$\Delta M < 0$ ならば $\Delta J < 0$ 回転エネルギーが取り出される
最大全質量エネルギーの 33%

Penrose process

$$E_2 - E_1 = -\Delta E_H$$

$$J_2 - J_1 = -\Delta J_H$$



$$\Delta E_H = -\mu_* \left(\underline{u}_* \cdot \underline{\xi}(t) \right) \Big|_H \quad \longrightarrow \quad \Delta E_H < 0$$

エルゴ領域内では正となりうる

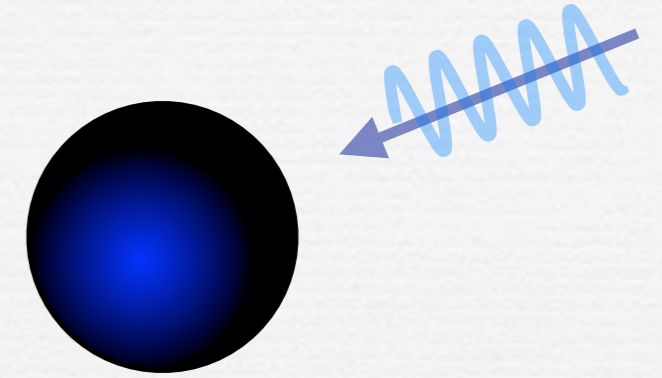
効率 $\eta_{\max} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r_+}} \right)$

massless particleへのdecay

Superradiance

波をBHに落とす

$$\frac{\Delta J}{\Delta M} = \frac{m}{\omega} \quad \begin{array}{l} m : \text{azimuthal number} \\ \omega : \text{angular frequency} \end{array}$$



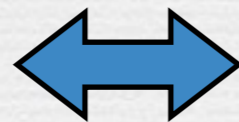
第1法則 $\Delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\Delta A_H}{4\pi} + \Omega_H \Delta J$

$$\Delta M = \frac{\kappa \omega}{8\pi} \frac{\Delta A_H}{\omega - m \Omega_H}$$

エネルギー引き抜き条件

$$\Delta M < 0$$

$$\Delta A_H \geq 0$$



$$\Delta M \propto -\omega$$

$$\Delta J \propto -|m|$$

superradiance条件

$$\omega - m \Omega_H < 0$$

$$\Omega_H \Delta J < \Delta M < 0$$

Superradiance

Kerr時空における波

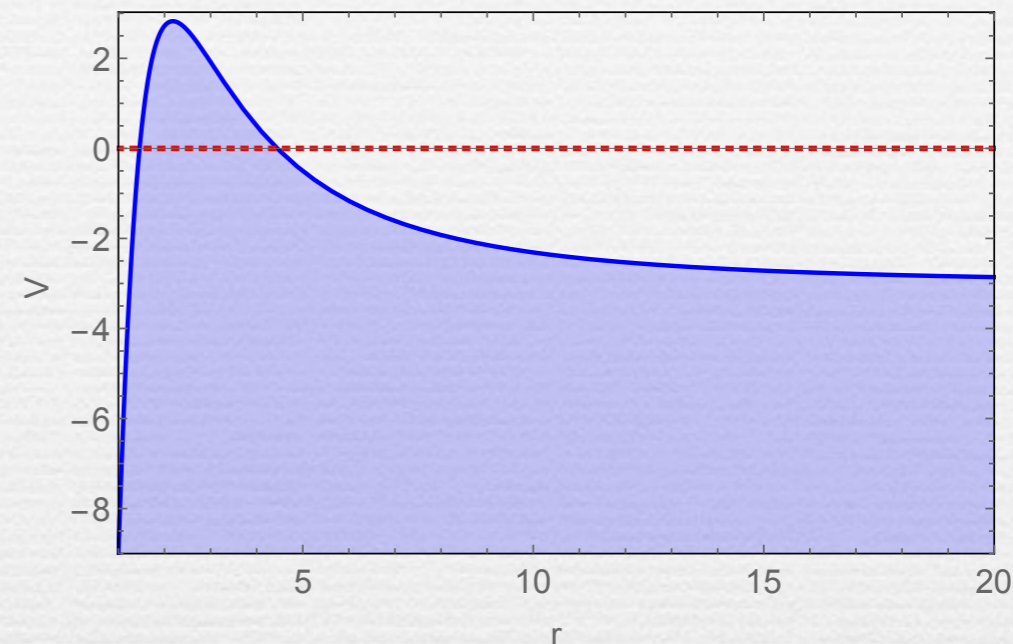
$$(\square - \mu^2)\Phi = 0$$

$$\Phi = \frac{u(r)}{\sqrt{r^2 + a^2}} S(\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}$$

$$-\frac{d^2u}{dr_*^2} + V(r)u = 0$$

$V(r)$ は運動の定数の値で形を変える
 運動可能領域 $V < 0$

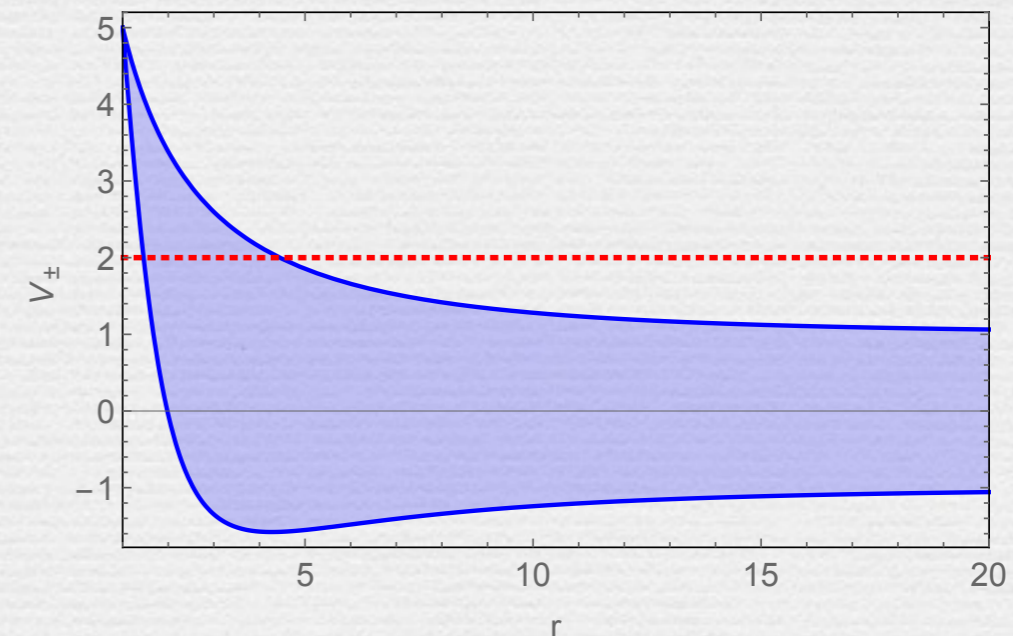
angular frequency ω
 azimuthal number m
 Carter constant $\mathcal{Q} = L^2 - m^2 + O(a^2)$



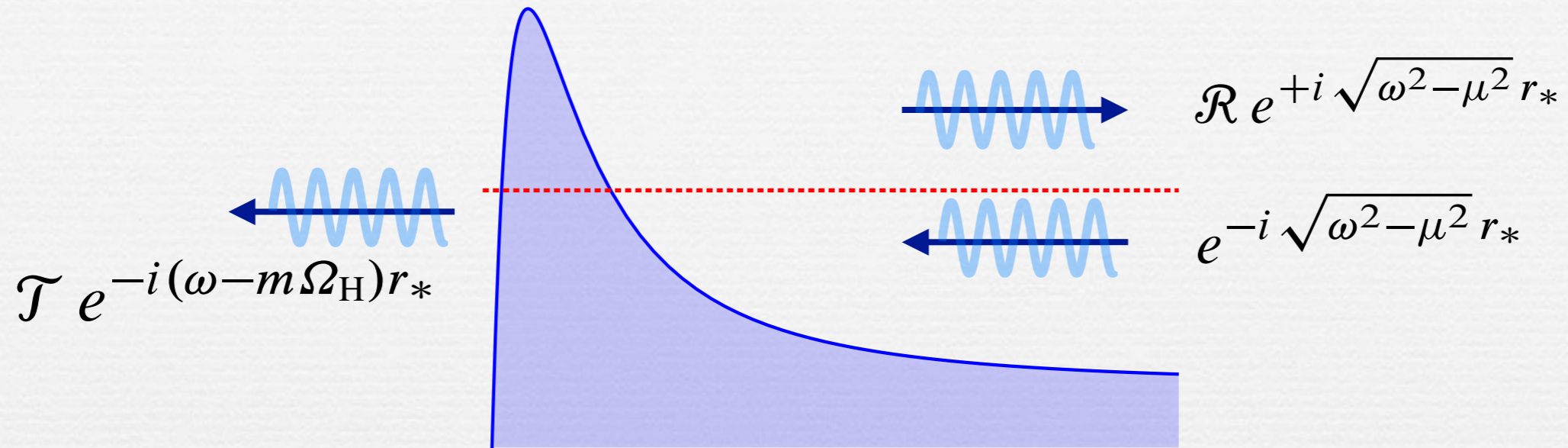
factorized potential

$$-V = \gamma(\omega - V_+)(\omega - V_-)$$

運動可能領域 $\omega > V_+$, $V_- > \omega$



波の振る舞い



保存則：Wronskian一定

$$|\mathcal{R}|^2 + \frac{\omega - m\Omega_H}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} |\mathcal{T}|^2 = 1$$

$$\omega - m\Omega_H < 0$$

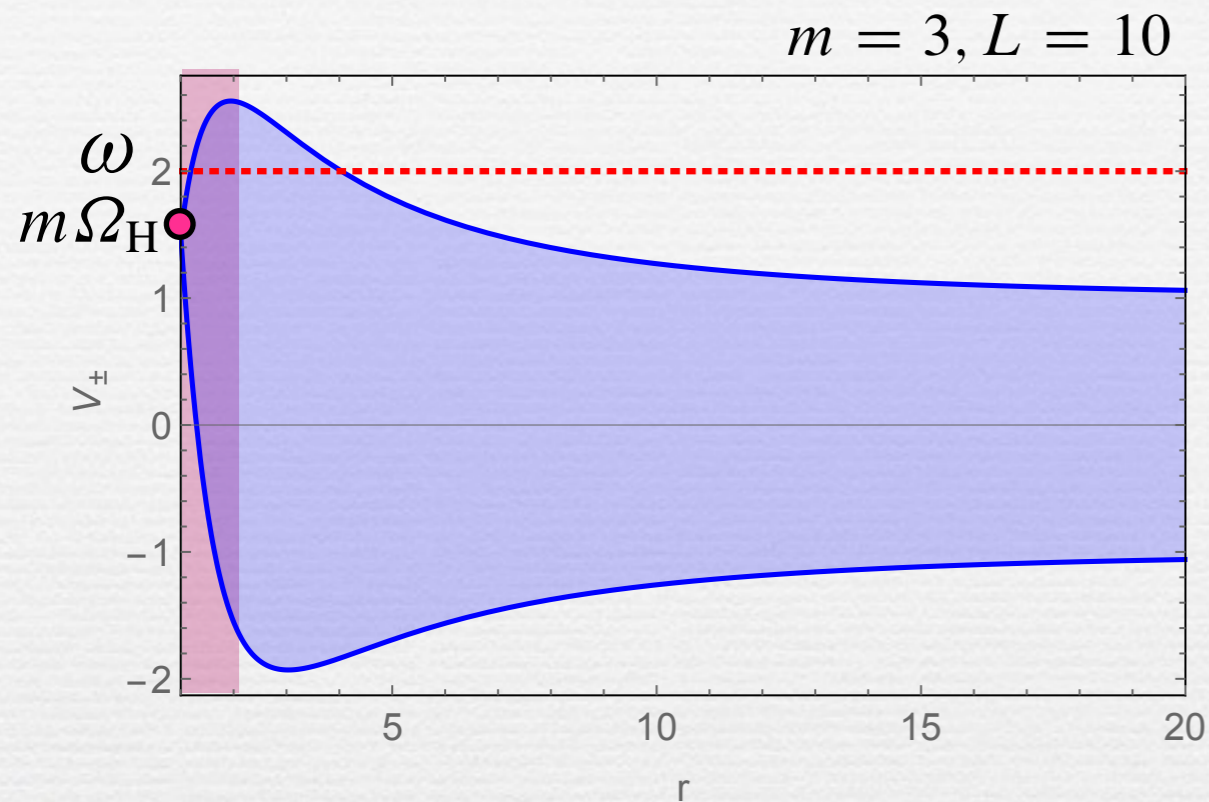


$$|\mathcal{R}|^2 > 1$$

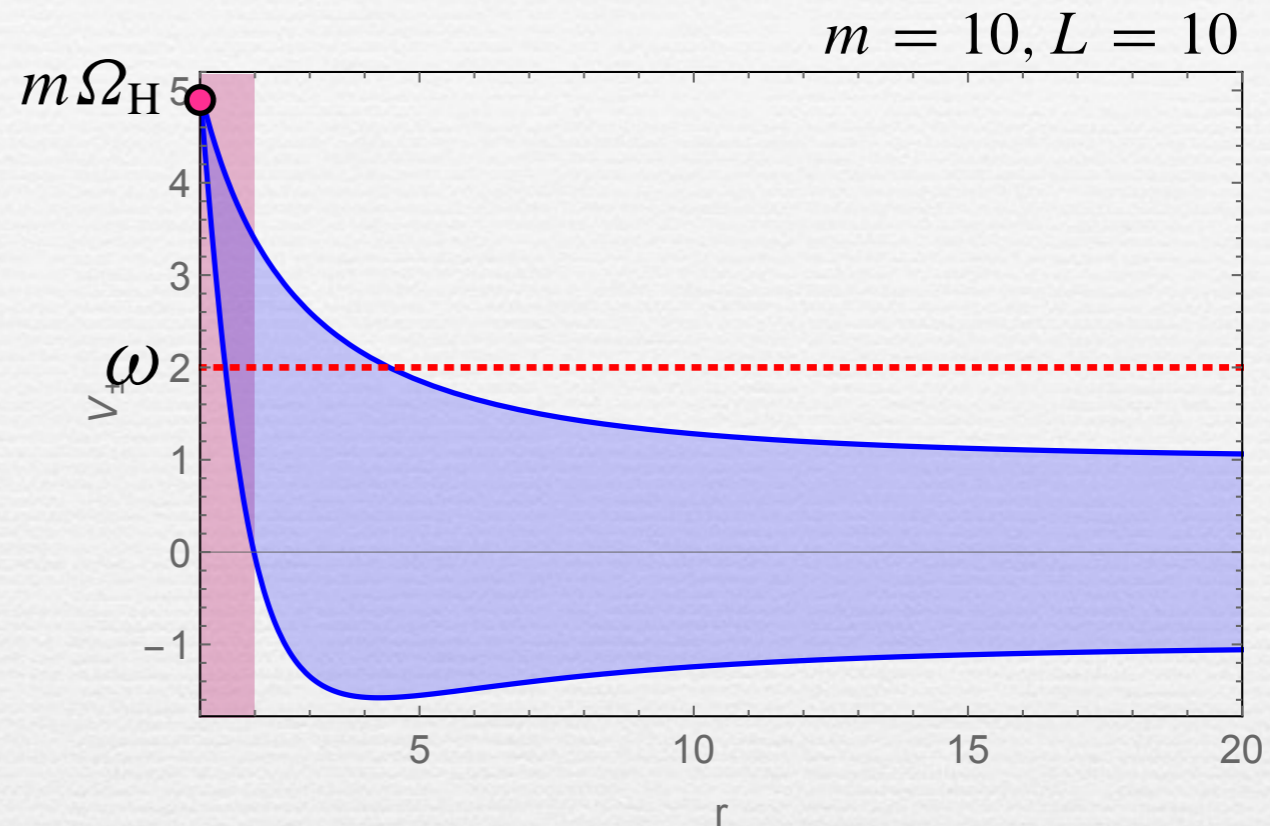
波の振幅が増幅される
superradiance

$$\text{波のエネルギー} \sim |\mathcal{R}|^2 \omega$$

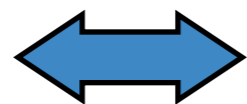
$$\omega - m\Omega_H > 0$$



$$\omega - m\Omega_H < 0$$



$$\omega - m\Omega_H < 0$$

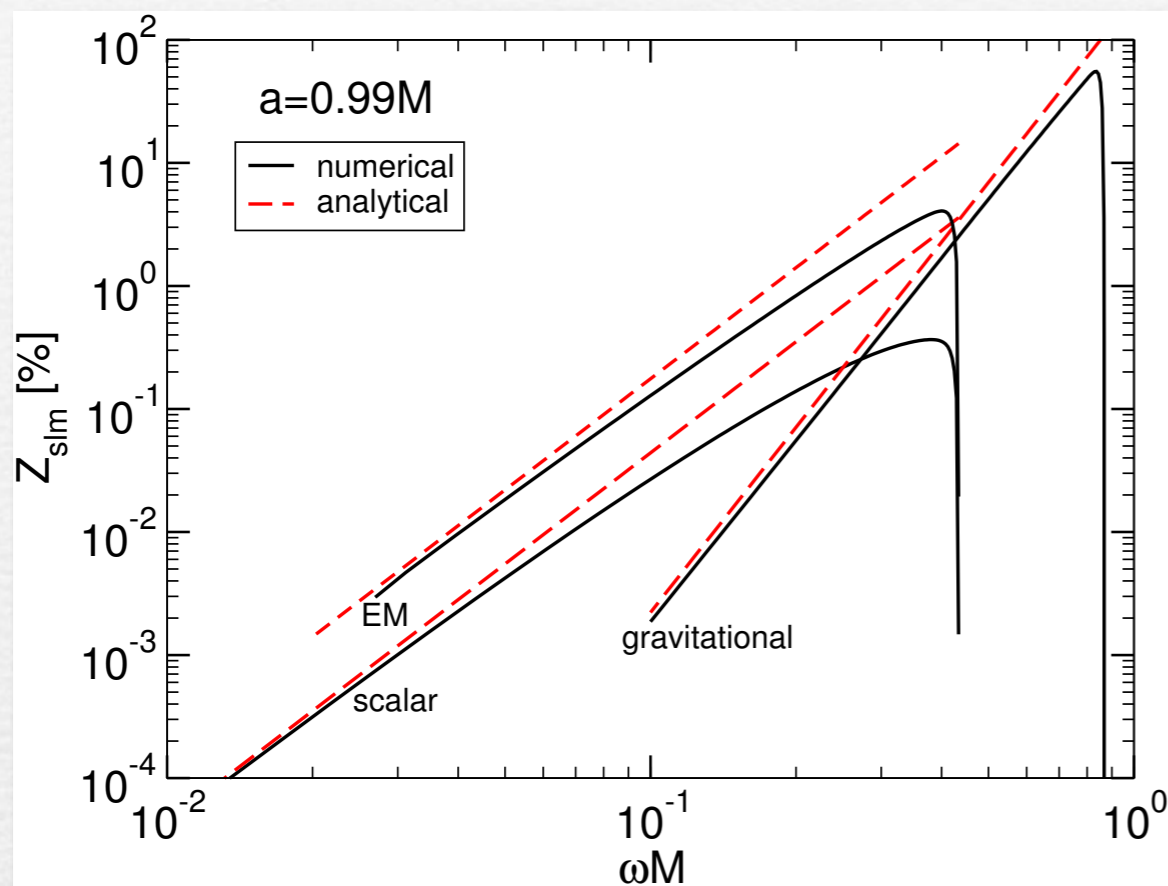


正負両方のエネルギー領域で運動が可能

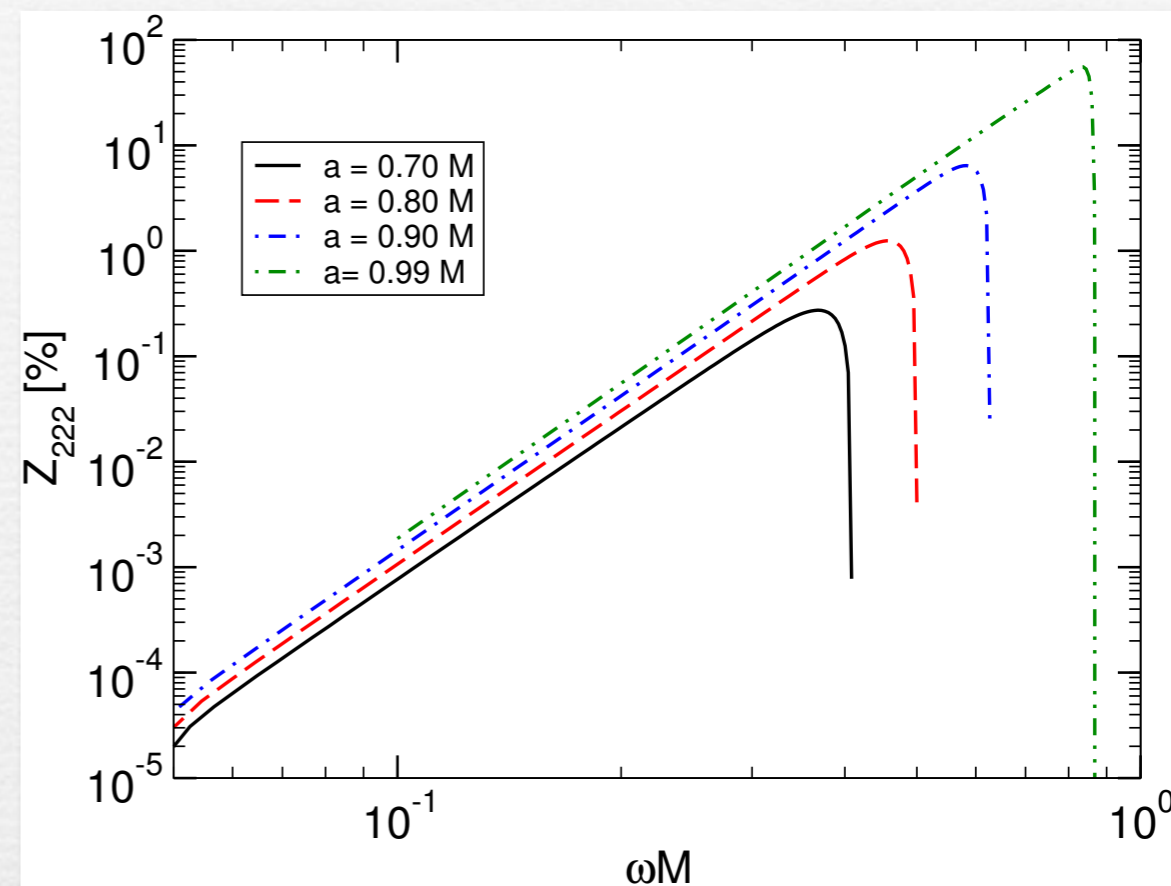
superradianceの条件

level crossing

増幅率



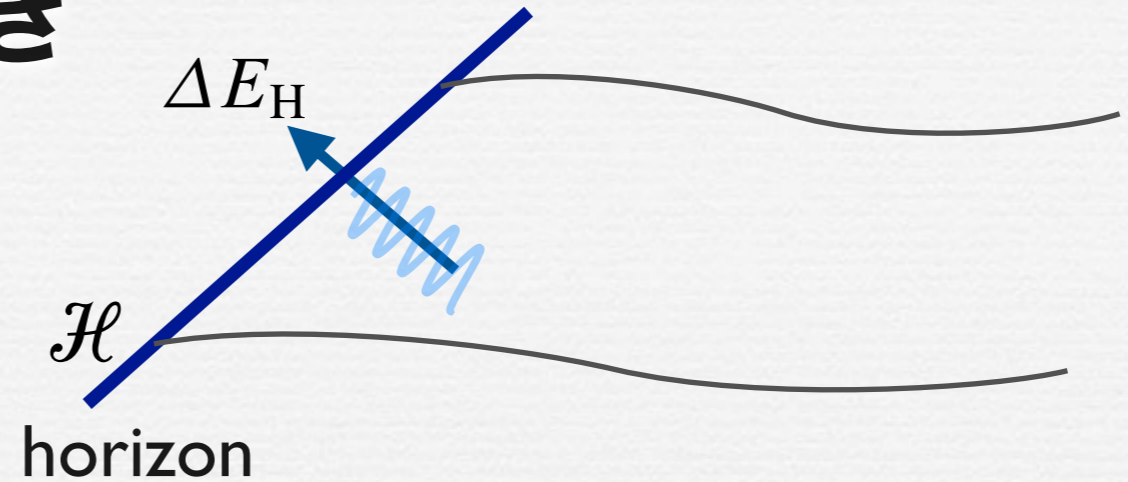
波の種類依存性



a 依存性

波によるエネルギー引き抜き

$$\Phi = \Phi_0(r, \theta) e^{-i\omega t + im\phi}$$



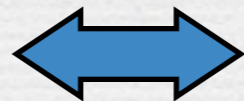
Energy flux on horizon

$$\Delta E_H = \Phi_0^2 \omega (\omega - m\Omega_H) \sqrt{q} \Delta\theta \Delta\phi \Delta t$$

$$\sqrt{q} = 2Mr_+ \sin\theta$$

Superradianceが起きる

$$\omega - m\Omega_H < 0$$



$$\Delta E_H < 0$$

エネルギー引き抜きの条件成立

BH磁気圏とBZ process

Force-free approximation

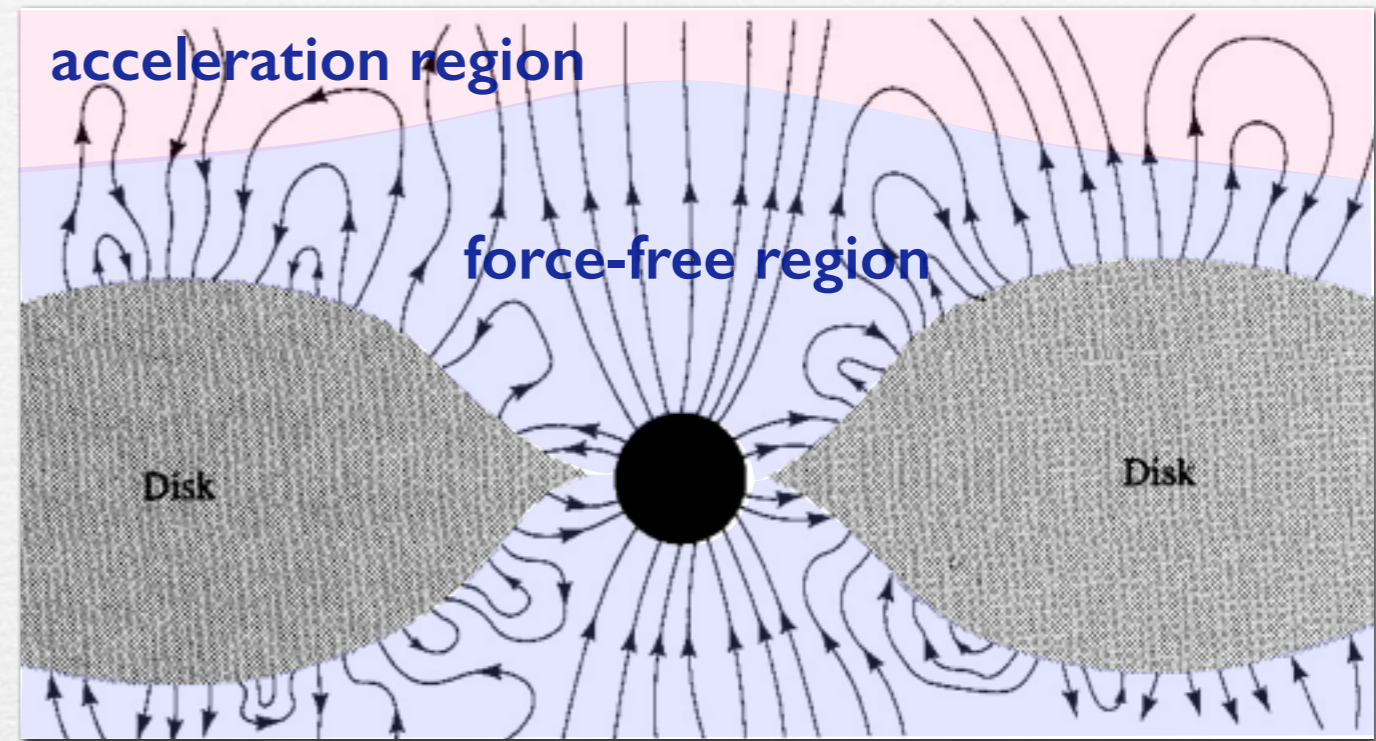
Kerr時空での電磁場とプラズマ

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$$

$$\nabla_b F^{ab} = 4\pi j^a$$

$$\nabla_b T_{(EM)}^{ab} = -F^{ab} j_b$$

$$\nabla_b \left(T_{(EM)}^{ab} + T_{(plasma)}^{ab} \right) = 0$$



電磁場が支配的なら

$$\nabla_b T_{(EM)}^{ab} \approx 0 \quad \longleftrightarrow \quad F^{ab} j_b \approx 0$$

電磁場の配位は次の方程式で決まる

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad F_{ab} \nabla_c F^{bc} = 0$$

force-free solution

$$\nabla_b F^{ab} \neq 0$$

Force-free 磁気圏の構造 定常軸対称

stream function: Ψ $d\Psi = B_p dS$

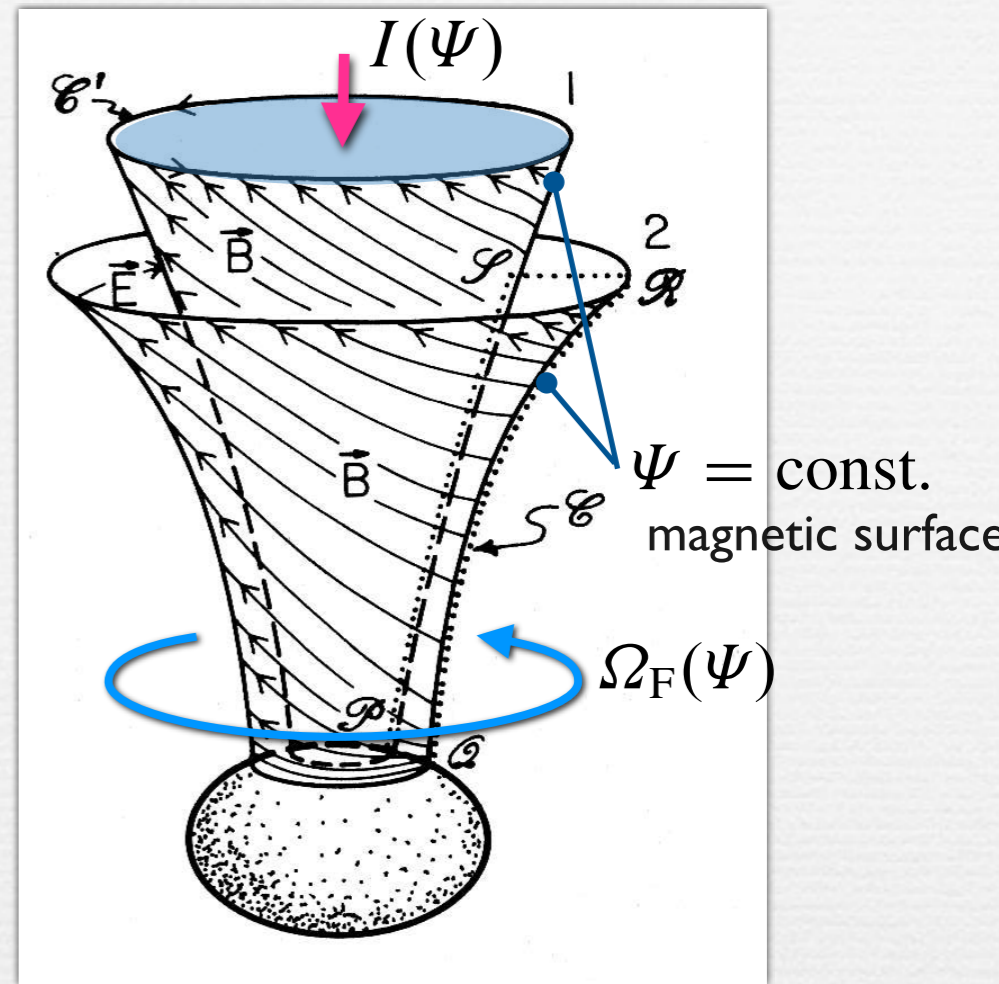
polar current: $I(\Psi)$

angular velocity of field: $\Omega_F(\Psi)$

$$B_p = \frac{\nabla\Psi}{2\pi\varpi} \times e_{\hat{\phi}} \qquad B_t = -\frac{2I(\Psi)}{\alpha\varpi} e_{\hat{\phi}}$$

$$E = -\frac{\Omega_F(\Psi) - \omega}{2\pi\alpha} \nabla\Psi$$

ω : angular velocity of ZAMO



Force-free Grad-Shafranov equation $\Psi(r, \theta)$ を決める

$$\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left\{ \frac{\alpha}{\varpi^2} \left[1 - \frac{(\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2}{\alpha^2} \right] \nabla^k \Psi \right\} + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} (\nabla\Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} + \frac{16\pi^2}{\alpha^2 \varpi^2} I \frac{dI}{d\Psi} = 0$$

BC on singular surfaces: $\alpha^2 = (\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2$

BC on horizon

2つのlight surface

$$1 \approx \Omega_F \varpi$$

遠方

$$\alpha \approx (\Omega_F - \Omega_H) \varpi_H$$

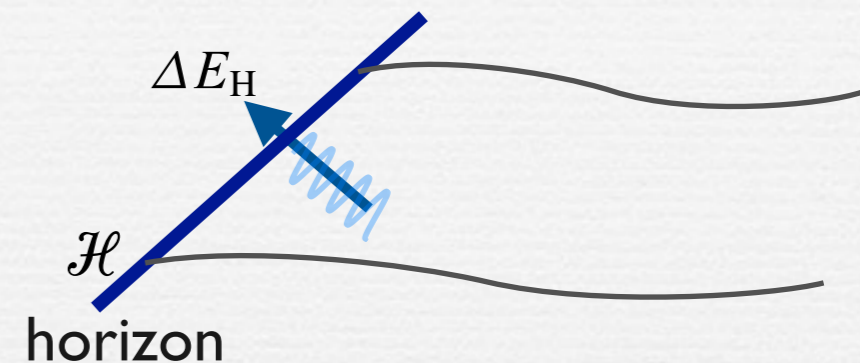
BH近傍

Blandford-Znajek Process

磁場を用いたBH回転エネルギー引き抜きのメカニズム

BC at horizon (Znajek condition)

$$4\pi I(\Psi) = (\Omega_F - \Omega_H) \sin \theta \frac{r_+^2 + a^2}{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)$$



Energy flux across horizon

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t} = \Omega_F(\Psi) I(\Psi) \Delta\Psi = \Omega_F(\Omega_F - \Omega_H) \frac{\sin \theta}{4\pi} \frac{r_+^2 + a^2}{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta} \frac{d\Psi}{d\theta} \Delta\Psi$$

$$\frac{\Delta L_H}{\Delta t} = I(\Psi) \Delta\Psi = (\Omega_F - \Omega_H) \frac{\sin \theta}{4\pi} \frac{r_+^2 + a^2}{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta} \frac{d\Psi}{d\theta} \Delta\Psi \quad \Delta E_H = \Omega_F \Delta L_H$$

$$0 < \Omega_F < \Omega_H \iff \Delta E_H < 0$$

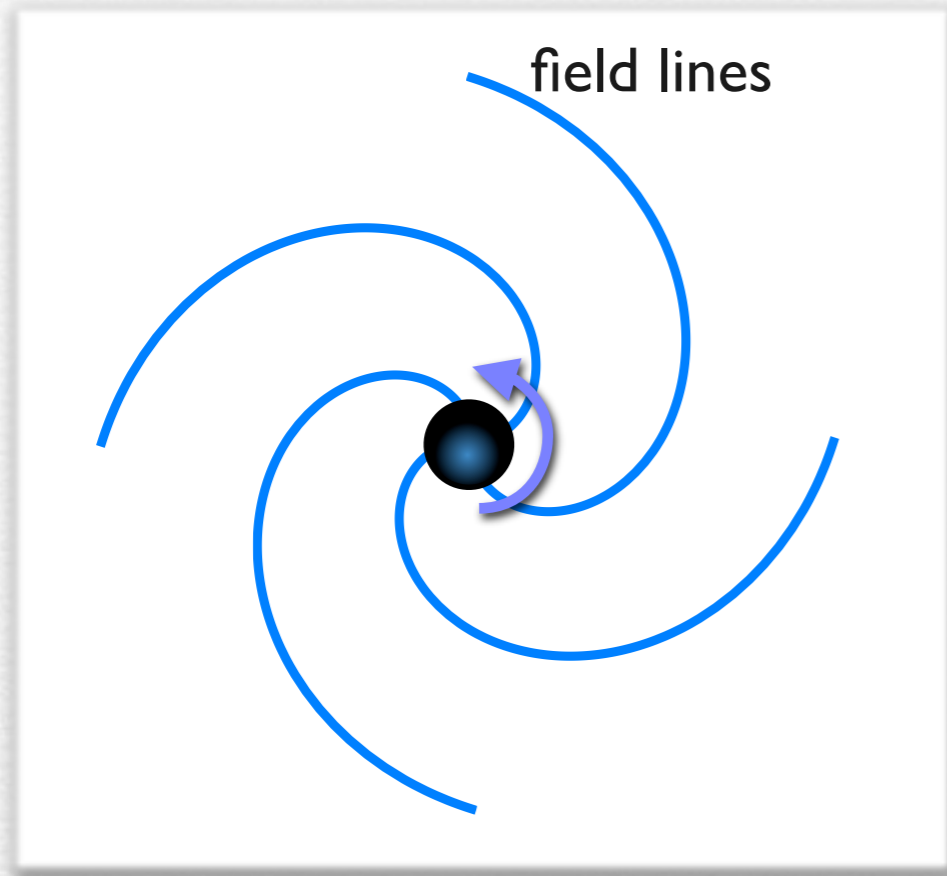
BHの回転エネルギーが引き抜かれる

最適値

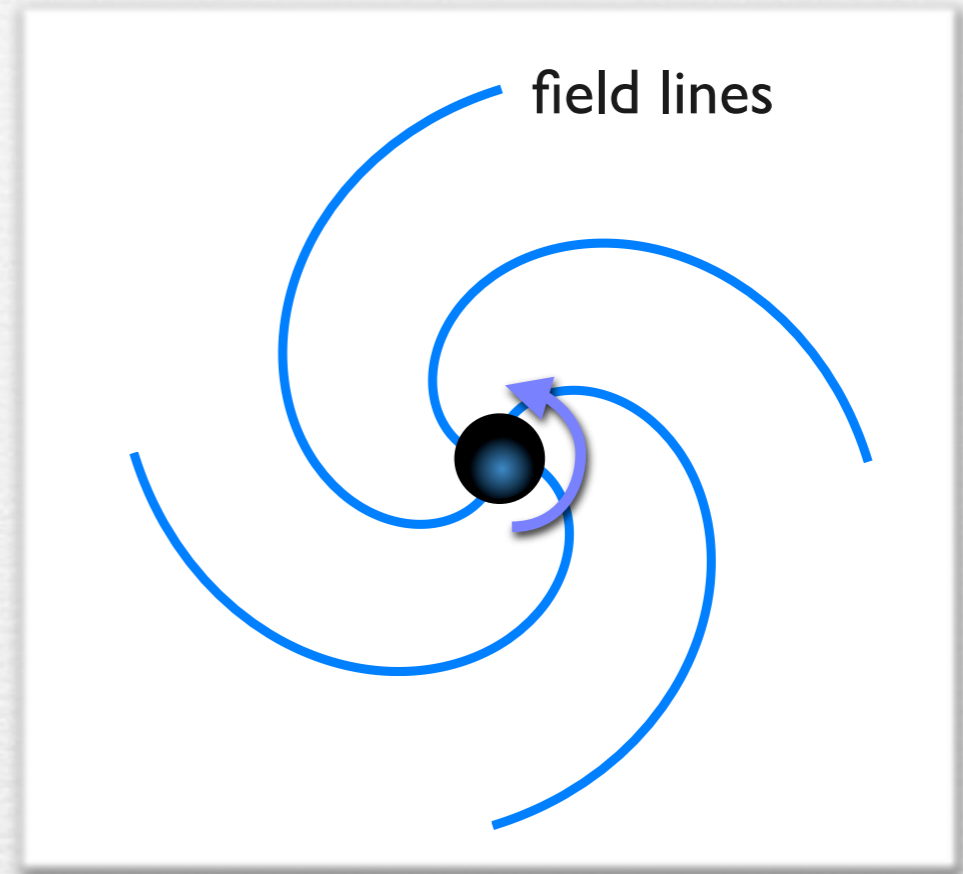
$$\Omega_F = \frac{1}{2} \Omega_H$$

$$\Delta E_H \propto \Omega_F (\Omega_F - \Omega_H)$$

$\Omega_F > \Omega_H$ エネルギー引き抜きなし



$\Omega_F < \Omega_H$ エネルギー引き抜きあり



BZ power

$$P_{\text{BZ}} \approx 10^{45} \text{ erg/s} \left(\frac{a}{M} \right)^2 \left(\frac{B_0}{10^4 \text{ G}} \right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot} \right)^2$$

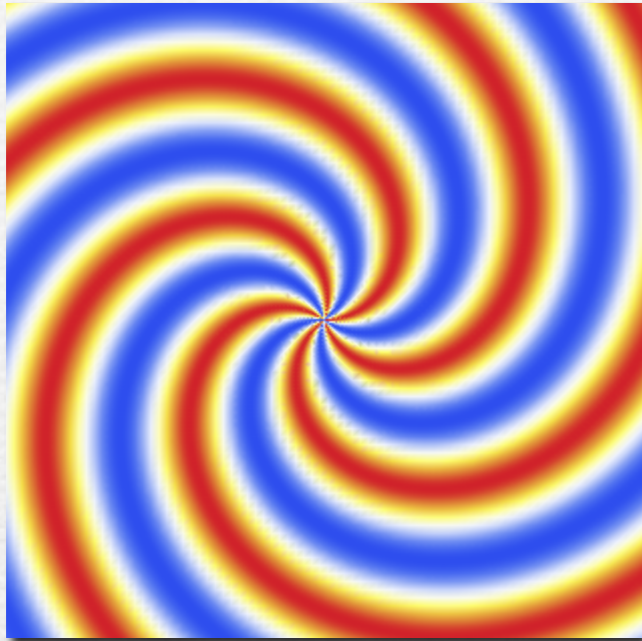
BZ efficiency

$$\eta_{\text{BZ}} = \frac{P_{\text{BZ}}}{\dot{M}} \quad \dot{M} : \text{accretion rate}$$

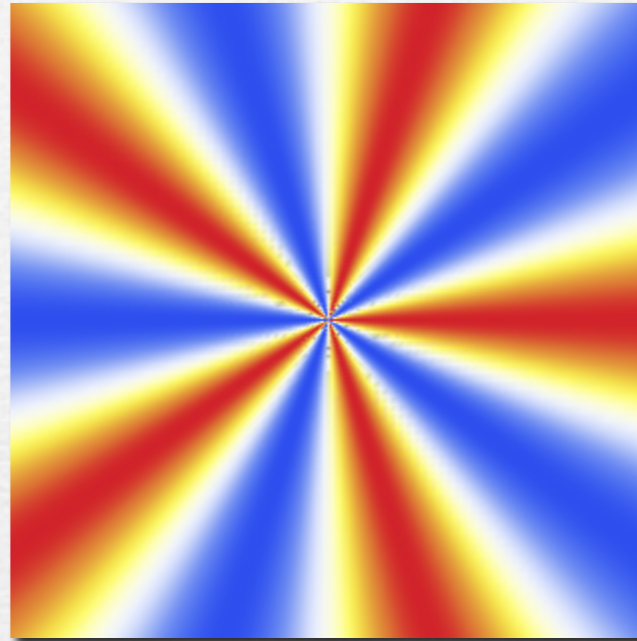
Is BZ process superradiance?

Wave front of $\Phi \propto e^{-i(\omega - m\Omega_H)r} e^{im\phi}$

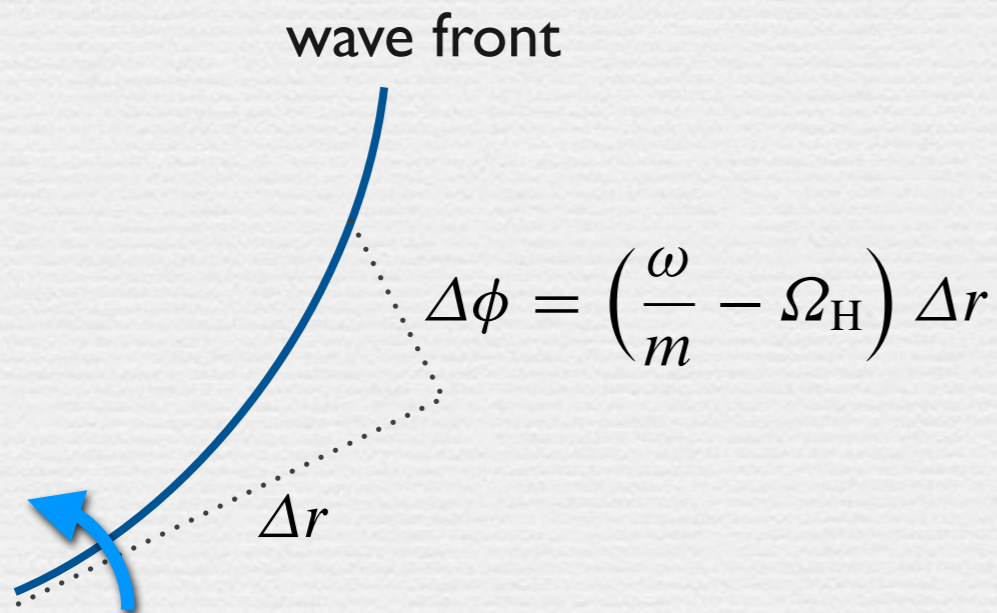
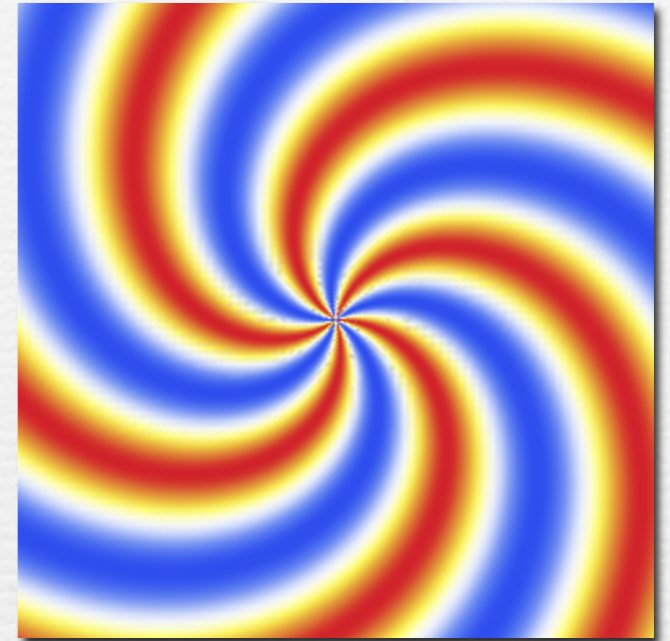
$\omega > m\Omega_H$



$\omega = m\Omega_H$



$\omega < m\Omega_H$



angular velocity of wave front

$$\Omega_{WF} \equiv \frac{\omega}{m}$$

condition of superradiance

$$\Omega_{WF} < \Omega_H$$

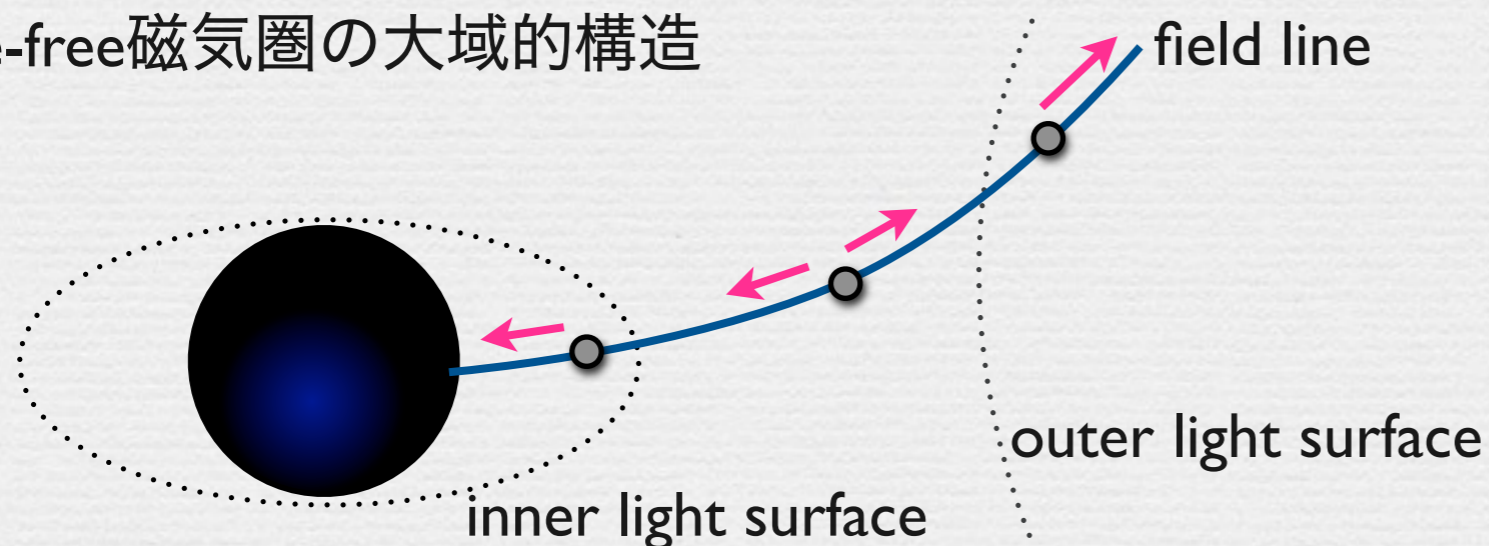
BZ $\Omega_F < \Omega_H$

Penrose process, superradiance and BZ

	Penrose process	superradiance	BZ
エネルギー引き抜き	$\Delta E_H < 0$	$\Delta E_H < 0$	$\Delta E_H < 0$
条件	$(\mathbf{u}_* \cdot \boldsymbol{\xi}(t)) _H > 0$	$\Omega_{WF} < \Omega_H$	$0 < \Omega_F < \Omega_H$
落ちているもの	‘負’のエネルギー粒子	‘負’のエネルギー波	負のPoyinting flux
出ていくもの	エネルギーが増えた粒子	振幅が増えた波	?



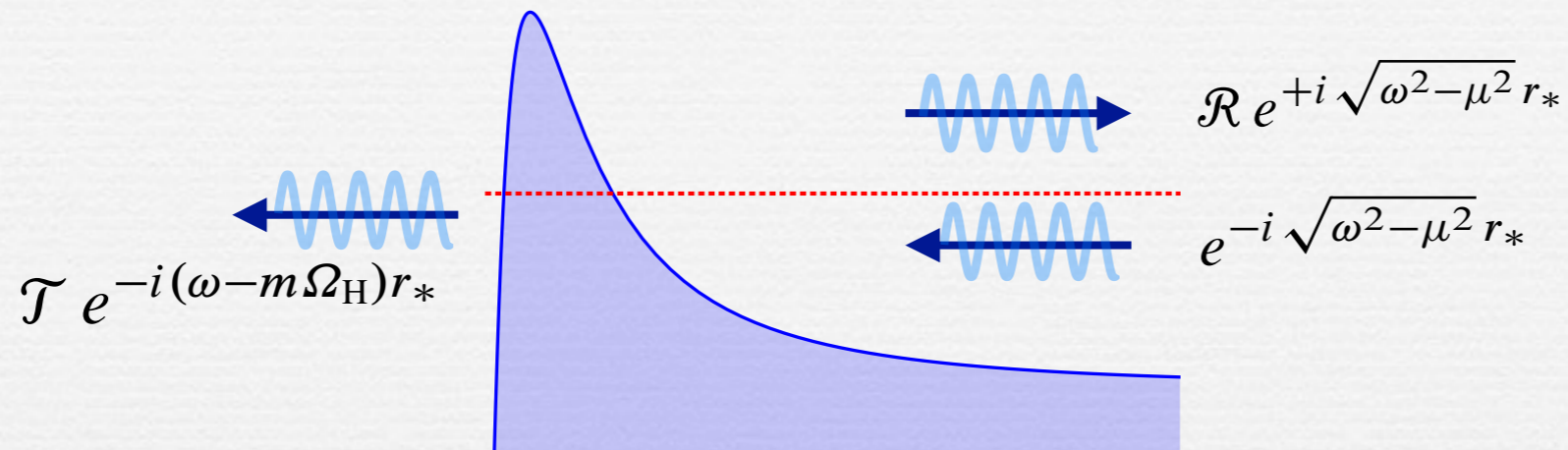
force-free磁気圏の大域的構造



磁気圏の大域的構造を知らないといけない？

Superradianceの粒子極限

Penrose processとしてのsuperradiance



保存則：Wronskian一定

KG current 保存

$$|\mathcal{R}|^2 + \frac{\omega - m\Omega_H}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} |\mathcal{T}|^2 = 1$$

粒子数 (charge) 保存に対応

$$N^{(2)} = \frac{\omega - m\Omega_H}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} |\mathcal{T}|^2$$

The diagram shows two wave modes on the left and two on the right. The left modes are associated with $N^{(2)}$ and the right modes with $N^{(1)}$ and $N^{(0)}$.

$$N^{(1)} = |\mathcal{R}|^2$$

$$N^{(0)} = 1$$

Penrose processとしてのsuperradiance

粒子数保存 $N^{(0)} = N^{(1)} + N^{(2)}$

$$N^{(2)} = \frac{\omega - m\Omega_{\text{H}}}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} |\mathcal{T}|^2$$

$N^{(1)} = |\mathcal{R}|^2$

$N^{(0)} = 1$

エネルギー保存 $E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}$

$$\omega N^{(0)} = \omega N^{(1)} + \omega N^{(2)}$$

$N_2 < 0$ ($\omega - m\Omega_{\text{H}} < 0$)
ならば

角運動量保存 $L^{(0)} = L^{(1)} + L^{(2)}$

$$m N^{(0)} = m N^{(1)} + m N^{(2)}$$

$$E^{(1)} > E^{(0)}$$

$$L^{(1)} > L^{(0)}$$

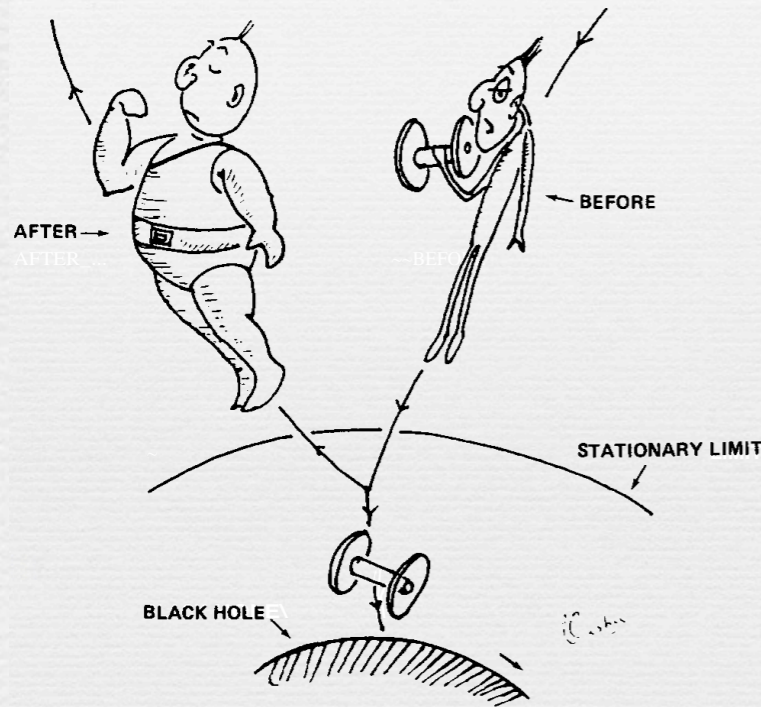
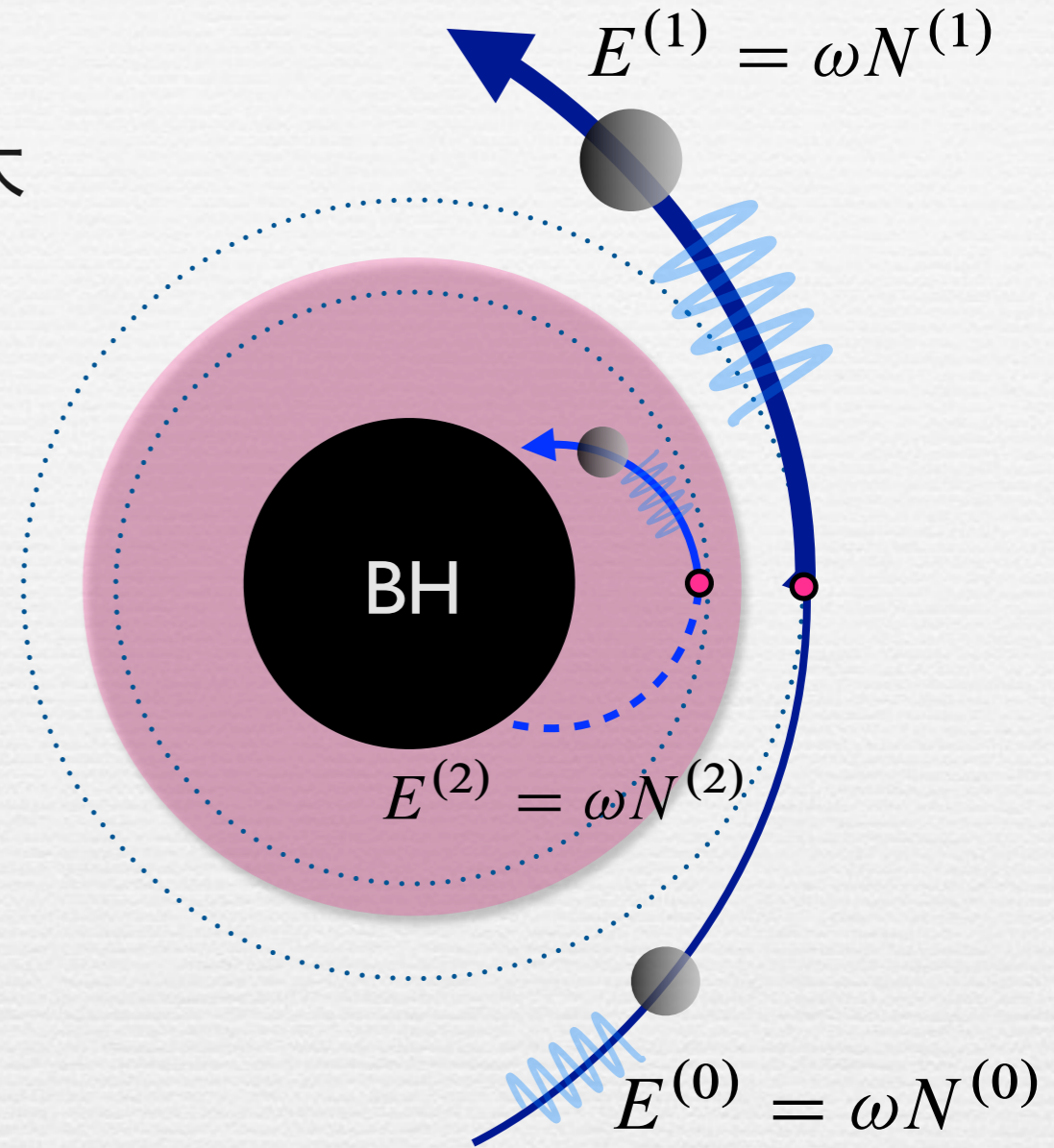
Superradianceによって‘粒子’は太る

振幅増大 \leftrightarrow エネルギー増大 \leftrightarrow 粒子数増大

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)}$$

$$N^{(2)} = \frac{\omega - m\Omega_H}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} |\mathcal{T}|^2 < 0 \text{ なら}$$

$$E^{(1)} > E^{(0)}$$



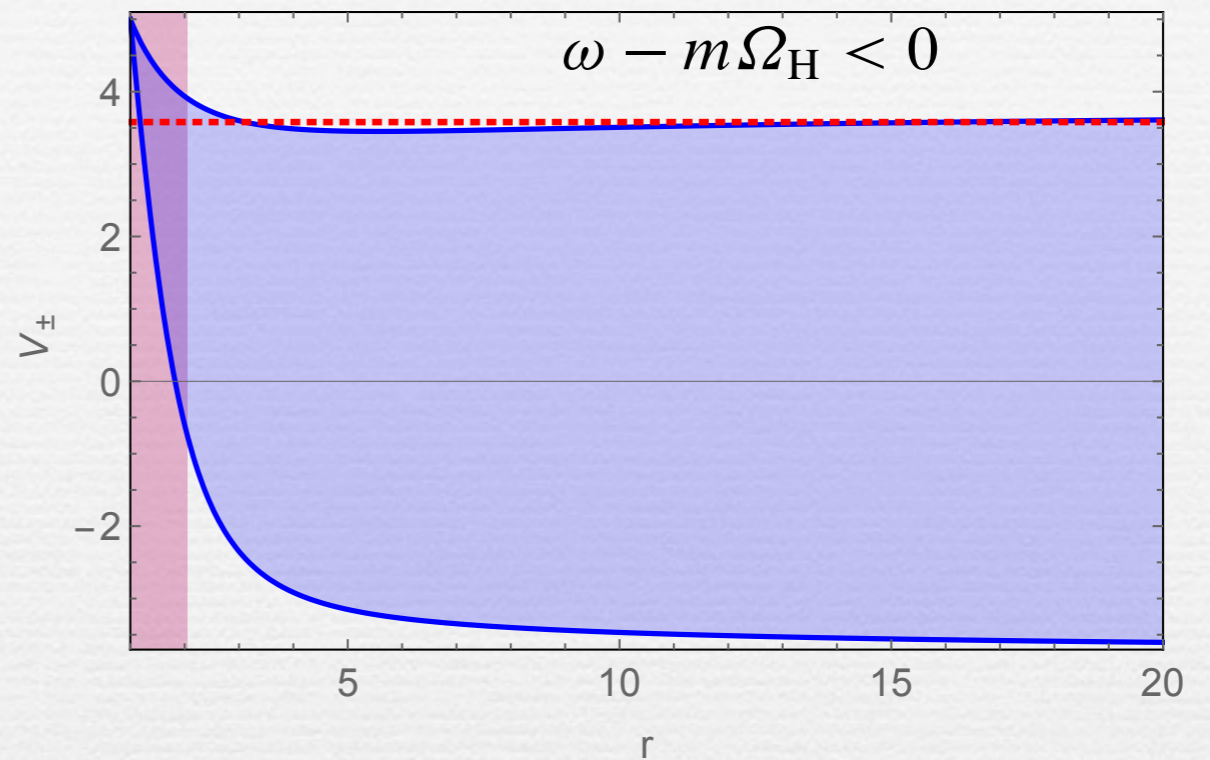
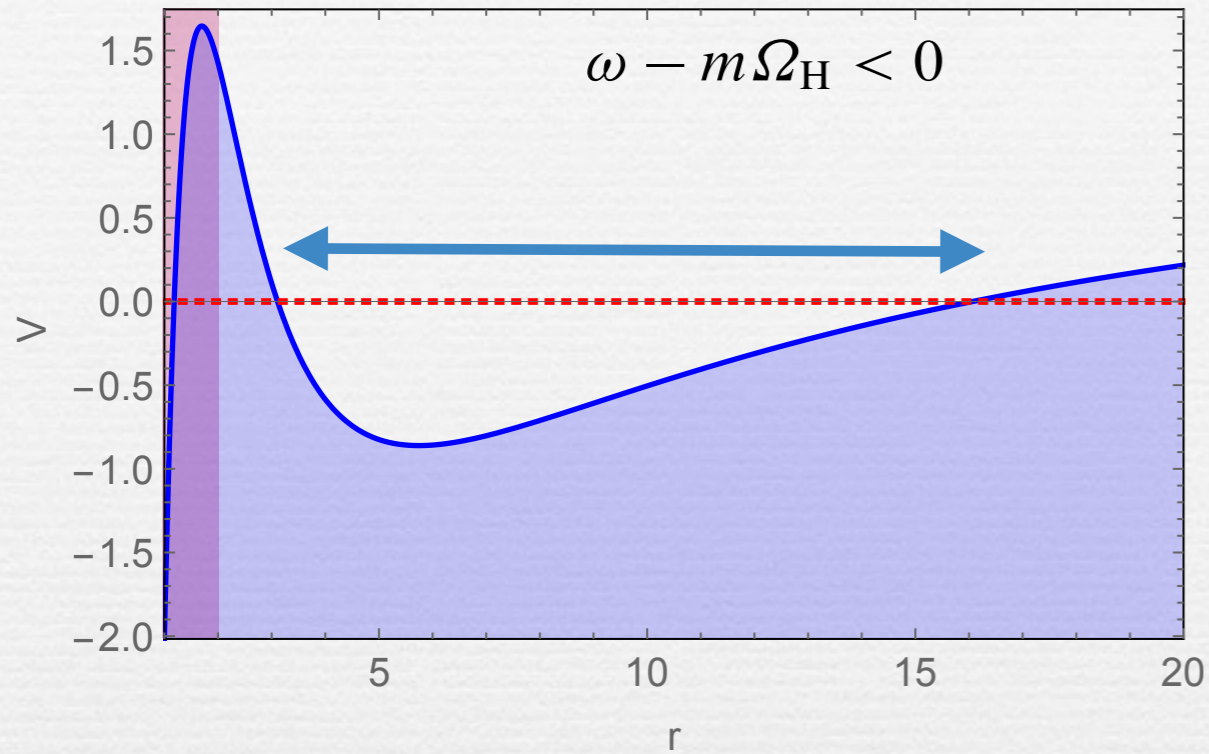
by Vishveshwara

3つの粒子は同じ保存量を持つ軌道を運動する
 ω, m, Q

粒子を用いたsuperradianceの表現

BH Bomb

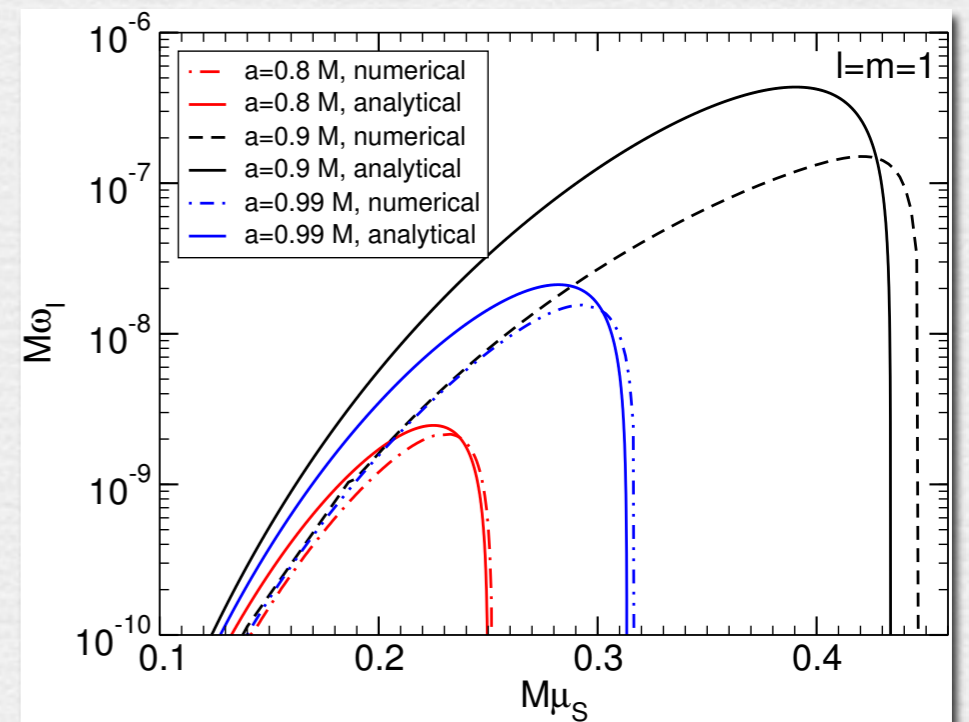
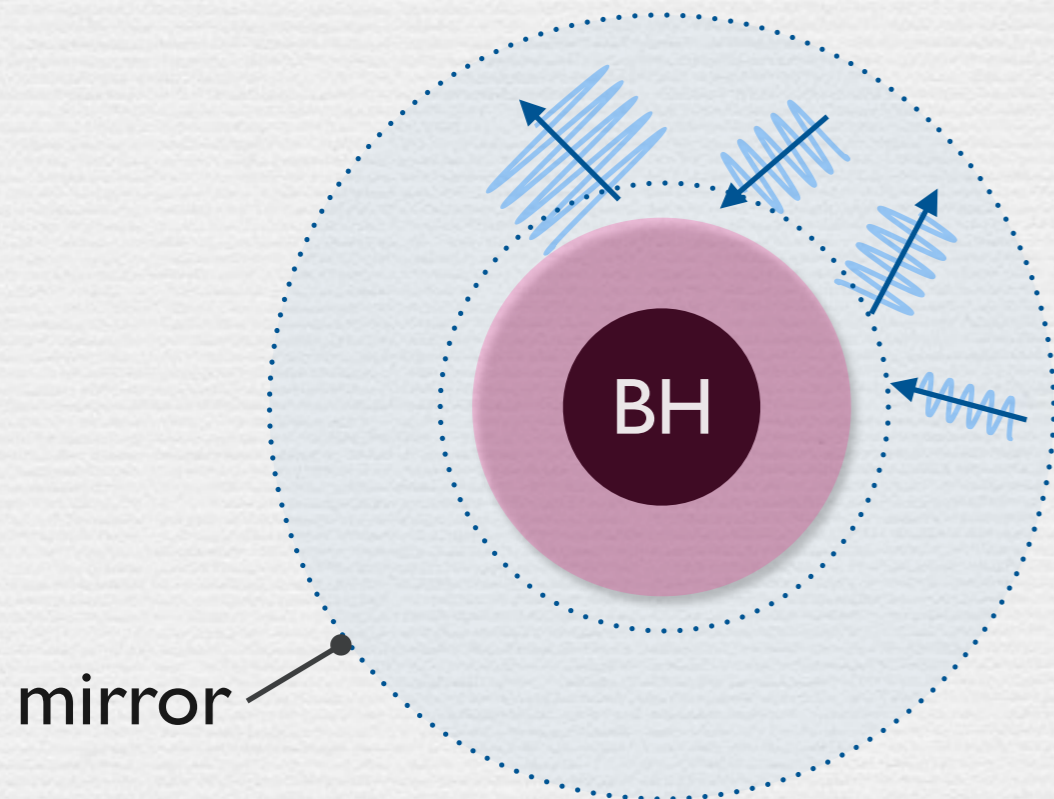
massive fieldの束縛状態



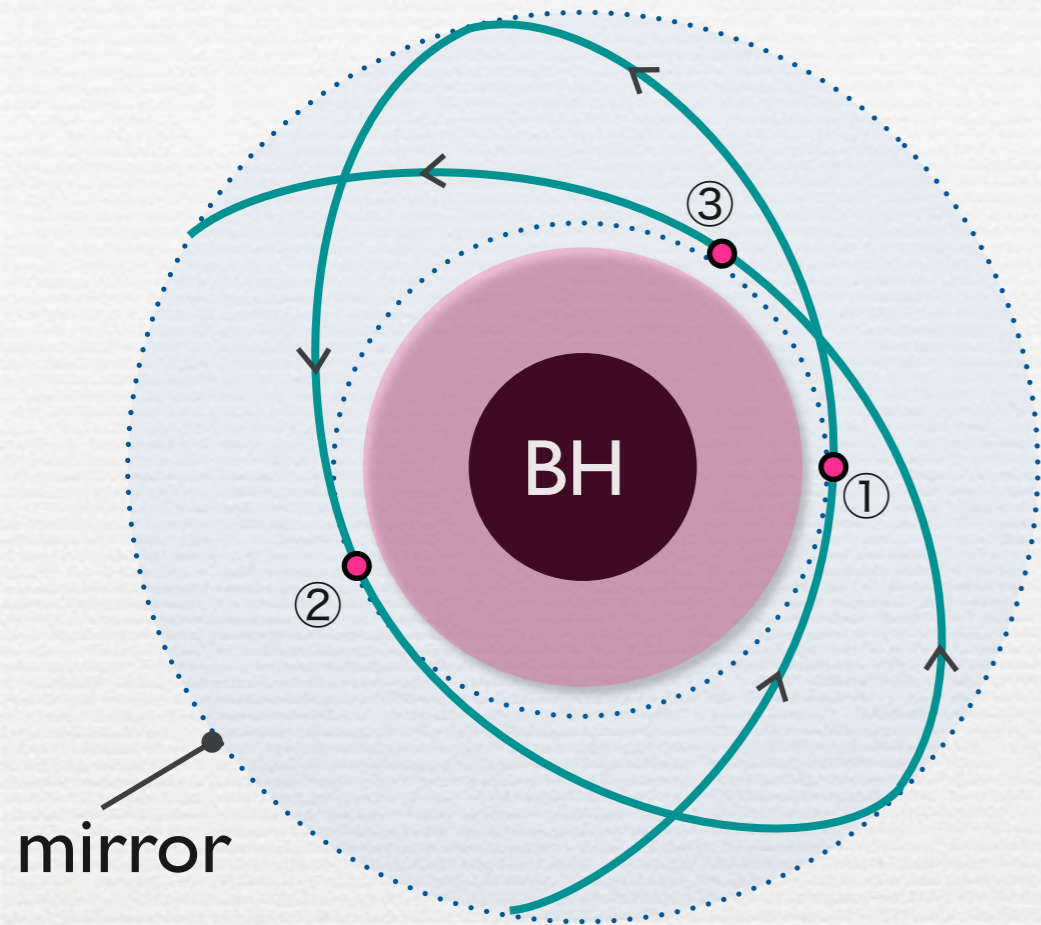
反射が繰り返される

$$\Phi \propto e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t + \omega_I t}$$

$\omega_I > 0$ となり振幅が時間的に増大していく



BH bombの粒子描像



1 回散乱されるごとに粒子数は $|\mathcal{R}|^2$ 倍

$$1 \text{ 回} : N_1 = N_0 |\mathcal{R}|^2 = N_0 (1 - (1 - |\mathcal{R}|^2))$$

$$n \text{ 回} : N_n = N_0 (1 - (1 - |\mathcal{R}|^2))^n \\ \approx N_0 (1 - n(1 - |\mathcal{R}|^2))$$

$$n = \frac{t}{2L} \quad L : \text{領域のサイズ}$$

$$N_t \approx N_0 \exp\left(-\frac{1 - |\mathcal{R}|^2}{2L} t\right)$$

$|\Phi|^2 \propto e^{2\omega_I t}$ $|\Phi|^2 \propto N_t$ であるから不安定性のgrowth rateは

$$\omega_I = -\frac{1 - |\mathcal{R}|^2}{4L}$$

$|\mathcal{R}| > 1$ なら $\omega_I > 0$ (不安定)

まとめ

- BH時空でのエネルギー引き抜き

負のエネルギーをBHに落とす $\Delta E_H < 0$

- Superradiance

$$\Omega_{WF} \equiv \frac{\omega}{m} < \Omega_H$$

- BZ process

$$\Omega_F < \Omega_H$$

同じ構造 $\Omega_{\square} < \Omega_H$

- Superradianceの粒子極限

Penrose processとして理解できる
粒子を用いたsuperradianceの計算