MHD-flow上の流体ブラックホール

野田 宗佑 (名古屋大学)

共同研究者

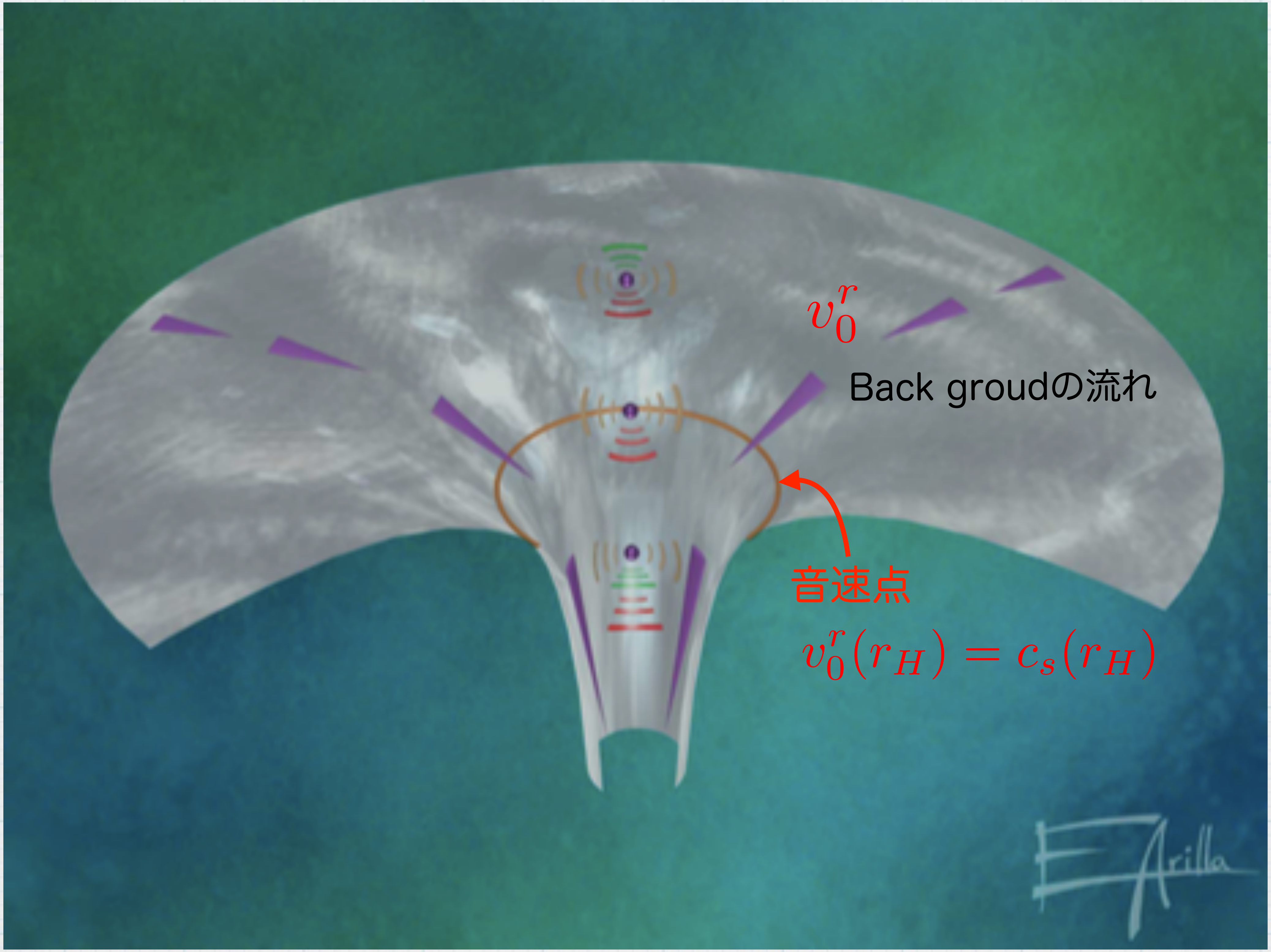
南部保貞　(名古屋大学)

高橋真聡　(愛知教育大学)

黒田健太　(愛知教育大学)

第9回 ブラックホール磁気圏研究会＠夕張　2016年3月3日

流体BH~音波に対するBH



arXiv: gr-qc/0505065

Acoustic metric

流体力学（渦なし）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi \quad , \quad p = p(\rho)$$

速度ポテンシャル

摂動

$$\phi \to \phi_0 + \delta\phi \qquad \rho \to \rho_0 + \delta\rho$$

音波の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[c_s^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \delta\phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \delta\phi \right) \right] + \nabla \cdot \left[\left\{ c_s^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \delta\phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \delta\phi \right) \right\} \vec{v}_0 - \rho_0 \nabla \delta\phi \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{-S}} \partial_\mu \left(\sqrt{-S} S^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\phi \right) = 0$$

$S_{\mu\nu}$: Acoustic metric

Moncrief (1980)　Unruh (1981)

Acoustic metric

流体力学（渦なし）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi \quad , \quad p = p(\rho)$$

速度ポテンシャル

摂動

流体上の音波方程式 (背景はflat)

⇕

“曲がった” 時空上のKlein Gordon方程式

音波の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[c_s^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \delta\phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \delta\phi \right) \right] + \nabla \cdot \left[\left\{ c_s^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \delta\phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \delta\phi \right) \right\} \vec{v}_0 - \rho_0 \nabla \delta\phi \right] = 0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-S}} \partial_\mu \left(\sqrt{-S} S^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\phi \right) = 0$$

$S_{\mu\nu}$: Acoustic metric

Moncrief (1980)　Unruh (1981)

どんな応用があるか？

1. BH物理が実験室で見える。

Quasi Normal Modes

音速点ではingoing (acoustic horizon)

Okuzumi, S. & Sakagami, M-a　Phys. Rev. D 76 (2007) 084027.

ラバルノズルで定常遷音速流を作って、パルス波を当てる

SuperradianceやBH Bomb　　音波の増幅反射する

phononの輻射　(熱雑音と区別が付かない)

Hawking輻射

. W.G. Unruh, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1351.

phononの対生成の相関を見る。(密度ゆらぎ)

Carusotto, I. et al. New J. Phys. 10 (2008) 103001.

凝縮体の中の密度相関測定

Ritter, S. et al Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 090402.

2. 宇宙物理へ適用する。

BHへの降着流上での音波

. Das, T. K., Class.Quant Grav, 21, 5253. (2004)

Pu, Hung Yi et al　Class.Quant.Grav. 29 (2012)

MHDの場合

(過去研究は無い)

MHDの場合へ拡張する理由

磁場がない場合

音波のみ　縦波×1

$$\frac{1}{\sqrt{-S}}\partial_\mu\left(\sqrt{-S}S^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\phi\right)=0$$

MHDの場合

磁気音波　縦波×2　　Alfvén波　横波

fast, slow

acoustic metricはどうなるのか？

天体現象へ応用したい

・ブラックホールへ降着する流体上の磁気音波やAlfven波の安定性

jetのトリガーは？

・ブラックホール以外の天体の周辺現象の理解

flatでも流体”ブラックホール”は登場する。

・磁気回転不安定性などの不安定性

acoustic superradiant instabilityとして理解できる？？

目次

~~① Introduction~~

✔ ② 流体ブラックホールのレビュー

実験室での流体ブラックホール (Newtonian)

Bathtub model　(Kerr-likeなmodel)

③ MHDへの拡張

2D MHD flow (Newtonian)

Acoustic metric　　　　horizon　　ergo領域

MHD waveに対するSuperradiance

Bathtub model

音波の方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-S}}\partial_\mu\left(\sqrt{-S}S^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\phi\right)=0$$

$S_{\mu\nu}$: Acoustic metric

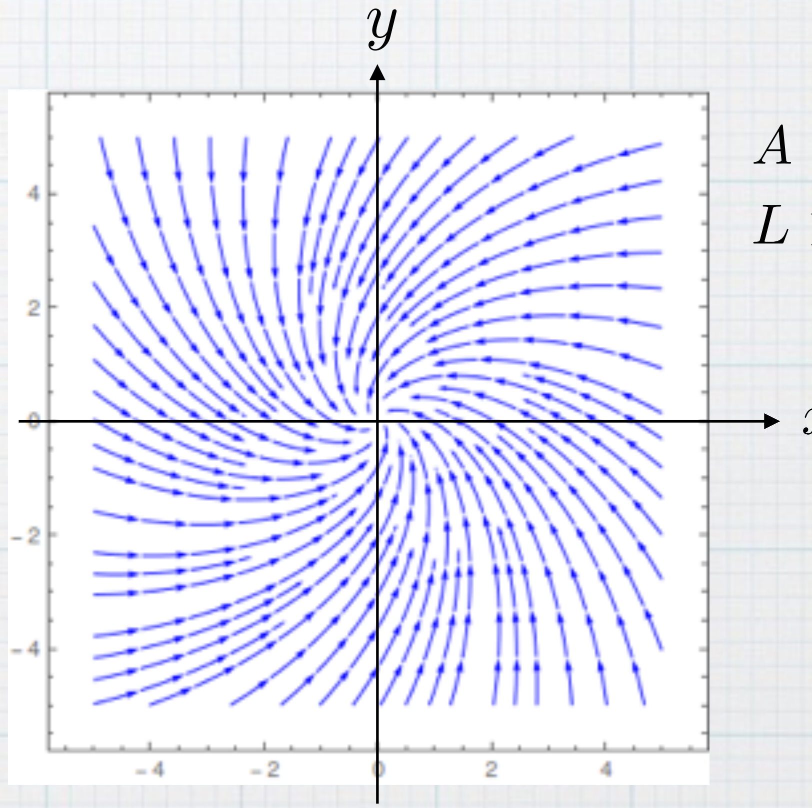
acoustic interval

$$ds^2 := \frac{\rho_0}{c_s}\left[-(c_s^2-\vec{v}_0^2)dt^2 - 2\vec{v}_0\cdot d\vec{x}dt + (d\vec{x})^2\right]$$

back ground flow

bathtub model (2D flow) 極座標 (r,ϕ)

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{A}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{L}{r}\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$



$A > 0$

$L > 0$

bathtub modelの acoustic metric

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s}\left[-\left(1-\frac{A^2+L^2}{c_s^2r^2}\right)d\tilde{t}^2 + \left(1-\frac{A^2}{c_s^2r^2}\right)^{-1}dr^2 - 2Ld\tilde{\phi}d\tilde{t} + r^2d\tilde{\phi}\right]$$

Bathtub modelのhorizonとergo領域

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s}\left[-\left(1-\frac{A^2+L^2}{c_s^2 r^2}\right)d\tilde{t}^2 + \left(1-\frac{A^2}{c_s^2 r^2}\right)^{-1} dr^2 - 2L d\tilde{\phi} d\tilde{t} + r^2 d\tilde{\phi}\right]$$

horizonとergo sphereの条件

$$c_s = v_0^r(r_H)$$

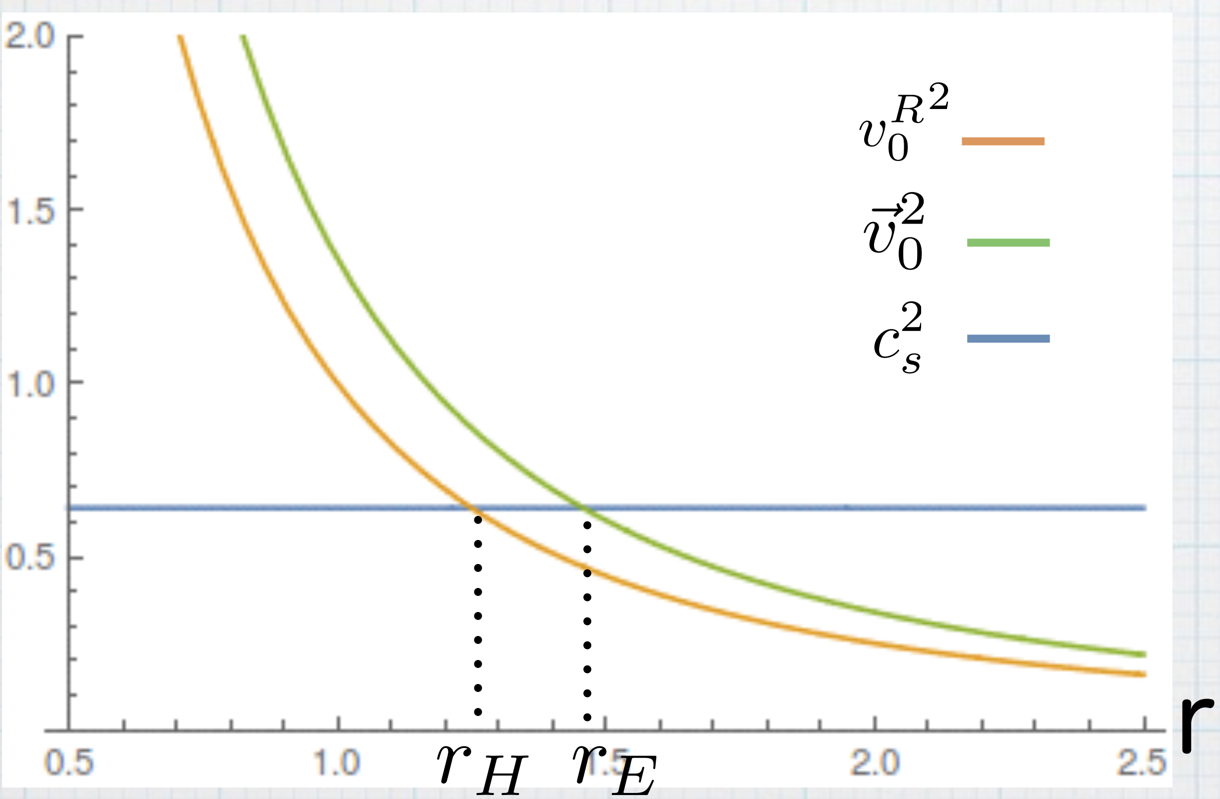
$$c_s = \sqrt{v_0^{r\,2}(r_E) + v_0^{\phi\,2}(r_E)}$$

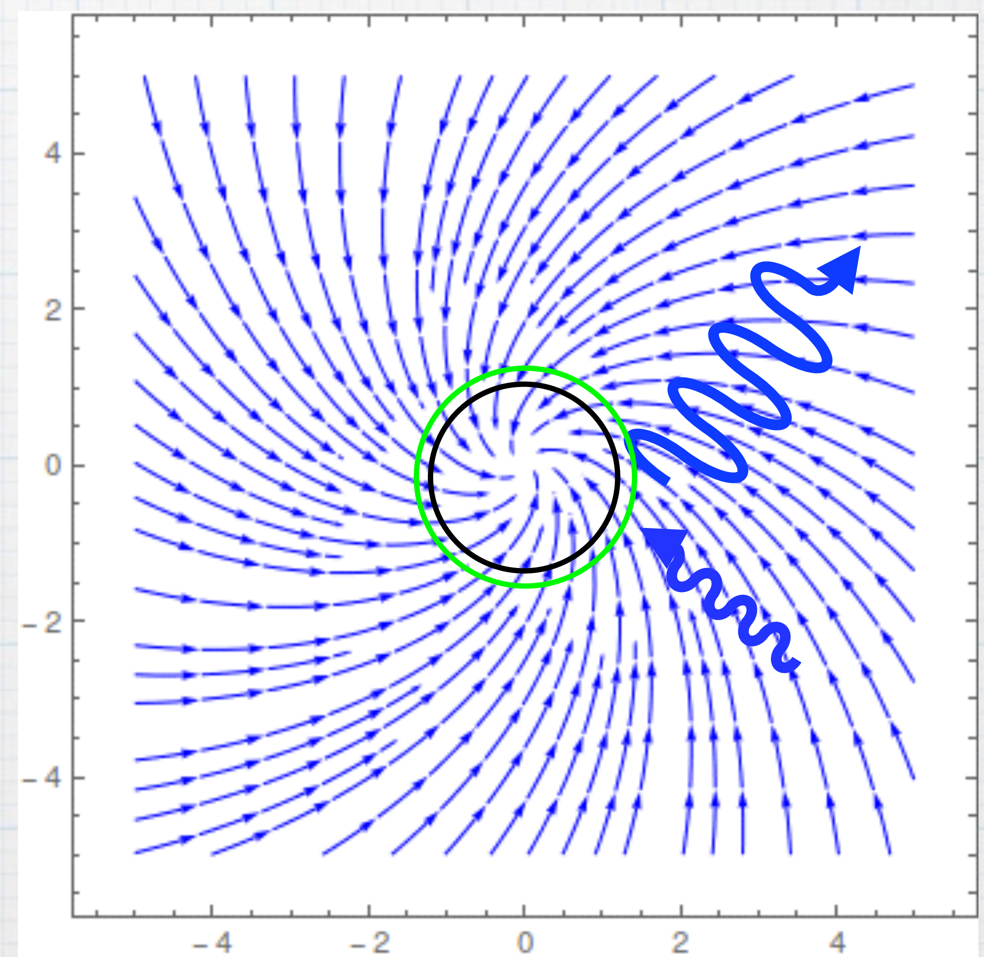
horizon半径

$$r_H = \frac{A}{c_s}$$

ergo半径

$$r_E = \frac{\sqrt{A^2+L^2}}{c_s}$$





音波のsuperradiance

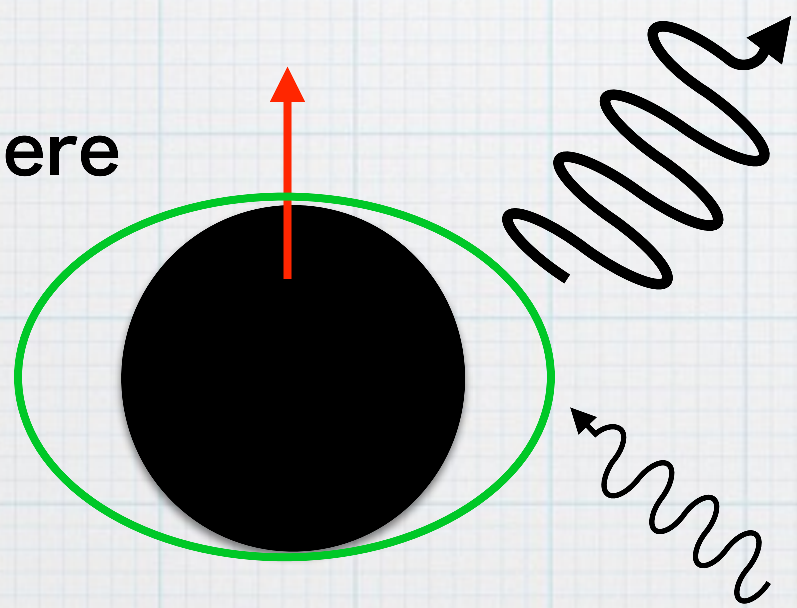
Super radiance

Kerr BHの角運動量をもらって波が増幅反射する現象

Kerr時空上のスカラー場

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right)=\Box\Phi=0$$

ergo sphere



Kerr BH

super radianceが起こる条件

$$\omega < m\Omega_H$$

frequency　　**horizonの角速度**

Super radiant condition

音波の方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-S}}\partial_\mu\left(\sqrt{-S}S^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\phi\right)=0 \qquad \delta\phi=\sqrt{r}\psi(r_*)e^{im\tilde{\phi}}e^{-i\omega\tilde{t}}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2\psi}{dr_*^2}+\left\{\frac{1}{c_s^2}\left(\omega-\frac{Lm}{r^2}\right)^2-\left(\frac{c_s^2r^2-A^2}{c_s^2r^2}\right)\left[\frac{1}{r^2}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{5A^2}{4r^4c_s^2}\right]\right\}\psi=0$$

漸近解

$$\psi\sim C_{in}e^{-i\omega r_*}+C_{out}e^{i\omega r_*}$$ 無限遠

$$\psi\sim e^{-i\left(\omega-\frac{mL}{r_H^2}\right)r_*}$$ horizon近傍

Wronskianの保存

$$\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2=1-\frac{1}{\omega}\left(\omega-mL/r_H^2\right)\left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2$$

反射率 透過率

音波のSuperradiant condition

$$\boxed{\omega<m\frac{L}{r_H^2}=m\frac{v_0^\phi(r_H)}{r_H}}$$

このとき 反射率＞1

Superradiant condition in eikonal limit

$$\frac{1}{\sqrt{-S}}\partial_\mu\left(\sqrt{-S}S^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\phi\right)=0 \xrightarrow{\text{eikonal}} S^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \qquad k_\mu=\partial_\mu S=S_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

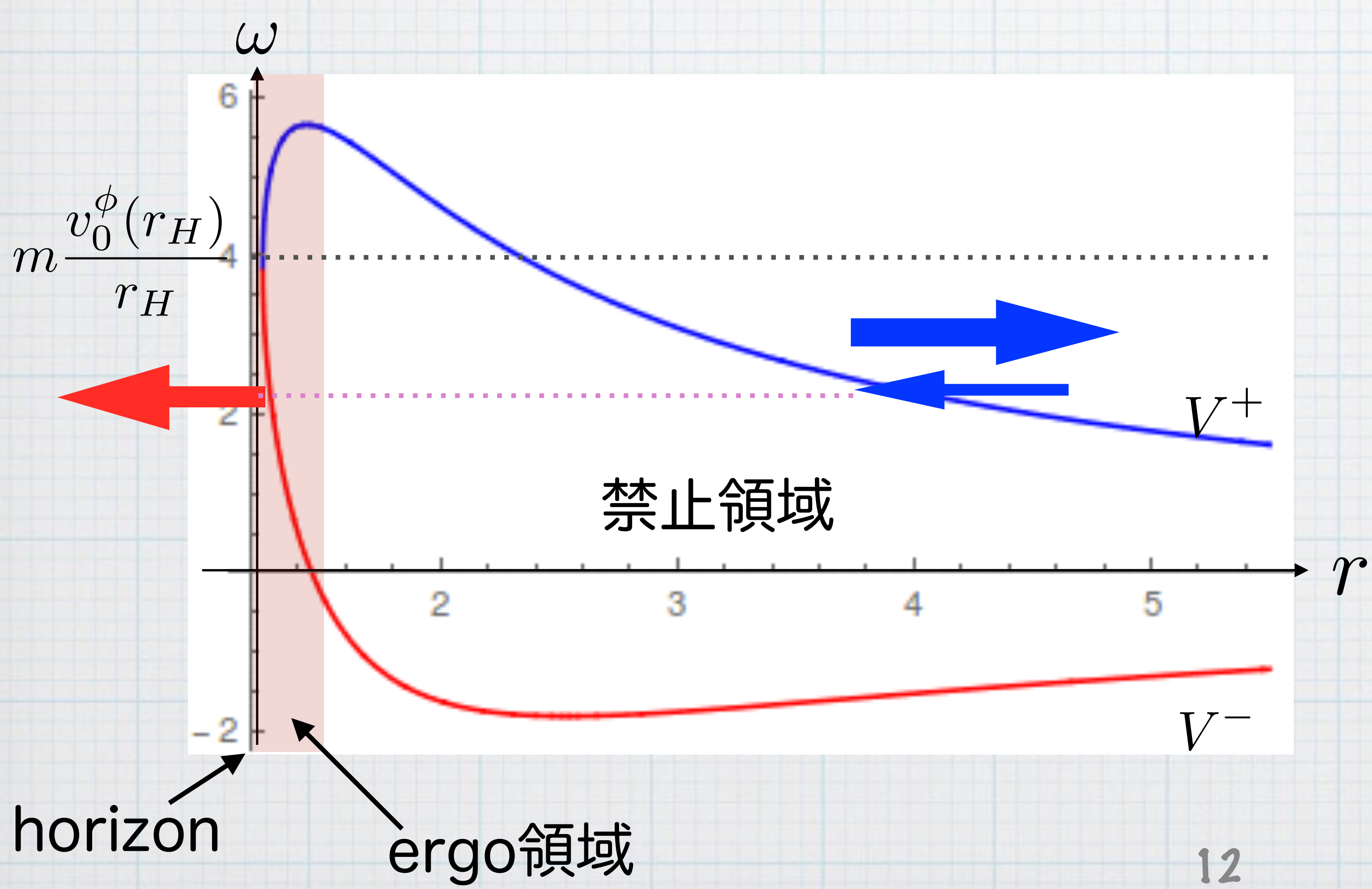
$$\delta\phi=e^{iS(r,\tilde{\phi},\tilde{t})}$$

動径方向

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\propto(\omega-V^+)(\omega-V^-)\geq 0$$

有効ポテンシャル

$$V^\pm=\frac{mv_0^\phi\pm m\sqrt{c_s^2-{v_0^r}^2}}{r}$$



$$\omega<m\frac{L}{r_H^2}=m\frac{v_0^\phi(r_H)}{r_H}$$ を満たす

modeはergo領域に一部落ちる。

（トンネル効果）

目次

~~① Introduction~~

② 流体ブラックホールのレビュー

実験室での流体ブラックホール (Newtonian)

Bathtub model　(Kerr-likeなmodel)

✔ ③ MHDへの拡張

2D MHD flow (Newtonian)

Acoustic metric　　　horizon　　ergo領域

MHD waveに対するSuperradiance

2次元MHD-waveとacoustic metric

Ideal MHD

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad \rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \mathbf{f} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

MHD-wave (2次元)　Back ground flowは十分ゆっくり変化すると仮定

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \underline{\vec{v}_0}\cdot\nabla\right)^2 \delta\vec{v} - c_s^2\nabla(\nabla\cdot\delta\vec{v}) + \underline{\vec{V}_A}\times\nabla\times\Big(\nabla\times(\delta\vec{v}\times\underline{\vec{V}_A})\Big) = 0$$

BG-flow　　BG-magnetic field

$$\frac{1}{\sqrt{-S}}\partial_\mu\left(\sqrt{-S}S^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\phi\right) = 0$$ のようにまとめられない。。。

acoustic metricをどう出すか？

分散関係と波動方程式のeikonal limitの関係からacoustic metricを導出する。

波動方程式 → $\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho = 0$ 　ωの4次式

分散関係

$$(\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})^2 = \frac{(c_s^2 + V_A^2)\vec{k}^2 \pm \sqrt{(c_s^2 + V_A^2)^2\vec{k}^4 - 4c_s^2\vec{k}^2(\vec{k}\cdot\vec{V}_A)^2}}{2}$$

$+$ ・・・速い磁気音波

$-$ ・・・遅い磁気音波

特別な場合を考える。

① 磁力線と垂直に伝わるmode

$$(\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})^2 = (c_s^2 + V_A^2)\vec{k}^2 \qquad S^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$$

② 磁力線と平行に伝わるmode

$$+ \quad (\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})^2 = c_s^2\vec{k}^2 \qquad M_f^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$$

$$- \quad (\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})^2 = V_A^2\vec{k}^2 \qquad M_s^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$$

Superradianceを議論することはできる。

MHD版acoustic metric

① 磁力線と垂直に伝わるmode

$$ds^2 = -\left[V_M^2 - ({v_0^r}^2 + {v_0^\phi}^2)\right] d\tilde{t}^2 + \left(1 - \frac{{v_0^r}^2}{V_M^2}\right)^{-1} dr^2 - 2v_0^r r d\tilde{\phi} d\tilde{t} + r^2 d\tilde{\phi}$$

② 磁力線と平行に伝わるmode

$$ds^2 = -\left[c_s^2 - ({v_0^r}^2 + {v_0^\phi}^2)\right] d\tilde{t}^2 + \left(1 - \frac{{v_0^r}^2}{c_s^2}\right)^{-1} dr^2 - 2v_0^r r d\tilde{\phi} d\tilde{t} + r^2 d\tilde{\phi}$$

$$ds^2 = -\left[V_A^2 - ({v_0^r}^2 + {v_0^\phi}^2)\right] d\tilde{t}^2 + \left(1 - \frac{{v_0^r}^2}{V_A^2}\right)^{-1} dr^2 - 2v_0^r r d\tilde{\phi} d\tilde{t} + r^2 d\tilde{\phi}$$

違いは音速のところのみ

ergo領域

$$V_M(r_E) = \sqrt{{v_0^r}^2(r_E) + {v_0^\phi}^2(r_E)}$$

$V_A \quad c_s$

horizon

$$V_M(r_E) = v_0^r(r_E)$$

$V_A \quad c_s$

Back ground flowを求める

定常、軸対称を仮定

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0) = 0$$

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) + \underset{\text{外力}}{\mathbf{F}_{ex}} = 0$$

$$\rho_0 v_0^r r^2 = const \qquad r^2 B_0^r = const$$

$$r(v_0^\phi B_0^r - v_0^r B_0^\phi) = const = -\Omega r_c^2 B_c^r = -\Omega r^2 B_0^r$$

$$r v_0^\phi - \frac{B_0^r}{4\pi \rho_0 v_0^r} r B_0^r = const \equiv L$$

次のflowがEulerのr成分を満たすような外力があるとする。 $v_0^r = -\dfrac{A}{r}$

MHD版 bathtub model

$$v_0^\phi = \Omega r \frac{M_A^2 L r^{-2}\Omega^{-1} - 1}{M_A^2 - 1} \qquad B_0^\phi = \sqrt{4\pi\rho_0}\frac{M_A}{r}\frac{L - \Omega r^2}{M_A^2 - 1}$$

Alfvénic Mach数

$$M_A = \frac{v_0^r}{B_0^r/4\pi\rho_0}$$

$M_A = 1$ で発散

Alfvénic critical point ($M_A(r_a) = 1$)を通るflowを考える。

L と Ω に関係がつく $\quad L = \Omega r_a^2$

$$v_0^\phi = \frac{\Omega r}{v_a^r}\frac{v_a - v_0^r}{1 - M_A^2} \qquad B_0^\phi = -B_0^r \frac{\Omega r}{v_a^r}\frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2(1 - M_A^2)}$$

MHD bathtub model

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{A}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} - \Omega r_a \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{D}{r^2}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{D\Omega}{rA}(r + r_a)\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$

polytrope $\quad p = K\rho^\Gamma$

$$\rho_0 = \frac{1}{Ar}$$

$$c_s^2 = K\Gamma\left(\frac{1}{Ar}\right)^{\Gamma-1}$$

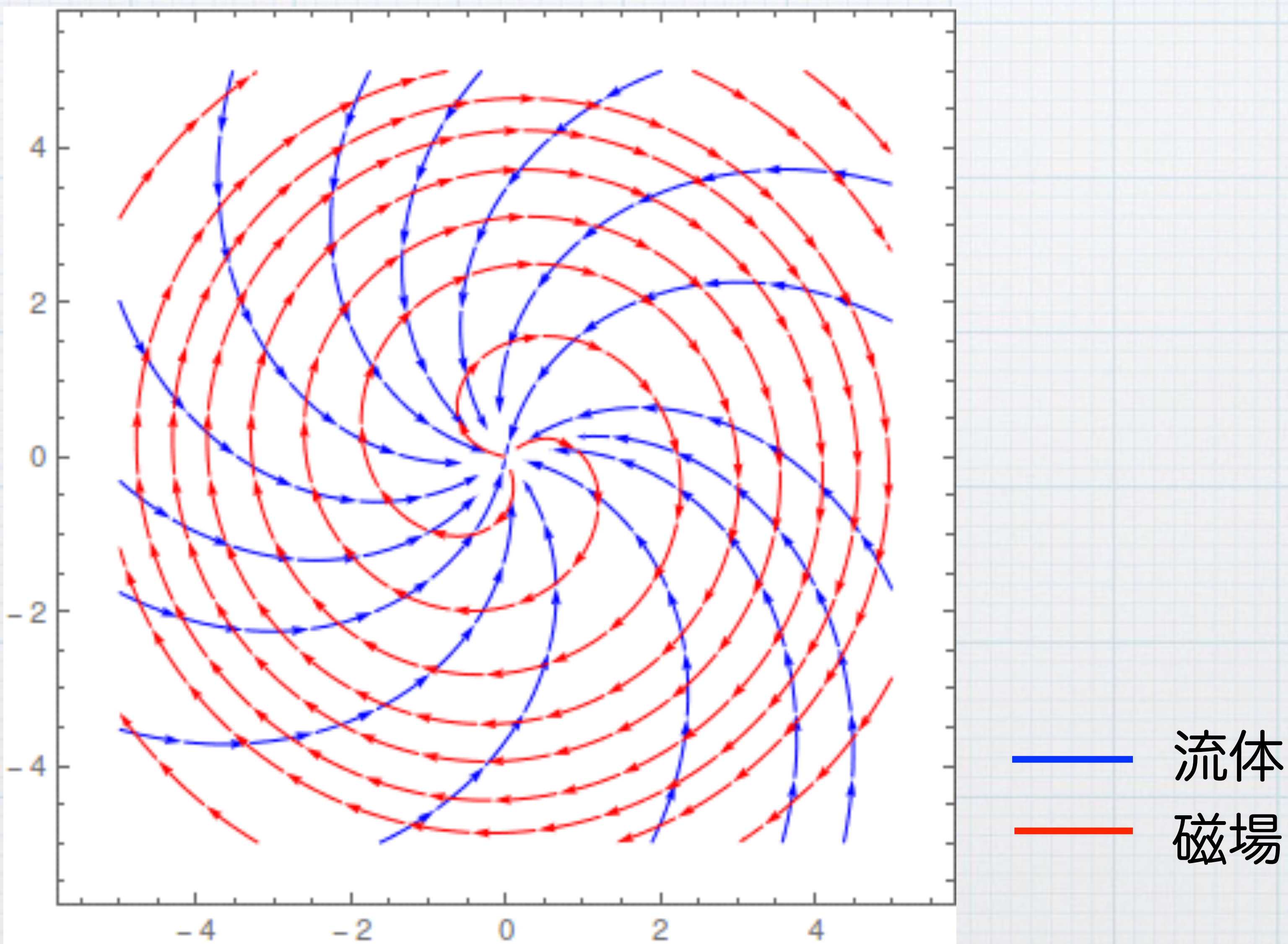
Alfvénic critical point

$$r_a = \frac{D^2}{4\pi A}$$

Back Ground MHD flow (2D)

MHD bathtub model　極座標 (r, ϕ)

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{A}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} - \Omega r_a \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \qquad \mathbf{B}_0 = \frac{D}{r^2}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{D\Omega}{rA}(r + r_a)\mathbf{e}_{\hat{\phi}} \qquad r_a = \frac{D^2}{4\pi A}$$



磁場の寄与

Bathtub model

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{A}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{L}{r}\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$

horizonの条件

$$c_s(r) = v_0^r(r)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \qquad \nabla\cdot(\rho_0\mathbf{v}_0) = 0$$

L の値に依らずhorizonはできる

MHD Bathtub model

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{A}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} - \Omega r_a \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{D}{r^2}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{D\Omega}{rA}(r + r_a)\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$

horizonの条件

$$V_M = v_0^r(r) \qquad V_A = v_0^r(r)$$

$$V_M = \sqrt{c_s^2 + V_A^2} \qquad V_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho_0}\left({B_0^r}^2 + {B_0^\phi}^2\right)$$

磁場の大きさ、回転 ···· horizonの有無

→ 磁力線の角速度が大きいとhorizonがなくなる（音速点がない)

Superadiance効率の上限 overspinning Kerr的？

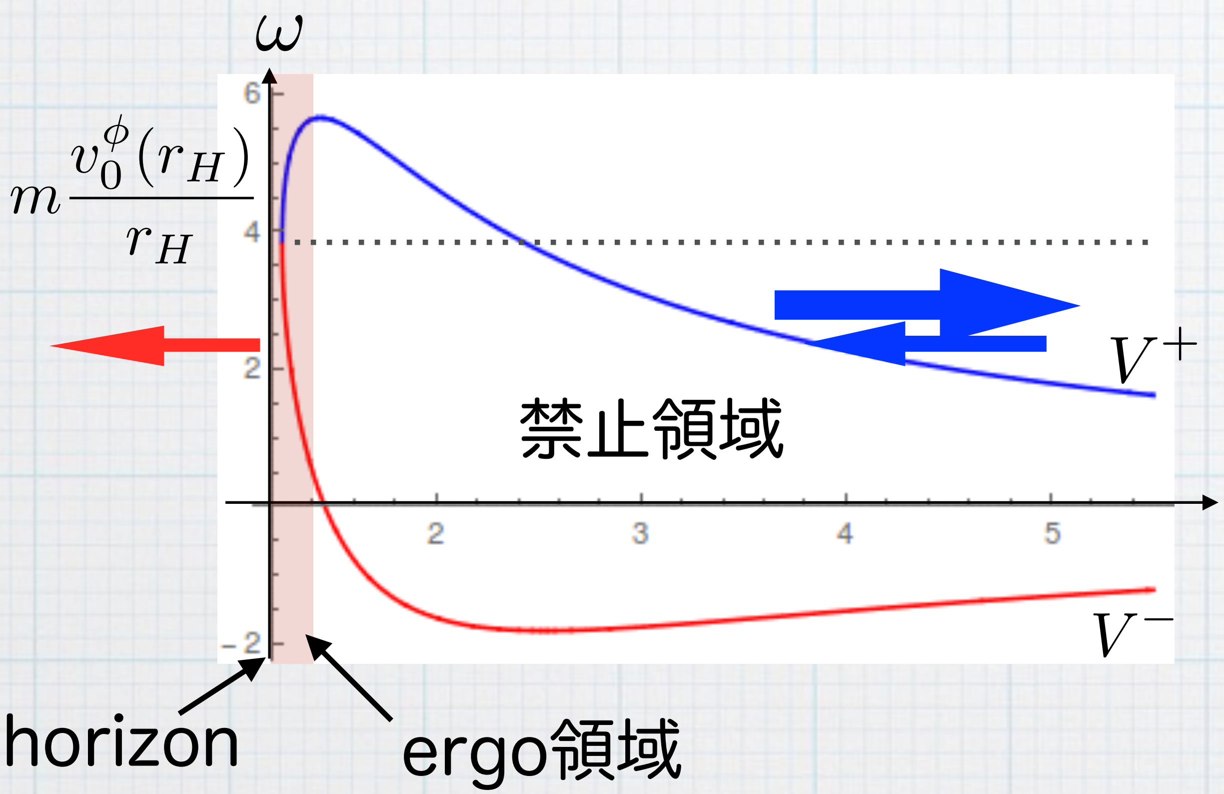
Superradiant condition

Eikonal方程式　(分散関係)

$$S^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$$

$$k_\mu = \partial_\mu S = S_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \propto (\omega - V^+)(\omega - V^-) \geq 0$$



有効ポテンシャル

$$V^\pm = \frac{mv_0^\phi \pm m\sqrt{V_M^2 - v_0^{r\,2}}}{r}$$

modeによって

$V_A \quad c_s$

$$\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2 = 1 - \frac{1}{\omega}\left(\omega - m\underbrace{\frac{v_0^\phi(r_H)}{r_H}}_{\omega_c}\right)\left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2$$

反射率　　透過率

$$\boxed{\omega < m\omega_c}$$

このとき 反射率 > 1

調べること

Back ground flow

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} - \Omega r_a \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \qquad (A=1)$$

$$\mathbf{B}_0 = \sqrt{4\pi r_a}\left[\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{\Omega}{r}(r+r_a)\mathbf{e}_{\hat{\phi}}\right]$$

flowを決めるパラメータは r_a と Ω

r_a : (磁場の強度)^2

Ω : 磁力線の角速度

・どのようなflowだと各modeに対するacoustic horizonがあるか。

r_a- Ω 平面に領域をplot

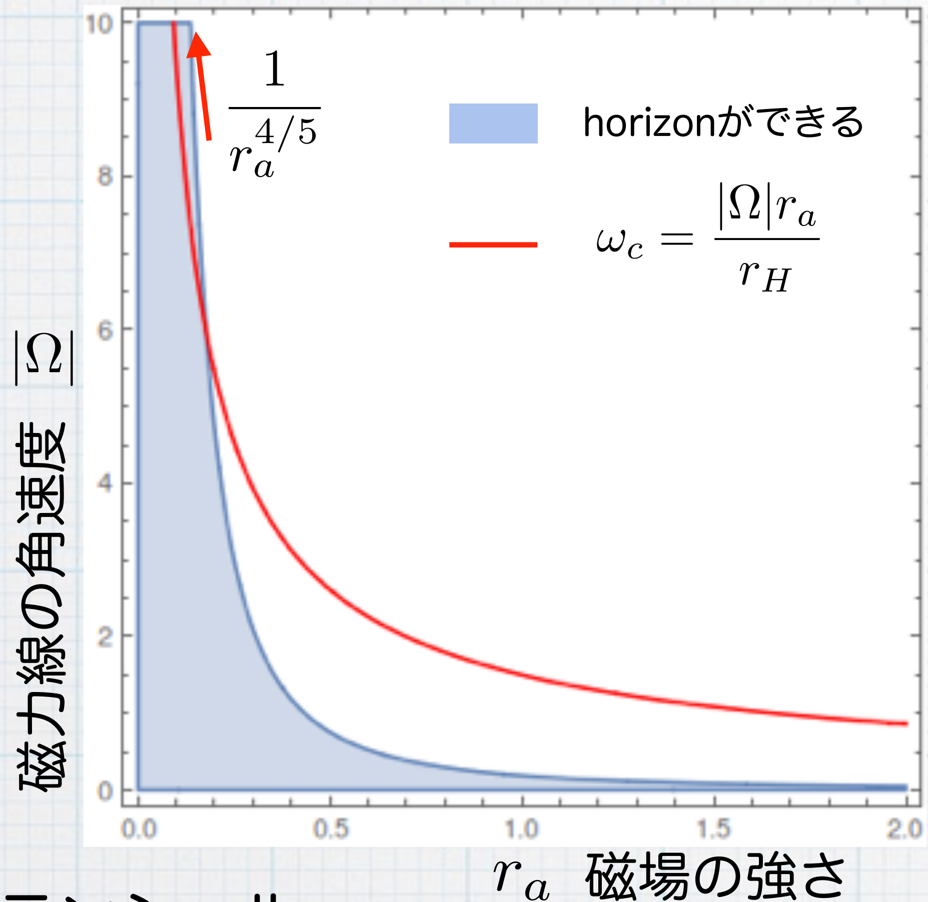
・エネルギー引き抜き効率に上限がつくか？

$$\underbrace{\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2}_{\text{反射率}} = 1 - \frac{1}{\omega}\left(\omega - m\underbrace{\frac{v_0^{\phi}(r_H)}{r_H}}_{\omega_c}\right)\underbrace{\left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2}_{\text{透過率}}$$

$$\omega_c = \frac{|\Omega| r_a}{r_H}$$ 曲線をplot

r_a, Ω の関数

V_A mode



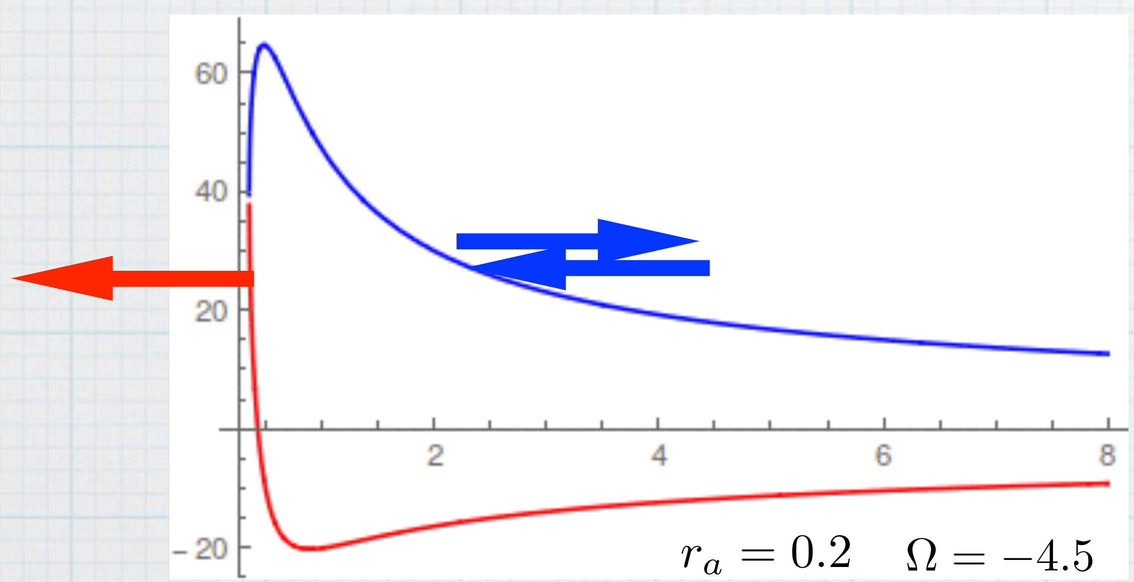
$$\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_{\hat{r}} - \Omega r_a \mathbf{e}_{\hat{\phi}}$$

$$\mathbf{B}_0 = \sqrt{4\pi r_a}\left[\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{\Omega}{r}(r + r_a)\mathbf{e}_{\hat{\phi}}\right]$$

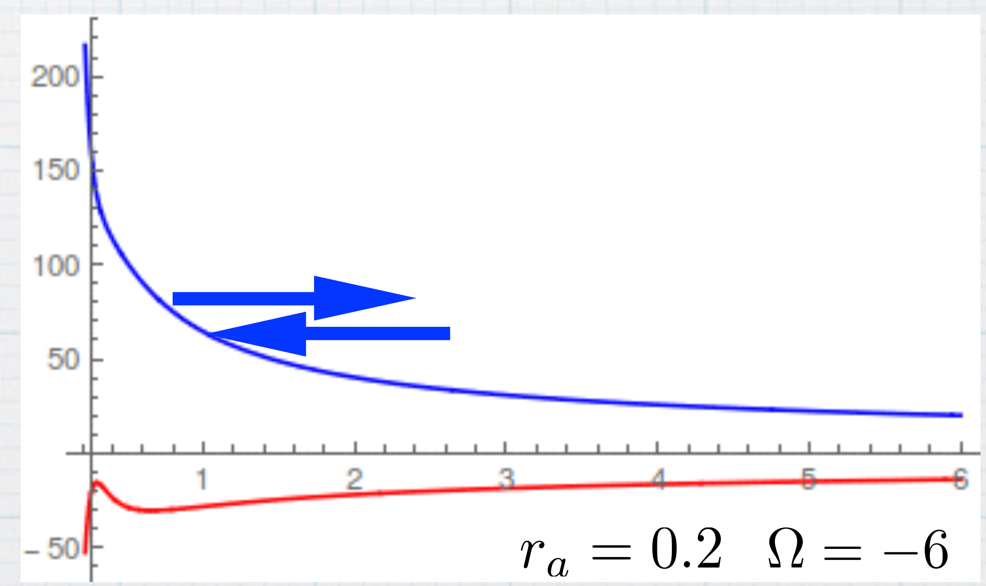
磁場の強さ

$$r_a = \frac{D^2}{4\pi A}$$

有効ポテンシャル



Superradiance有り



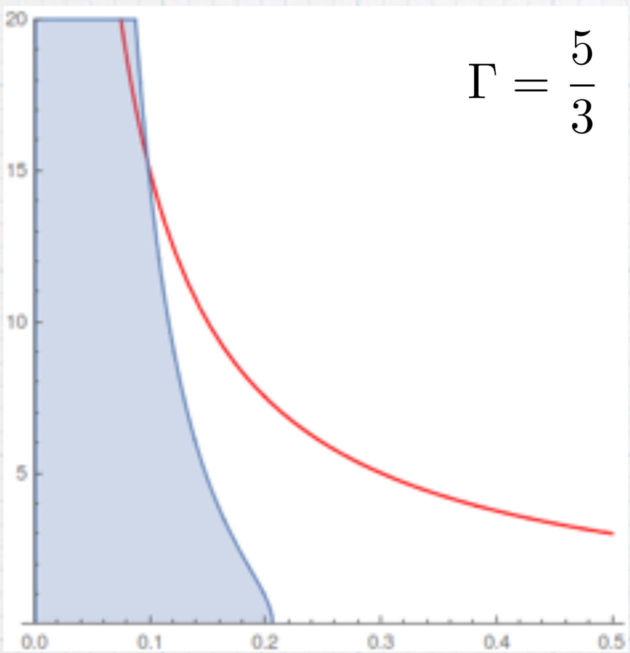
Superradiance無し（全反射）

V_M mode

$$V_M = \sqrt{c_s^2 + V_A}$$

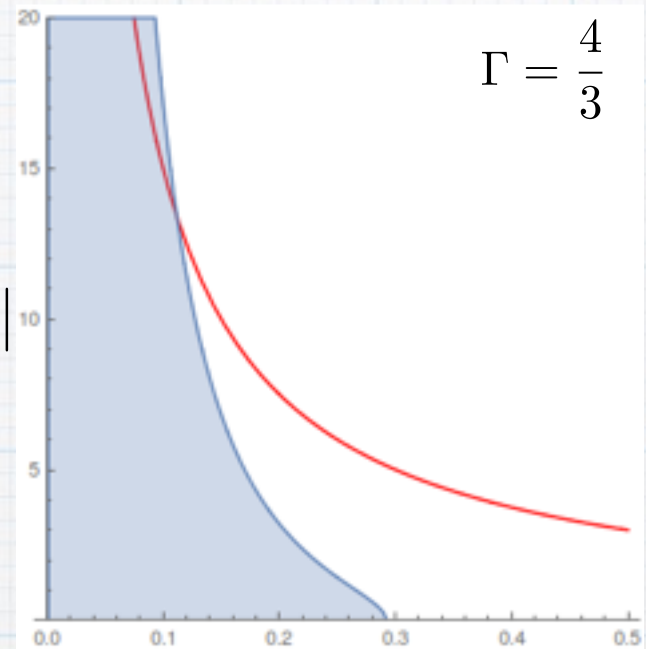
$$p = K\rho^{\Gamma}$$

$|\Omega|$



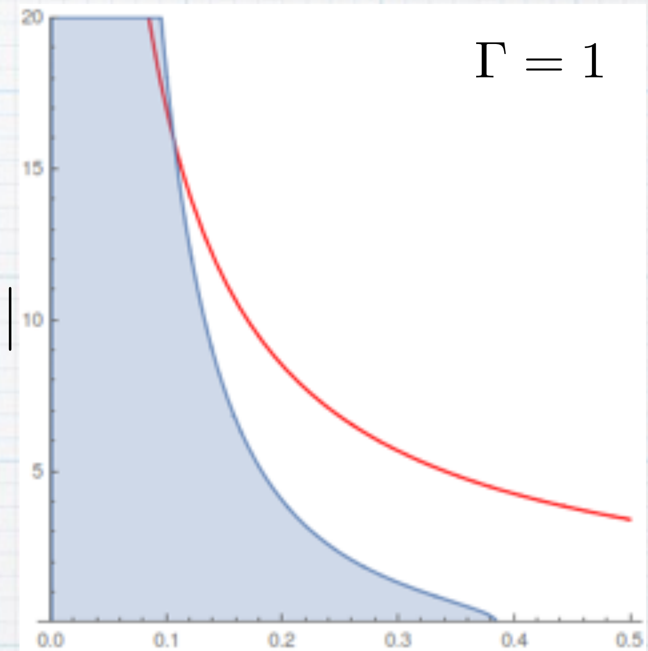
r_a

$|\Omega|$



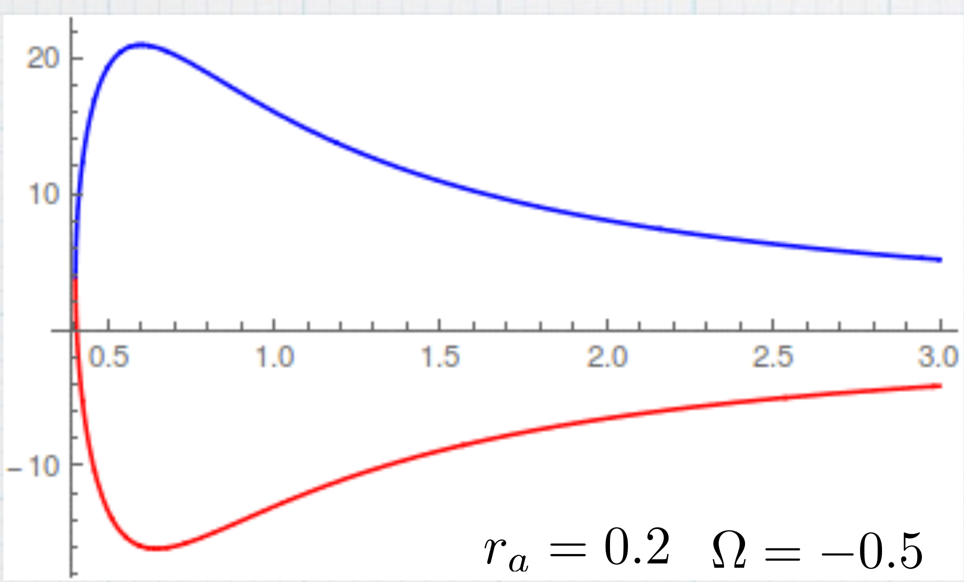
r_a

$|\Omega|$

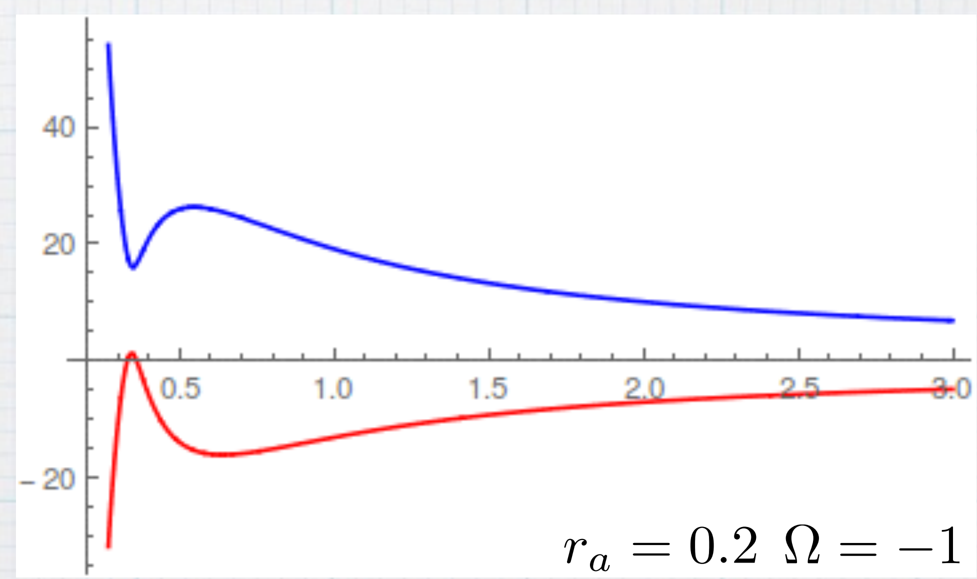


r_a

有効ポテンシャル



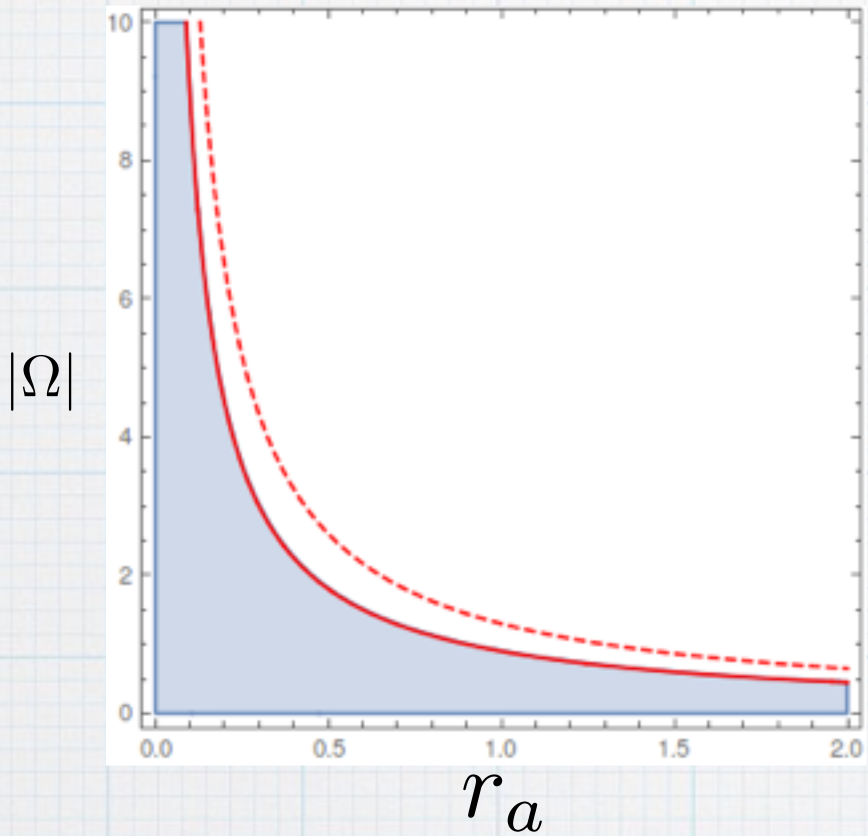
Superradianceあり

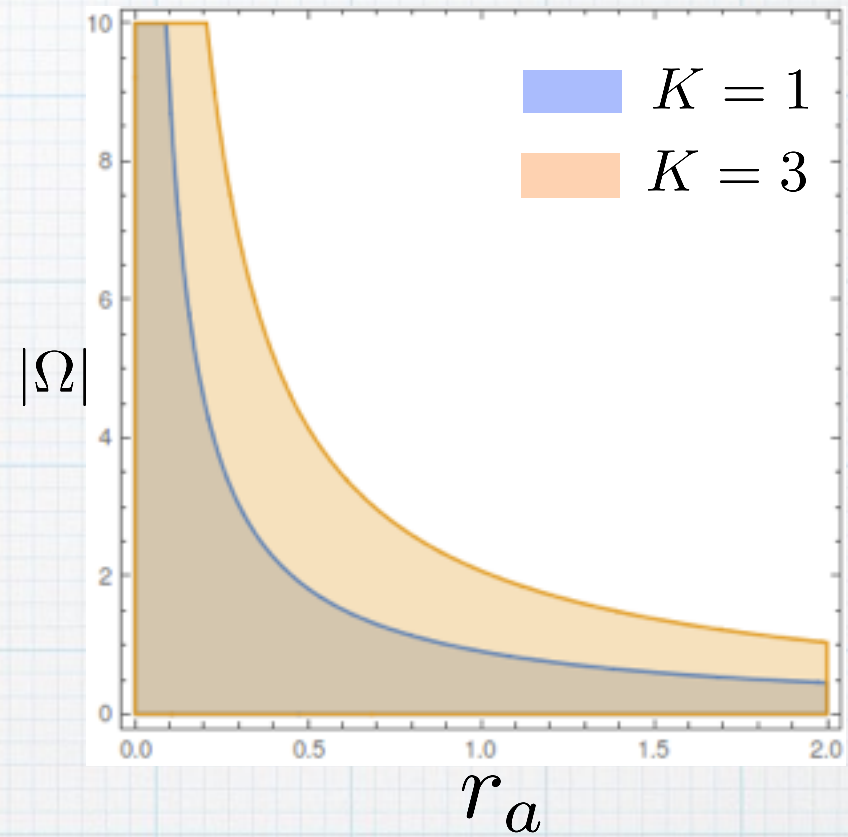


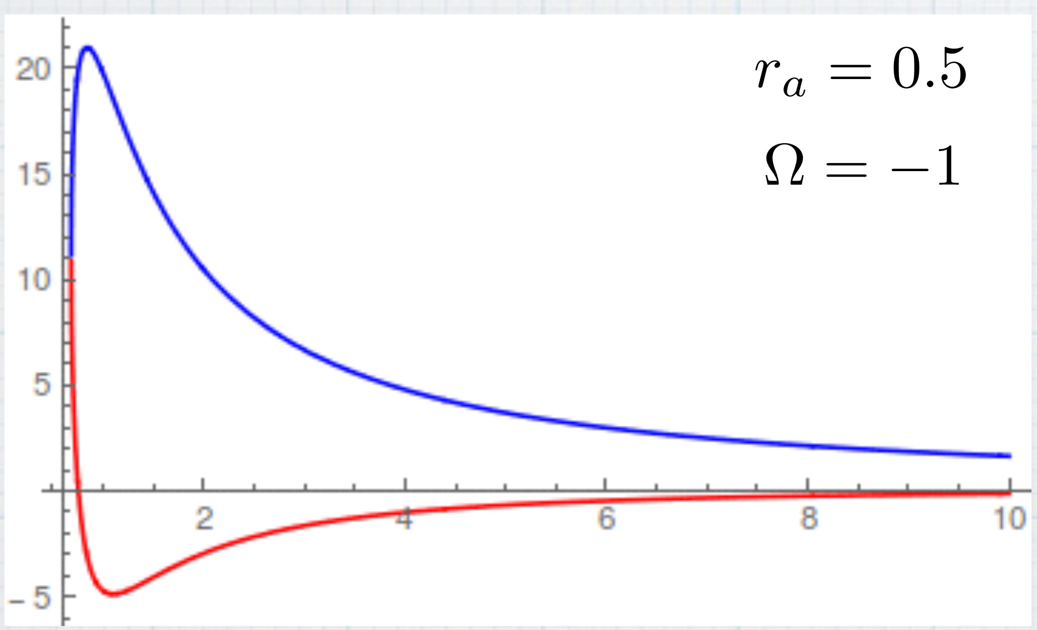
全反射

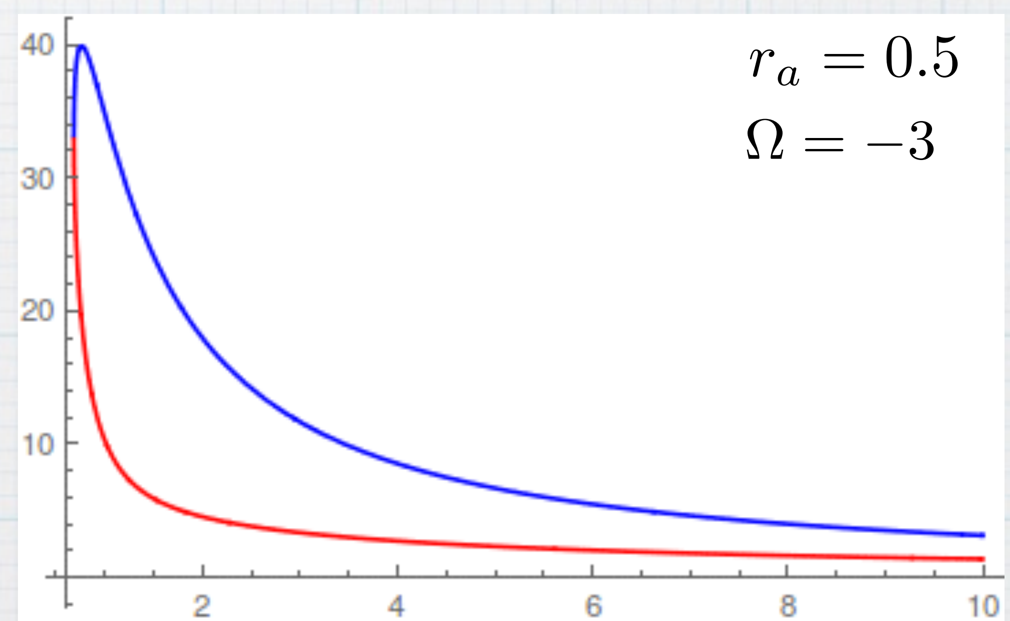
c_s mode

ergo surfaceが有限の位置にあるか　　$p = K\rho^{\Gamma}$









全領域がergo領域

まとめ

◎ 分散関係から磁気音波の安定性を解析

流体ブラックホールで理解

MHD waveのsuperradiance

◎ 磁場の効果

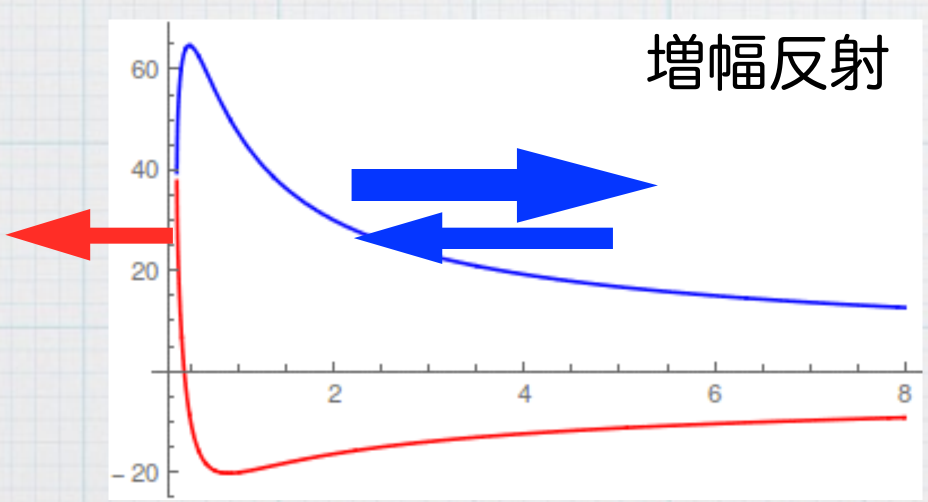
MHD wave 各modeに対するacoustic metric、horizon、ergo領域

horizonの条件式に回転の寄与が入る。

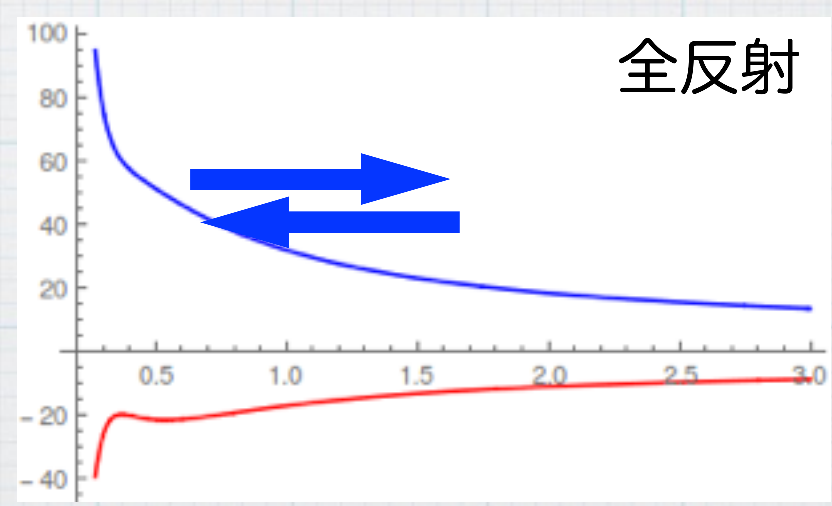
$$V_M = v_0^r(r) \qquad V_A = v_0^r(r) \qquad V_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho_0}\left(B_0^{r\,2} + B_0^{\phi\,2}\right)$$

磁力線の角速度や磁場の強さが大きすぎるとhorizonがなくなる。 (overspinning Kerr的)

acoustic horizonできない場合にはsuperradianceは起きない



回転小



回転大

今後の方針

1. 流体を有限のところで切って、音波の閉じ込めを見る。 磁気音波についてのBH bomb

$$v_0^r(r_{edge}) = 0$$

2. 他のmodeについてもacoustic metricが出せるか？

$$(\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})^2 = \frac{(c_s^2 + V_A^2)\vec{k}^2 \pm \sqrt{(c_s^2 + V_A^2)^2\vec{k}^4 - 4c_s^2\vec{k}^2(\vec{k}\cdot\vec{V}_A)^2}}{2} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho = 0$$

3. 相対論的な場合へ拡張する。天体現象への応用 角運動量の輸送と降着

実験室での流体ブラックホール

流体（量子流体など）の実験からブラックホール物理学に対する示唆

天体現象を実験台にする $\longrightarrow$ ブラックホール物理学についての示唆

ブラックホール物理学での現象、計算 $\longrightarrow$ 天体現象を理解

Back Up

2D MHD wave

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}_0 \cdot \nabla\right)^2 \delta\vec{v} - c_s^2 \nabla(\nabla \cdot \delta\vec{v}) + \vec{V}_A \times \nabla \times \Big(\nabla \times (\delta\vec{v} \times \vec{V}_A)\Big) = 0$$

２つのスカラー場を導入する

$$\delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_y & -\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$$

波動方程式

$$\frac{D^2}{Dt^2}\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} c_s^2 \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1^2 & \underline{L_1 L_2} \\ \underline{L_1 L_2} & L_2^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$$

ϕ ψ がcouple

metricみたいなものを使って書ける？

Superradianceの条件と有効ポテンシャル

$$\Box\Phi = 0 \xrightarrow{\Phi \propto e^{iS}} g^{\mu\nu}(\partial_\mu S)(\partial_\nu S) = 0$$

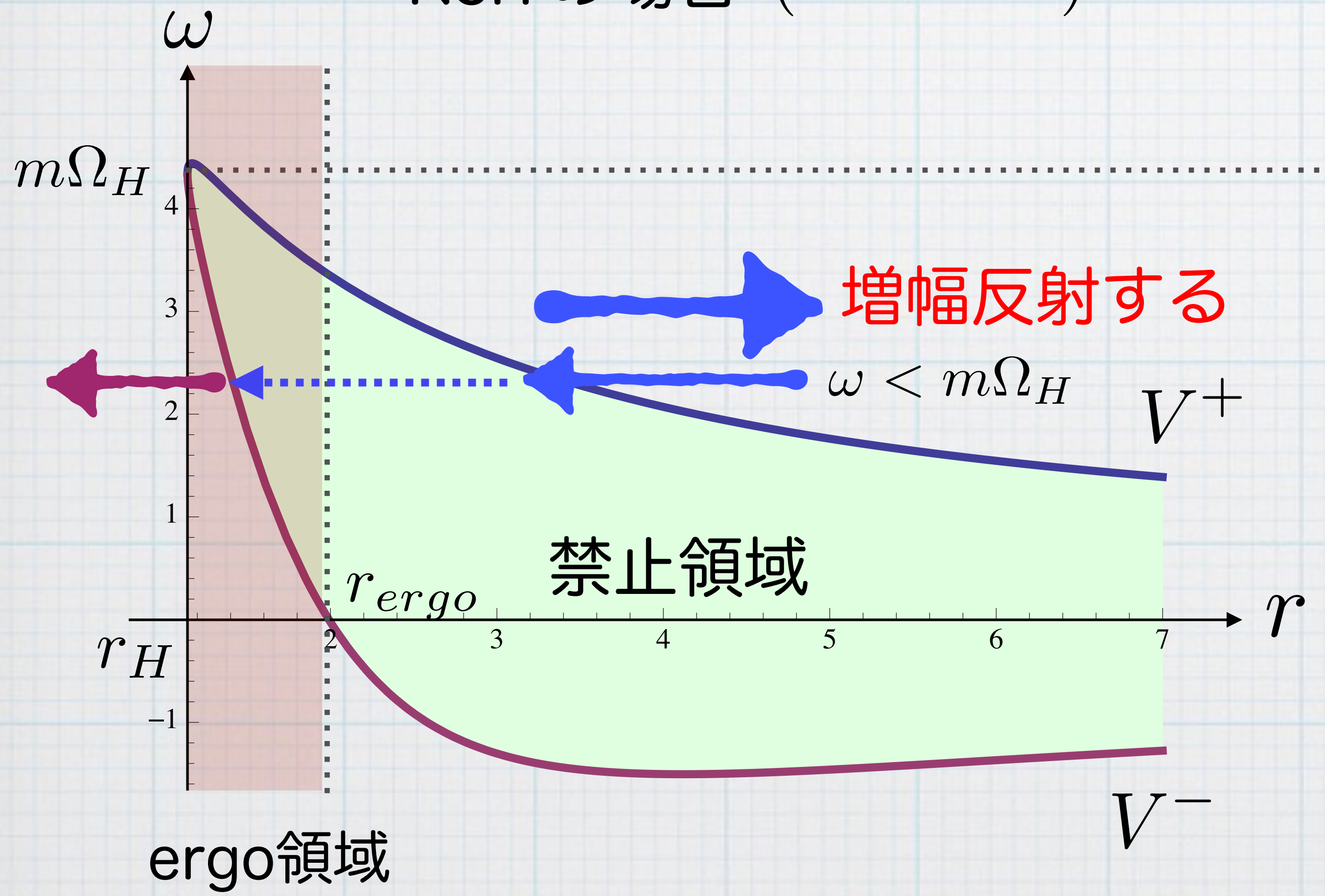
Hamilton Jacobi

動径方向

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4}(\omega - V^+)(\omega - V^-) \geq 0$$

$\boxed{V^- \leq \omega \leq V^+}$ 禁止領域

Kerrの場合 $(a = 0.99)$



Schwarzschildの場合