

# BH疑似天体はあり得るか？

齊田浩見（大同大学）

with 柳哲文，南部保貞，藤澤篤仁（名古屋大学）



← これ見えたら，  
**BH**しかないか!?

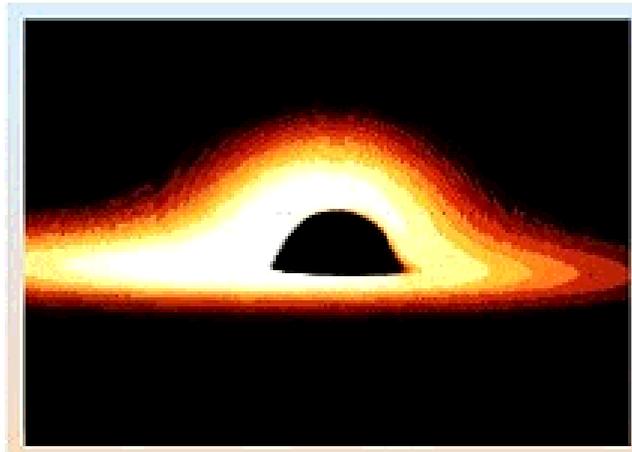
(R.Takahashi & K.Watari 2007)

BH磁気圏研究会，2016.3.2-5

# 1. 概要：問題設定と結論のまとめ

## 1.1 元々の興味から生じる疑問

- **ブラックホールを見たい**：BHシャドウ  
→ **BHの吸収断面積が作る影**



*Fukue & Yokoyama*  
(1988)

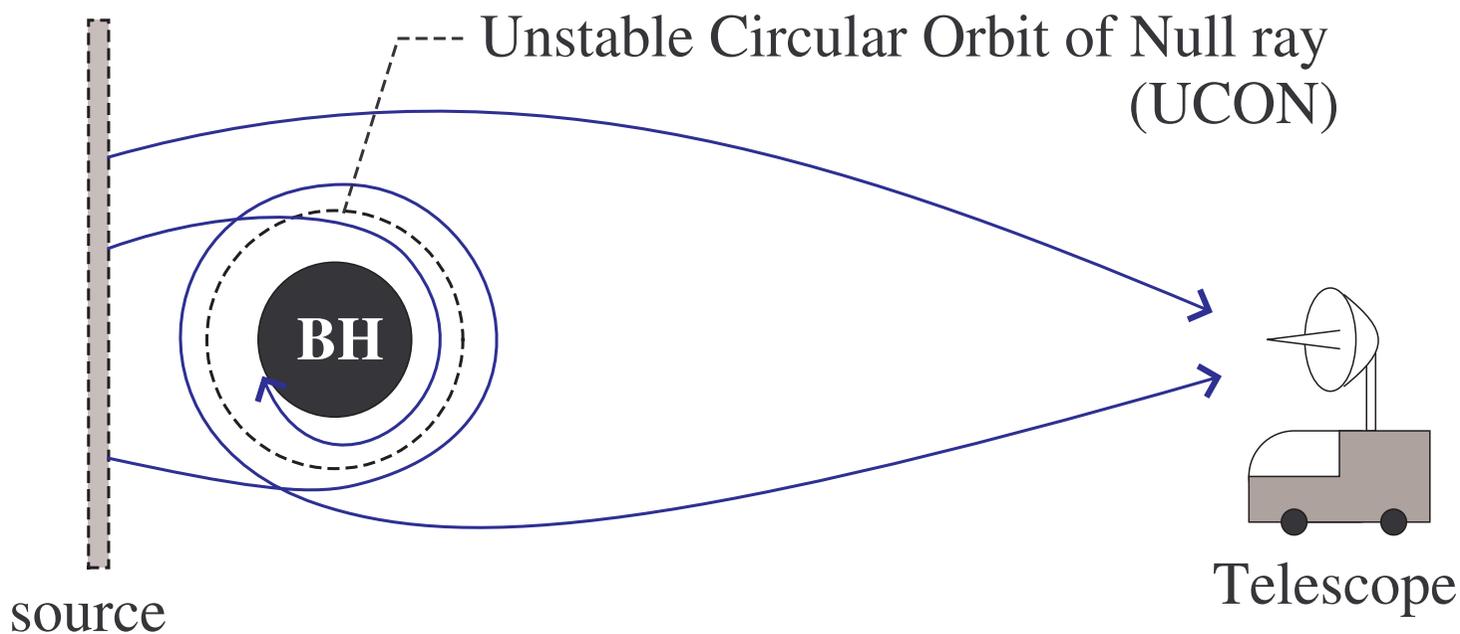
幾何光学近似  
← (光の測地線)  
で描いた画像

- 吸収断面積を決めるのは **光の不安定円軌道!**



シャドウが直接示すもの = **光の不安定円軌道**  
≠ **BH 地平面**

BH shadow is associated with this !



## — 生じる疑問 —

**BH** 地平面はないが光の不安定円軌道が存在するようなコンパクト天体（**BH** 疑似天体）は可能か？

◇ このBH疑似天体は，**BH**でないのに**BH**シャドウと同じ画像を引き起こす可能性がある。

（天体が光を吸収するだけで放射しない場合）

→ シャドウに限らず，強い重力レンズ効果には，同様の問題が付きまとうだろう。

→ BH直接観測を目指す上で重要な論点：

**光の不安定円軌道とBH地平面の関係**

## 1.2 問題設定

- **BH地平面の存在  $\Rightarrow$  光の不安定円軌道の存在**
  - $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{真空, 球対称, 漸近平坦では示した。} \\ \text{違う漸近条件は次の課題。} \end{array} \right.$
- **光の不安定円軌道の存在  $\stackrel{?}{\Rightarrow}$  BH地平面の存在**
  - $\rightarrow$  BH疑似天体の研究... 物質を考える必要あり
- ◇ **エキゾチック天体... マニア向け?**
  - 例： $\left\{ \begin{array}{l} \text{Boson Star : 未調査} \\ \text{Gravastar : BH疑似天体になり得る。} \end{array} \right.$ 
    - 坂井, 齊田, 玉置, PRD90(2014)104013

◇ 完全流体球：球対称かつ静的 —

今日の論点

(A) 一般の順圧な状態方程式：

**BH** 疑似天体があり得る！

Barotropic :  $p = p(\sigma)$  ,  $\begin{cases} p : \text{圧力} \\ \sigma : \text{質量密度} \end{cases}$

(B) ポリトロープ：**BH** 疑似天体はあり得ない！

◇ 完全流体球：軸対称かつ定常的

→ アプローチを考え中... (難しい)



今回の問題設定は次の2つ...

## 問題A (質量の上限 or 半径の下限)

流体球について, 前提条件

- 物質: 完全流体,  $p = p(\sigma)$ ,  $\sigma(r)$  は単調減少,  
かつ, 音速  $\leq$  光速
- 時空: 球対称, 静的, 漸近平坦 (TOV方程式)  
の範囲であらゆる状態方程式を考えて, 次の比

$$\frac{M_*}{R_*} < u \quad \left( \Leftrightarrow \frac{M_*}{u} < R_* \right)$$

の上限  $u$  を求めよ。ただし  $\begin{cases} M_* : \text{流体球の質量} \\ R_* : \text{流体球の半径} \end{cases}$

## 問題B (質量の上限 or 半径の下限)

流体球について, 前提条件

- 物質: 完全流体, ポリトロープ  $p(\sigma) \propto \sigma^{1+1/n}$ ,  
かつ, 音速  $\leq$  光速
- 時空: 球対称, 静的, 漸近平坦 (TOV方程式)  
の範囲で (ただし  $R_*$  が有限の場合で), **次の比**

$$\underline{\frac{M_*}{R_*} < u \quad \left( \Leftrightarrow \frac{M_*}{u} < R_* \right)}$$

**の上限  $u$  を求めよ。** ただし  $\begin{cases} M_* : \text{流体球の質量} \\ R_* : \text{流体球の半径} \end{cases}$

● 光の不安定円軌道との関わり：

$$\diamond \mathcal{U} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{M_*}{R_*} < \mathcal{U} < \frac{1}{3} \quad \left( 3M_* < R_* \right)$$

流体球の外側に光の不安定円軌道は存在しない。

→ シャドウが見えたらBHだと言える可能性あり。

(内側に光の不安定円軌道がないかを調べる必要あり。)

$$\diamond \mathcal{U} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \geq \frac{1}{\mathcal{U}} \Rightarrow 3M_* > R_* \text{ is possible !}$$

流体球の外側に光の不安定円軌道が存し、

『流体球シャドウ』が見える可能性あり。

→ シャドウが見えてもBHだとは言いきれない。

## 1.3 先行研究と我々の結論のまとめ

- Buchdahl (1959)

「問題1の前提条件」 – 「音速  $\leq$  光速」

$$\Rightarrow \frac{M_*}{R_*} \leq \mathcal{U} = \frac{4}{9} (= 0.444\cdots) \quad \left( \frac{1}{3} < \frac{4}{9} \right)$$

- Barraco-Hamity (2002)

「Buchdahlの条件」 + 「Dominant Energy 条件」

$$\Rightarrow \frac{M_*}{R_*} \leq \mathcal{U} = \frac{3}{8} (= 0.375) \quad \left( \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{4}{9} \right)$$



↓  
問題Aの目標と結論

- 条件『音速  $\leq$  光速』 ( $\Rightarrow$  **Dominant Energy** 条件) を加えることで, **Barraco-Hamity** の上限  $3/8$  より小さな上限  $U$  が得られることを示す。
  - 我々の結果は,  $\frac{M_*}{R_*} \leq U = 0.3636403 \dots$   
 $\left( \frac{1}{3} < 0.3636403 < \frac{3}{8} = 0.375 \right)$
- この条件だけでは, シヤドウが見えても必ずしも **BH** だとは言いきれない。

↓  
問題Bの目標と結論

- 状態方程式をポリトロープに限定することで、問題Aの上限  $0.3636403$  より小さな上限  $\mathcal{U}$  が得られることを示す。
  - 我々の結果は、
$$\frac{M_*}{R_*} \leq \mathcal{U} = \begin{cases} 0.281 \dots \\ 0.325 \dots \end{cases} < \frac{1}{3}$$
    - ・ 上側 → 単純ポリトロープ
    - ・ 下側 → 核-外層型ポリトロープ
- この条件が現実に対応していれば、シャドウが見えればBHだと言ってよい。

この話の要点は以上で終わりです。

これだけ分かってもらえれば十分です。

あとは，問題Aと問題Bの解析方法の概要です。  
(お疲れ様でした。)

## [参考文献]

- 問題A：

藤澤， 齊田， 柳， 南部， CQG32(2015)215028

- 問題B：

齊田， 藤澤， 柳， 南部， PTEP ... under referring

## 2. 問題A：順圧な状態方程式

### 2.1 時空計量と物質の前提条件

- 計量：
$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} + r^2 dS_2^2$$

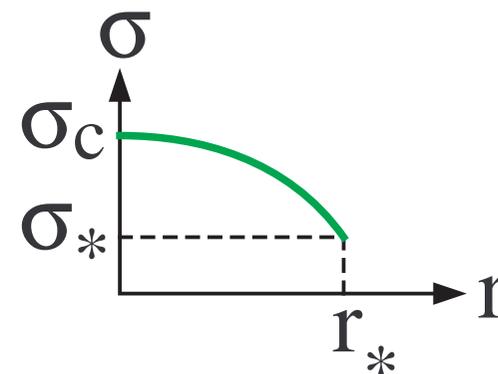
→  $m(r)$ ：半径  $r$  以下を埋める流体の質量

- 完全流体：
$$\mathbf{T} = (\sigma c^2 + p) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{g}$$

$$\begin{cases} \sigma(r) : \text{質量密度} \\ p(r) : \text{圧力} \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = e^{-\Phi} \partial_{ct}$$

- 順圧の状態方程式： $p = p(\sigma)$

- 流体球の単調性： $\frac{d\sigma(r)}{dr} \leq 0$



- 因果的音速： $\frac{dp(\sigma)}{d\sigma} \leq c^2$

先行研究にはない  
新たな条件

- 流体球の表面の定義：半径を  $r_*$  として  $p(r_*) = 0$   
→ 外側  $r_* \leq r$  は Schwarzschild 時空に接続

- 流体球の質量： $m_* := m(r_*)$  → Schwarzschild 質量

- パラメータ： $\left\{ \begin{array}{ll} \text{中心圧力} & : p_c \\ \text{中心・表面質量密度} & : \sigma_c, \sigma_* \end{array} \right.$

## 2.2 物理量を $\sigma_c$ で規格化（無次元化）

- 半径座標 :  $R := \frac{G\sigma_c}{c}r \rightarrow$  表面 :  $P(R_*) = 0$
- 質量密度 :  $\Sigma(R) := \frac{\sigma(r)}{\sigma_c} \rightarrow$  中心 :  $\Sigma(0) = 1$
- 半径  $R$  以下の質量 :  $M(R) := \frac{\sqrt{G^3\sigma_c}}{c^3}m(r)$
- 圧力 :  $P(R) := \frac{p(r)}{\sigma_c c^2} \rightarrow$  [音速] $^2 = \frac{dP(\Sigma)}{d\Sigma} \leq 1$
- 計量 :  $\Phi(R) = \Phi(r) \dots$  もともと無次元量

## 2.3 TOV方程式

- 変数変換:  $R \rightarrow \Sigma$

$$\begin{array}{l|l} R & 0 \rightarrow R_* : \text{流体球の半径} \\ \hline \Sigma & 1 \rightarrow \Sigma_* \quad (0 \leq \Sigma_* < 1) \end{array}$$

→ 流体球の全質量:  $M_* = M(\Sigma_*)$

- パラメータと自由度 (規格化・変数変換の後)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{中心圧力} \quad : \quad P_c := P(\Sigma = 1) \\ \text{表面質量密度} : \quad \Sigma_* \Leftrightarrow P(\Sigma_*) = 0 \\ \text{状態方程式} \quad : \quad \underline{P = P(\Sigma)} \end{array} \right.$$



この関数形を調節して  $M_*/R_*$  の最大値を探したい。

- Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程式 :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \text{ より,}$$

$$\frac{dM(\Sigma)}{d\Sigma} = 4\pi R^2 \Sigma \frac{dR}{d\Sigma} \quad (1)$$

$$\frac{dR(\Sigma)}{d\Sigma} = - \frac{R(R - 2M)}{(\Sigma + P)(M + 4\pi R^3 P)} \frac{dP}{d\Sigma} \quad (2)$$

$$\frac{d\Phi(\Sigma)}{d\Sigma} = - \frac{1}{\Sigma + P} \frac{dP}{d\Sigma} \quad (3)$$

◇  $M, R, P$  が求まれば  $\Phi(\Sigma)$  も自動的に決まる。

→ 以下, 式(1), (2) に注目!

## 2.4 変分原理（最適制御理論）の応用

- 力学変数： $M(\Sigma)$ ,  $R(\Sigma)$ ,  $P(\Sigma)$
- **制御変数**： $U(\Sigma) \Leftrightarrow \frac{dP(\Sigma)}{d\Sigma} =: \sin^2 U(\Sigma) \leq 1$   
→ 拘束条件として導入される補助的な力学変数
- 拘束条件：  
TOV方程式(1), (2),  $\frac{dP(\Sigma)}{d\Sigma} = \sin^2 U(\Sigma)$   
↓  
以上の準備の下で,  
**変分原理を応用して  $\frac{M_*}{R_*}$  の最大値を求める。**

- 考察対象  $M_*/R_*$  の汎関数表示：

$$\frac{M_*}{R_*} = \int_0^{R_*} dR \frac{d(M/R)}{dR} = \int_{\Sigma_*}^1 d\Sigma \left[ -\frac{d(M/R)}{d\Sigma} \right]$$

↓ … 拘束条件を使って整理

$$= \int_{\Sigma_*}^1 d\Sigma \left[ -\frac{(R - 2M)(M - 4\pi R^3 \Sigma)}{R(\Sigma + P)(M + 4\pi R^3 P)} \sin^2 U \right]$$

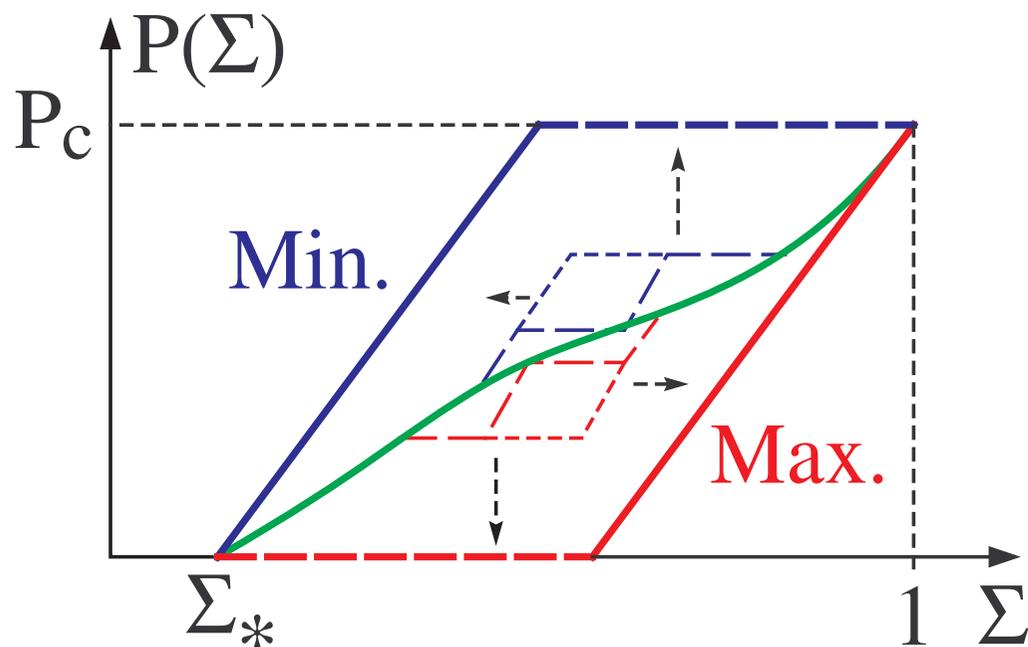
- Lagrange 未定乗数法で  $\frac{M_*}{R_*}$  の停留条件を計算：

$$\delta \left( \frac{M_*}{R_*} \right) = 0 \Leftrightarrow U = 0 \text{ or } \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dP(\Sigma)}{d\Sigma} = 0 \text{ or } 1}$$

## 2.5 この先の計算の概要 (詳細は付録a)

- 停留条件は極大条件 → 最大と最小の区別が必要

→  $\frac{dP(\Sigma)}{d\Sigma} = 1$  (音速 = 光速) を上手く使って  
 $M_*/R_*$  の最大値が得られることが分かる。



$\frac{dP}{d\Sigma} = 1$  の直線部分  
だけが  $\frac{M_*}{R_*}$  に寄与!!

↓ 前ページの図のように …

○ 中心圧力  $P_c$  を固定した場合に,

どの『音速=光速』が  $\frac{M_*}{R_*}$  の最大を与えるか  
が分かる。

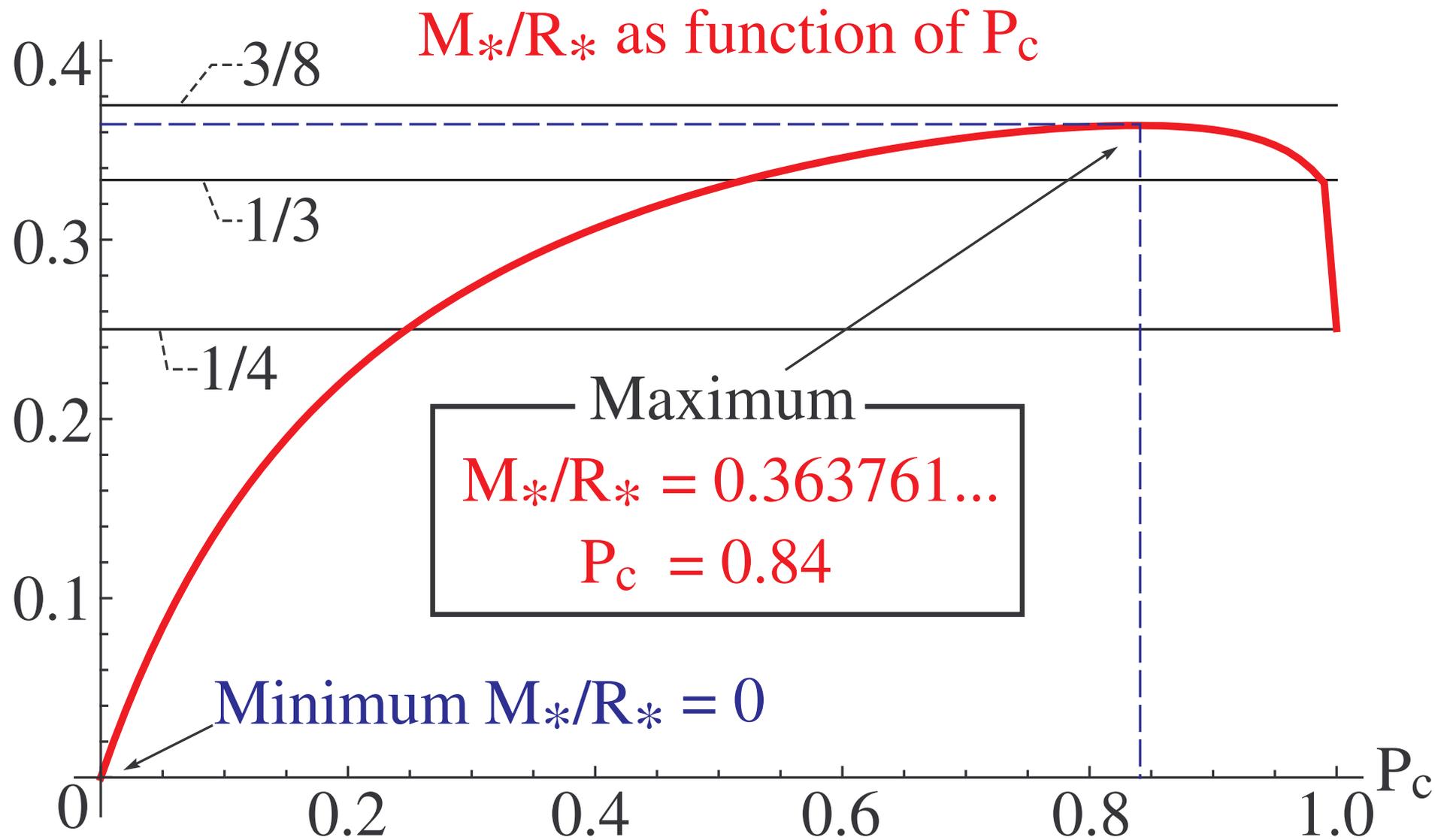
○ 各  $P_c$  の値ごとの  $M_*/R_*$  の最大値を計算すれば,  
『本当の最大値』が分かる。

→ 2ページ前の積分を

(TOV方程式を解きながら) 数値計算

## 2.6 計算結果

(  $P_c \rightarrow 1$  で  $M_* \rightarrow \infty$ ,  $R_* \rightarrow \infty$  )





- 条件『音速  $\leq$  光速』 ( $\Rightarrow$  **Dominant Energy** 条件) を加えることで, **Barraco-Hamity** の上限  $3/8$  より小さな上限  $\mathcal{U}$  が得られた。
- 我々の結果は,  $0 < \frac{M_*}{R_*} \leq \mathcal{U} = 0.3636403 \dots$   
 $\left( \frac{1}{3} < 0.3636403 < \frac{3}{8} = 0.375 \right)$   
 $\rightarrow$  この条件だけでは, シャドウが見えても必ずしも **BH** だとは言いきれない。

# 3. 問題B：ポリトロープ

## 3.1 前提条件，規格化，TOV方程式

- 背景時空の計量テンソル ... 問題Aと同じ

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} + r^2 dS_2^2$$

- 物質の扱い ... 問題Aにポリトロープを追加

$$p(\sigma) \propto \sigma^{1+1/n}$$

→ TOV方程式より単調性  $\frac{d\sigma}{dr} \leq 0$  は自動的にOK

● 中心密度  $\sigma_c$  で規格化

○ 半径座標 :  $R := \frac{G\sigma_c}{c} r \rightarrow$  表面 :  $P(R_*) = 0$

○ 質量密度 :  $\Sigma(R) := \frac{\sigma(r)}{\sigma_c} \rightarrow$  中心 :  $\Sigma(0) = 1$

○ 圧力 :  $P(R) := \frac{p(r)}{\sigma_c c^2} = P_c \Sigma^{1+1/n}$

$\rightarrow$  中心 :  $P(\Sigma = 1) = P_c$  , 表面 :  $P = 0 \Leftrightarrow \Sigma = 0$

○ 半径  $R$  以下の質量 :  $M(R) := \frac{\sqrt{G^3 \sigma_c}}{c^3} m(r)$

○ 計量 :  $\Phi(R) = \Phi(r) \dots$  もともと無次元量

- 変数変換:  $R \rightarrow \Sigma$   $\frac{R | 0 \rightarrow R_* : \text{流体球の半径}}{\Sigma | 1 \rightarrow 0}$

→ 流体球の全質量:  $M_* = M(\Sigma = 0)$

- 音速:  $V^2 = \frac{dP(\Sigma)}{d\Sigma} = P_c \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Sigma^{1/n}$

→ 中心音速  $V_c$  が最も速い:  $V_c^2 = P_c \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

→ 条件『音速  $\leq$  光速』  $\Leftrightarrow V_c^2 \leq 1$

● パラメータと自由度（規格化・変数変換の後）

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{中心音速} \quad : \quad V_c \leq 1 \\ \text{ポリトロープ} \\ \text{の指標数} \quad : \quad n \Leftrightarrow P = \frac{nV_c^2}{n+1} \Sigma^{1+1/n} \end{array} \right.$$

→  $V_c, n$  を動かして  $M_*/R_*$  の最大値を探す。

⇓ ところで ...

$M_*/R_*$  の計算の前に，指標数  $n$  の範囲は？

## 3.2 指標数 $n$ の範囲

- ポリトロープ指標数  $n$  が完全流体球の内部全体で一定値（**単純ポリトロープ**）とすると...

→ **Nilsson & Uggla (2001)** の TOV 数値研究で、

任意の  $V_c (> 0)$  において、 $M_*$  と  $R_*$  は共に、

$0 < n < 3.339 \rightarrow$  有限

$3.339 < n < 5 \rightarrow$  **almost everywhere** で有限

$5 < n \rightarrow$  無限大に発散

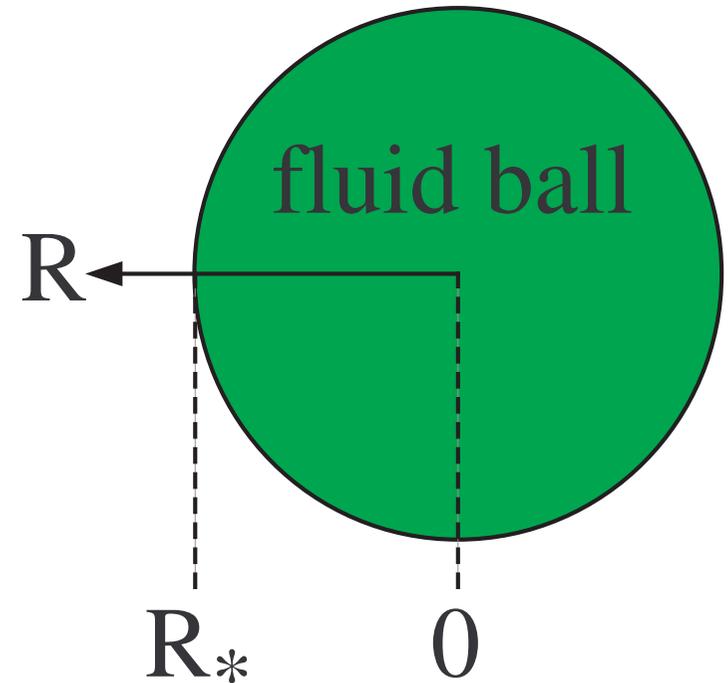
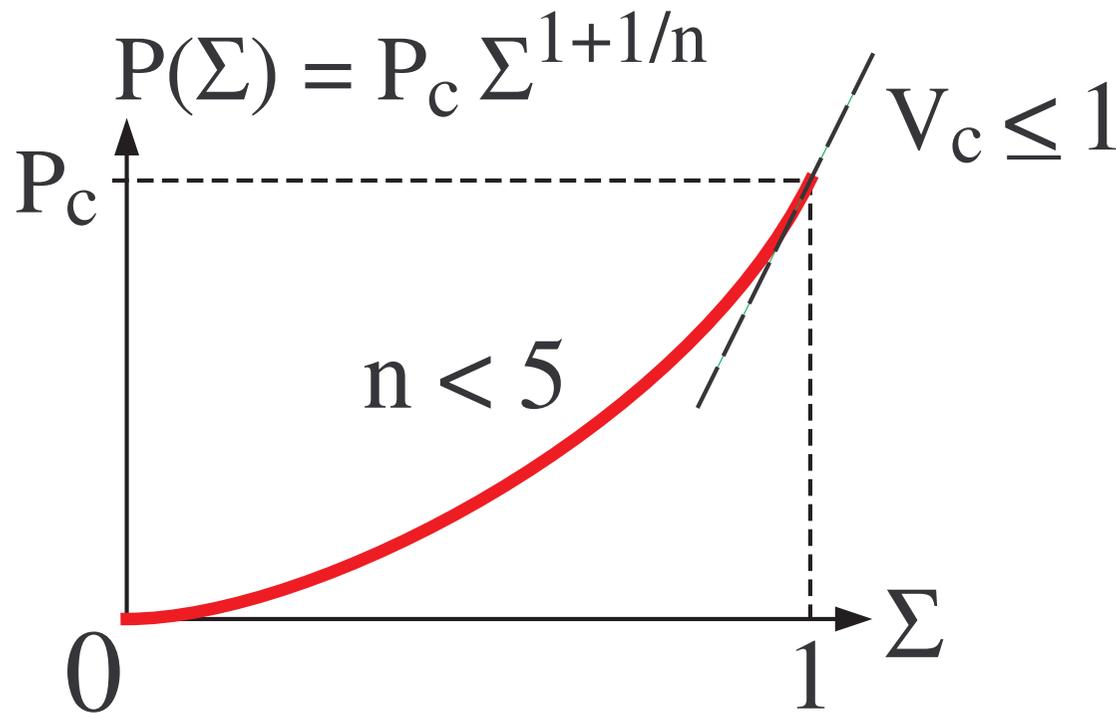
→  $M_*/R_*$  の挙動はまだ調べられていない！



我々の単純ポリトロープのパラメータ範囲は、

$$\text{中心音速 } V_c : 0 \leq V_c \leq 1$$

$$\text{指標数 } n : 0 < n < 5$$

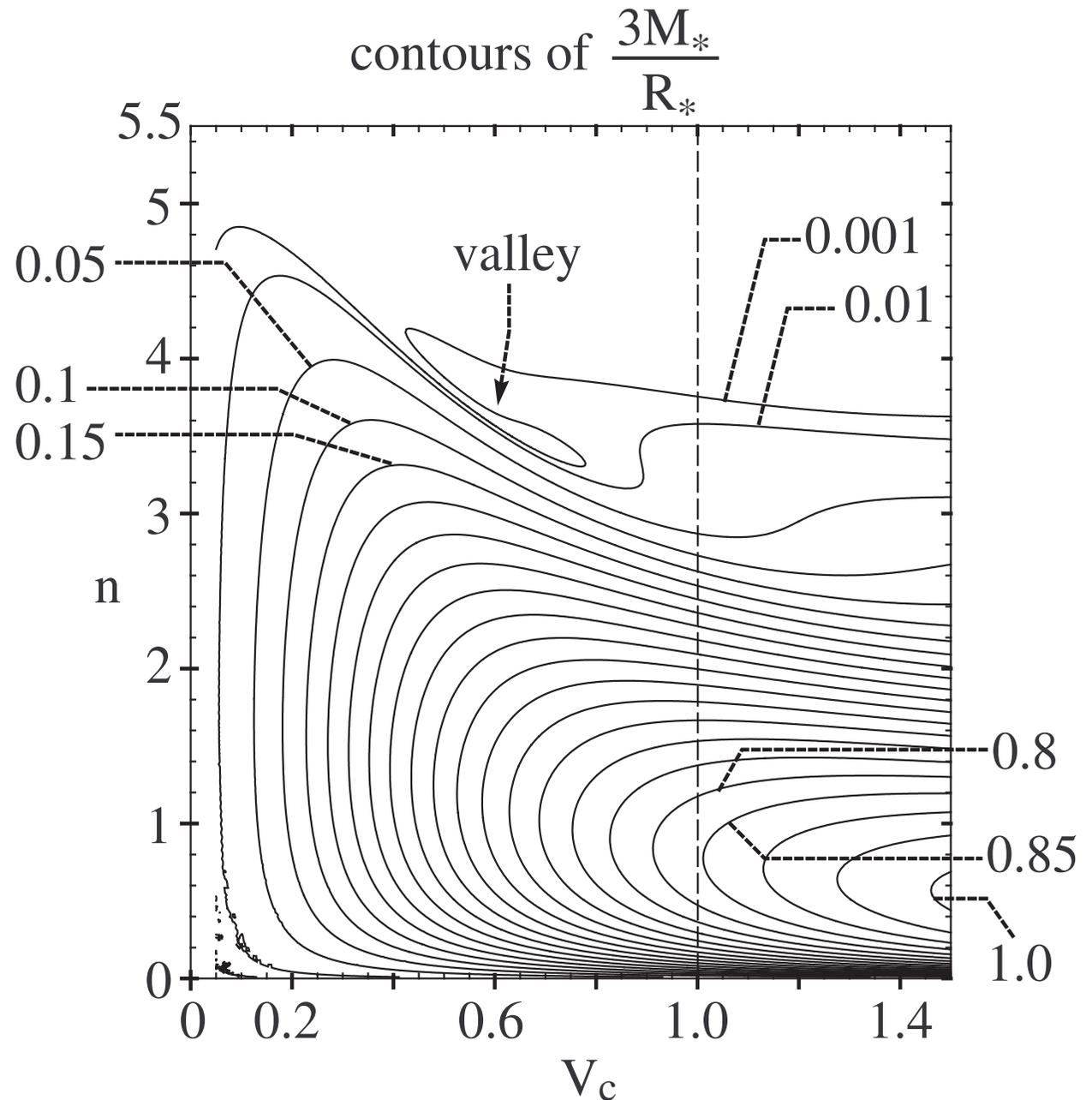


## 3.3 単純ポリトロープの計算結果

- valley に沿って  
 $M_*$ ,  $R_*$  の発散点  
が離散的に並ぶ

→ 発散点において  
きっと  $M_*/R_*$   
は 0 になる。

- 我々のパラメータ  
範囲で  $\frac{3M_*}{R_*} < 1$





- 状態方程式をポリトロープに限定することで、問題Aの上限 0.3636403 より小さな上限  $\mathcal{U}$  が得られることが示された。
- 我々の結果は、単純ポリトロープで，
$$\frac{M_*}{R_*} \leq \mathcal{U} = 0.281 \dots < \frac{1}{3}$$

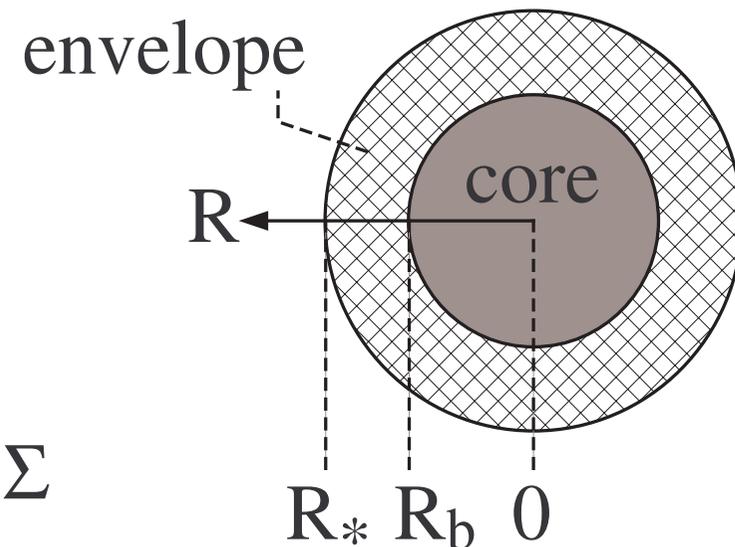
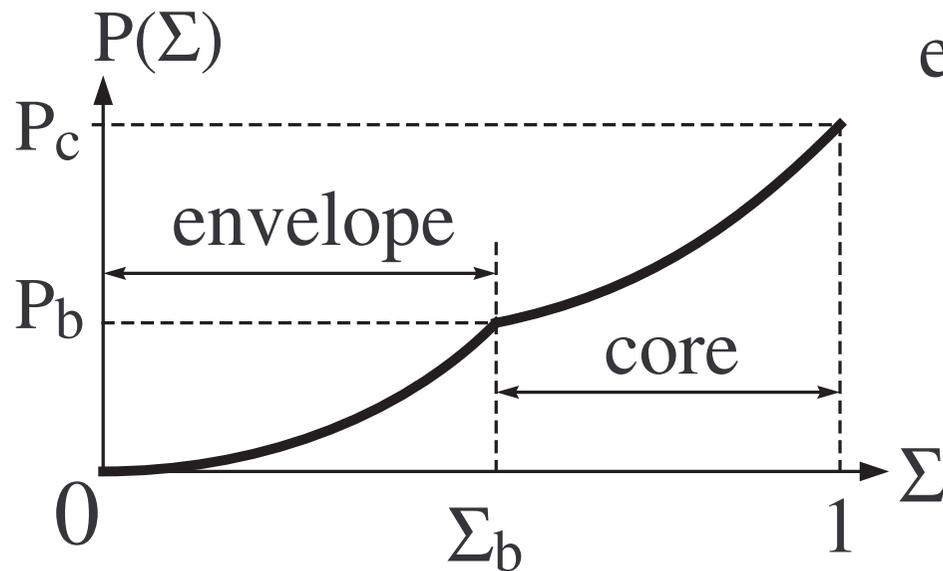
→ 単純ポリトロープが現実的なら，  
シャドウが見えればBHだと言ってよい。
- \* 論理的に完全には§4の議論が必要

## 3.4 核－外層型ポリトロープへの拡張

(レフェリーコメントを受けて行った追加研究)

- 例えば中性子性は『核部分』と『外層部分』でモデル化するのが普通

→ 『核－外層型ポリトロープ』への拡張を考える



- 核－外層型ポリトロープのパラメータは4つ

核部分の指標数	:	$n_{\text{cor}}$
外層部分の指標数	:	$n_{\text{env}}$
核と外層の接続位置	:	$\Sigma_{\text{b}}$
中心圧力 (or 音速)	:	$P_{\text{c}}$ or $V_{\text{c}}$

\* 外層部分の比例係数  $P_{\text{env}} = \text{O} \Sigma^{1+1/n_{\text{env}}}$  は、  
接続条件  $P_{\text{env}}(\Sigma_{\text{b}}) = P_{\text{cor}}(\Sigma_{\text{b}})$  で決まる。

$$P_{\text{cor}} = P_{\text{c}} \Sigma^{1+1/n_{\text{cor}}} , P_{\text{env}} = \text{O} \Sigma^{1+1/n_{\text{env}}}$$

- 問題Aを参考にすると,  
音速が大きいほど  $M_*/R_*$  が大きくなるはず。

→  $V_c = 1, V_b = 1$  として  $M_*/R_*$  を計算!

→ 4つのパラメータに2つ条件がついたので,

独立パラメータ :  $n_{\text{cor}}, \Sigma_b$

と選ぼう。

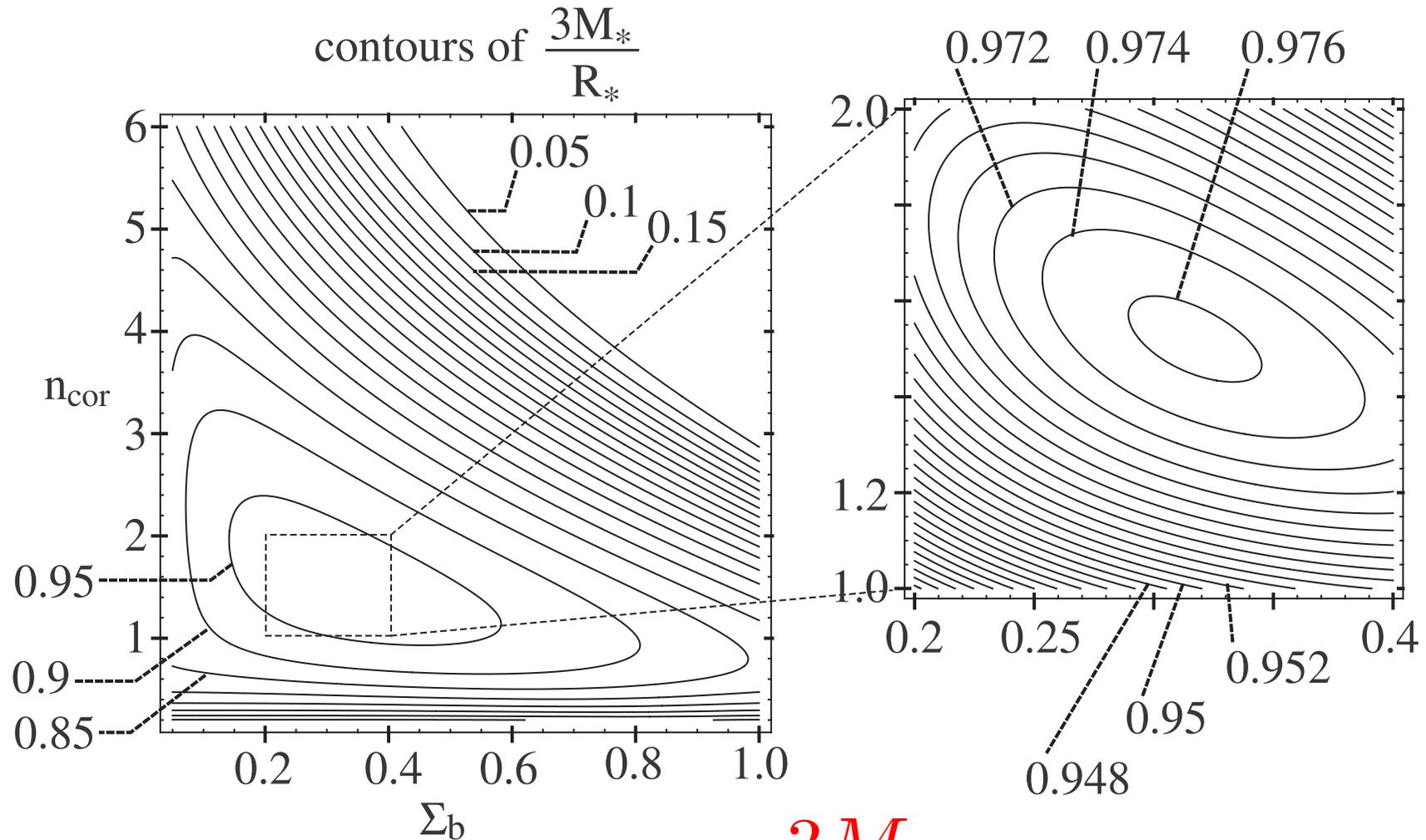
- 指標数  $n_{\text{cor}}$  の範囲は?

→ Nilsson-Uggla を拡張すべきだが...

→ ひとまず, 単純ポリトロープと同じと仮定:

$$0 < n_{\text{cor}} < 5$$

# 3.5 核-外層型ポリトロープの計算結果



- 我々のパラメータ範囲で  $\frac{3M_*}{R_*} < 1$



- 状態方程式をポリトロープに限定することで、問題Aの上限  $0.3636403$  より小さな上限  $\mathcal{U}$  が得られることが示された。
- 我々の結果は、核-外層型ポリトロープで、
$$\frac{M_*}{R_*} \leq \mathcal{U} = 0.325 \dots < \frac{1}{3}$$

→ 核-外層型ポリトロープが現実的なら、  
シャドウが見えればBHだと言ってよい。
- \* 論理的に完全には§4の議論が必要

## 4. 追加問題：流体球の内側は？

- ポリトロープ球の外側には  
光の不安定円軌道が現れないことが分かった。  
↓ しかし …

ポリトロープ球の内側に光の不安定円軌道が現れたら、ポリトロープ球がBH疑似天体になってしまう可能性を論理的には排除できない。

- \* 例：光の不安定円軌道の外側は透明で  
内側は黒体の場合，BH疑似天体になる。

- ポリトロープ球の内部は透明だとして、  
球内部で光の測地線方程式を調べた。

↓ 結果は …

—— ポリトロープ球の内側問題の結論 ——

問題 B (§3) で解析した『単純ポリトロープ』と『核－外層型ポリトロープ』では、完全流体球の内部に光の不安定円軌道が現れることはない。

→ 問題 B で扱ったポリトロープ球が BH 疑似天体になる可能性 (BH と同じシャドウを作る可能性) は、論理的に完全に排除された。

## 5. まとめ

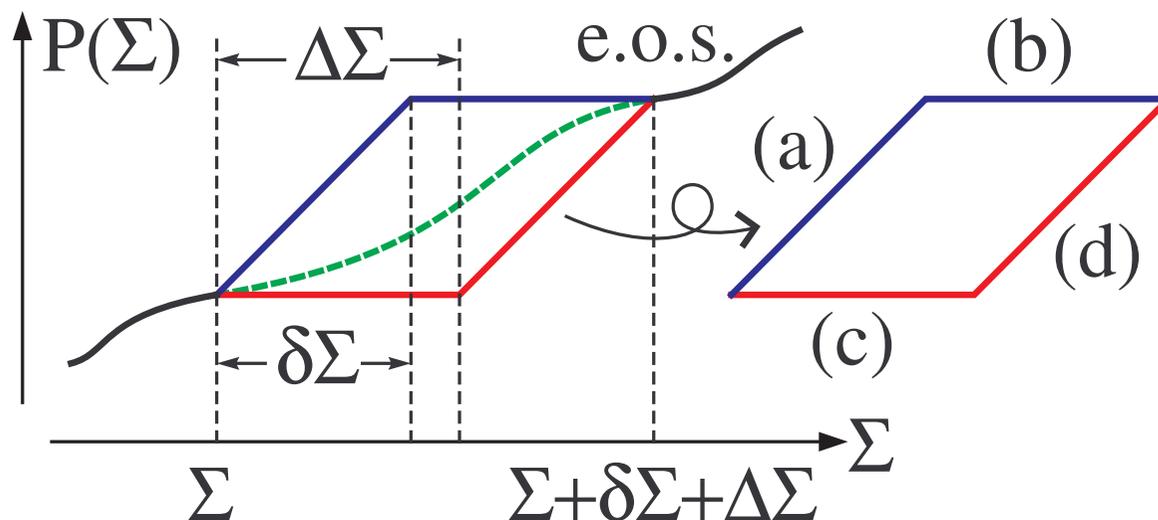
- BHシャドウは光の不安定円軌道で生成される。  
(BHの吸収断面積)  
→ BH疑似天体の可能性を排除しないと, シャドウの撮像がBH観測とは言い切れない。
- BH疑似天体 (我々の定義):  
BH地平面を持たず, 光の不安定円軌道を持つ天体
- 問題:  
球対称静的な完全流体球がBH疑似天体になるか?

- 一般の順圧な状態方程式，音速  $\leq$  光速，の場合：  
→ 完全流体球が **BH** 疑似天体になる可能性あり。
- ポリトロープ，音速  $\leq$  光速，の場合：  
→ 完全流体球は **BH** 疑似天体にならない。
- 詰めるべき問題：
  - Nilsson-Uggla (2001) の核－外層型への拡張
  - 一般の順圧状態方式の場合で，流体球の内側に光の不安定円軌道が現れないか？
- 次に面白いかもしれない問題（難しい・・・）
  - 粘性流体球，回転する場合

# 付録a. §2.5 の詳細

## a.1 状態方程式の変形：最大化 or 最小化

- $\frac{dP}{d\Sigma} = 0$  or  $1$  は極値条件 → 極大・極小は？
- $\Sigma$ - $P$  平面上の微小平行四辺形に注目



微小平行四辺形の中で  
状態方程式を変形…  
→ (a)+(b) or (c)+(d)  
の経路で  $M_*/R_*$  が  
極大 or 極小になる。

- 経路 (b), (c) :  $\frac{dP}{d\Sigma} = 0 \Rightarrow \frac{M(\Sigma)}{R(\Sigma)} = \text{一定}$

→ 経路 (a), (d) による  $M_*/R_*$  への寄与を比較 :

$$\Delta\left(\frac{M_*}{R_*}\right) := \int_{(d)} d\Sigma L - \int_{(a)} d\Sigma L, \quad L = -\frac{d(M/R)}{d\Sigma}$$

$$= [L(\Sigma + \Delta\Sigma) - L(\Sigma)] \delta\Sigma$$

$$= \frac{\partial L(\Sigma)}{\partial \Sigma} \Delta\Sigma \delta\Sigma$$

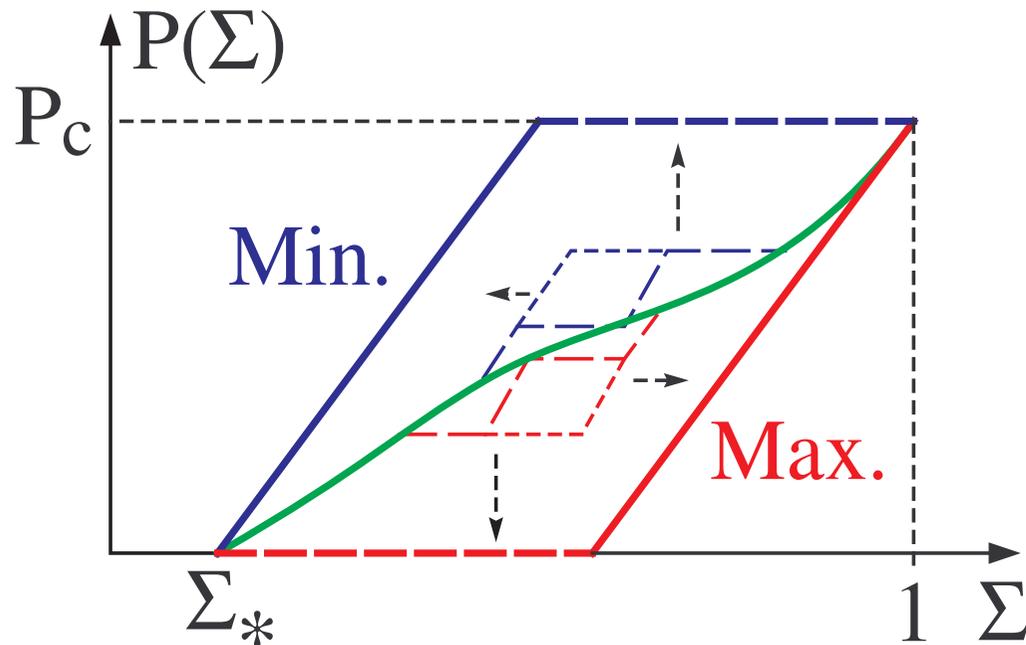
$$= \frac{R - 2M}{R(R + \Sigma)^2} \Delta\Sigma \delta\Sigma \underline{\underline{> 0}} \rightarrow$$

経路 (d) が極大  
経路 (a) が極小

⇒  $P_c, \Sigma_*$  を固定した時の  $\frac{M_*}{R_*}$  の最大・最小は？

状態方程式の微小変形を繰り返して...

下図の状態方程式の  $\left\{ \begin{array}{l} \text{青が最小値} \\ \text{赤が最大値} \end{array} \right.$  を与える。



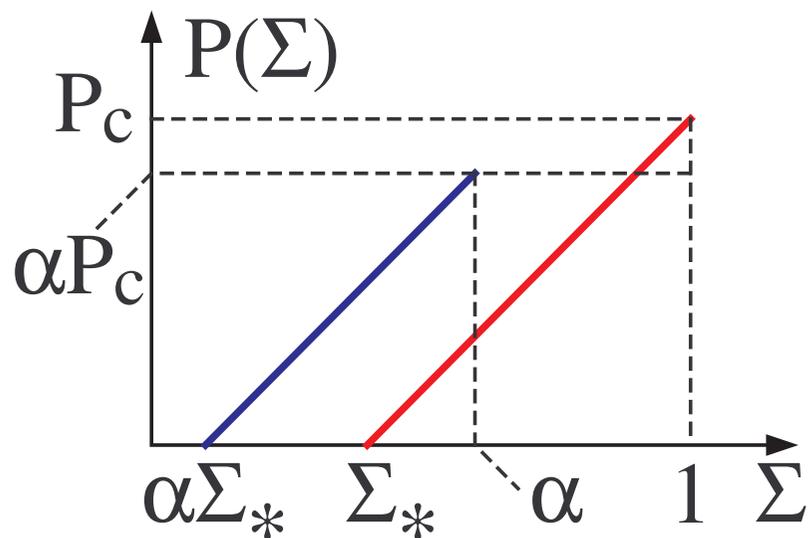
$\frac{dP}{d\Sigma} = 1$  の直線部分  
 だけが  $\frac{M_*}{R_*}$  に寄与!!

## a.2 計算対象の絞り込み：再規格化

- §2.2の規格化に注意（中心密度を取り直す）

『 $\alpha P_c, \alpha \Sigma_*$  に対応する  $\frac{M_*}{R_*}$  の最小値』

= 『 $P_c, \Sigma_*(=1-P_c)$  に対応する  $\frac{M_*}{R_*}$  の最大値』



赤経路の  $M_*/R_*$  の計算を  
 $0 < P_c \leq 1$  で繰り返す。



任意の直線経路の  $M_*/R_*$  の  
値が全て得られる。



**Step1:** 状態方程式  $P = \Sigma - \Sigma_*$  ( $\Sigma_* \leq \Sigma \leq 1$ )  
で  $\frac{M_*}{R_*}$  を計算。 ( $P_c = 1 - \Sigma_*$ )

**Step2:**  $0 < P_c \leq 1$  で繰り返すことで、  
 $P_c$  の関数として  $\frac{M_*}{R_*}(P_c)$  を得る。

**Step3:**  $\frac{M_*}{R_*}(P_c)$  の最大値 (最小値) が、  
状態方程式の変形によって取り得る  
 $M_*/R_*$  の最大値 (最小値) である。

→ §2.6 に続く