

名古屋大学 教育学部附属中・高校 SSH 物理学探究講座

第1部：特殊相対性理論（＋一般相対性理論の雰囲気）

この講義では、毎回数ページずつプリントを配ります。最後まで受講すると、最終的に一つの冊子になるような構成です。プリント内容は以下の目次の通りで、主に特殊相対性理論の入門的な解説をし、その後に一般相対性理論の雰囲気を話します。

なお、講義では必ずしもこのプリントの全てを解説するわけではありません。特に、§7の後半と§8は、SSH講座の中で扱う時間的余裕はないと思います。ですが、もしも皆さんが宇宙物理学や天文学に進んだ場合にはきっと役立つ内容なので、プリントは配布しようと思います。そして、もしも§7の後半に興味を持ったら、数学で微分・積分とベクトルを履修した後にチャレンジしてみてください。また、もしも§8に興味を持ったら、物理で波動とドップラー効果を履修した後にチャレンジしてみてください。

目次：

- §0. 導入
- §1. 特殊相対論の基本原則
- §2. 『距離』の概念の重要性
- §3. 特殊相対論の時空：ミンコフスキー時空
- §4. 「時間の遅れ」と「ローレンツ収縮」（定性的な理解）
- §5. ローレンツ変換
- §6. 速度合成則と因果律，光円錐
- §7. 質量エネルギー
- §8. 運動論的ドップラー効果と相対論的ビーミング効果
- §9. 特殊相対論の限界：双子のパラドックス

————— 以下，一般相対論の雰囲気の解説 —————

- §10. 重力がある場合（一般相対性理論）への導入：等価原理
- §11. 一般相対性理論の基本原則と重力
- §12. アインシュタイン方程式：定性的な解説
- §13. 一般相対論の帰結と限界1：ブラックホール時空の定性的な解説
- §14. 一般相対論の帰結と限界2：膨張する宇宙を表す時空の定性的な解説

担当教員：齊田浩見（大同大学 教養部 物理学教室） saida@daido-it.ac.jp

（名古屋大学理学部の QG 研にも客員研究員として迎えて頂いている。）

—— 物理学を理解する上で必要な認識『科学は人間の信念と観察の産物』 ——

注意：以下の話しは、あくまでも、斉田の感想です。説明の仕方や例の示し方が上手くない点もあると思います。また、そもそも他の研究者とは意見が違う点もあるかもしれません。一研究者の現在の感想として、ご参考までにご覧ください。皆さんが物理を学ぶ上で、少しでも参考になれば幸いです。

● 科学は万能ではない

19世紀以降、人類は数理科学や自然科学（数学、物理学、化学、生物学など）の知識を利用して様々な技術（これを科学技術（＝科学知識に基づいた技術）と言う）を生み出し、工業文明を作り出してきました。私たちを取り巻く文明をみて、科学は万能だ、という思いを持つ人もいることでしょうか。あなたはどうですか？科学は万能だと思いますか？

科学は決して万能ではありません。現代の科学では理解できない自然現象は沢山あります。理解できているものより、まだ理解できないもののほうが多いのです。例えば産業廃棄物、環境ホルモン、フロンガスなどに代表される様々な環境汚染・破壊や、医薬品の思ってもいなかった副作用による薬害など、現代文明が引き起こす深刻な問題が存在することは、現在の科学と科学技術が未熟であることを物語る明かな例だと言えるでしょう。なぜなら、仮に自然界を100%完全に理解しコントロールできれば、現代文明は何も不都合な問題を起こさないはずだからです。また、科学と科学技術の未熟さを物語る別の例として、現在も科学者が研究を続けている、ということも挙げられるでしょう。というのも、既に人類が手にしている科学が万能ならば、科学の発展を目指した研究なんてする必要はないはずだからです。

現代文明を支えている科学技術は、現代科学でなんとか知ることができた「自然界に関する部分的な知識」を利用しているだけです。科学が進歩して新たな知識を得れば、それを利用して新たな科学技術も生まれるでしょう。

● 科学は変化する

科学的真実あるいは科学的知識は、時代と共に変化するものです。つまり、その時代の科学者たちの知識と理解の範囲内で、正しそうだ、と思われるものが科学的真実と呼ばれるものなのです。現代科学の知識が自然界の現象を完全に忠実に表しているか・理解しているか、ということは誰にも分かりません。あくまでも、科学的知識とは、現在人類が持っている技術で実施可能な実験精度の範囲で正しい、というものに過ぎません。研究が進み、科学が進歩すれば、古い時代の科学的真実は見直され、より正確な（と思われる）新たな科学的真実に変更されていくのです。科学は人類と共に変化するものなのです。

しかしここで言っていることは、科学的知識には強固な基礎がない（いい加減なもの）ということではありません。科学とは、単なる個人の思い込みではなく、実験による正否の検証が行われている知識であることに注意して下さい。例えば現代の科学技術の未熟さが原因で完璧に精密な実験が出来なかったとしても、その実験精度の範囲内で現代科学は自然現象を完全に理解しているのです。つまり人類の技術で実験可能な精度の範囲であれば、科学的知識は普遍的な事実を表すのです。

● 科学には出来ることと出来ないことがはっきりしている

上に述べたように、科学的知識は実験の精度の範囲内で正しいのです。そのような科学的知識を系統的・論理的（そして数学的）にまとめたものが科学理論だと言えます。そして現在、科学理論は結構沢山ありますが、それぞれの科学理論には適用可能な実験精度があるのです。つまり、それぞれの科学理論には説明できる自然現象と説明できない自然現象があるのです。

科学理論は、その適用範囲では完全に正しいことを言えます。しかし、一歩その適用範囲を超えてしまうと、

その科学理論は正しいことを言えるのかどうかは分かりません。科学には「出来ること（正確に言えること）」と「出来ないこと（正確には言えないこと）」がはっきりしているのです。

例えば、幽霊は本当にいるの？という質問を考えてみましょう。現在の科学者は誰も正確にこの質問に答えることは出来ません。なぜなら、現代科学はまだその質問に答えられる程度には進歩していないからです。

● 科学には人間の信念が反映されている

上で、科学理論はその適用範囲内で完全に正しいことを言える、と言いました。では、正しい、とはどういうことでしょうか？正しいと判断する基準は何でしょうか？どこかに科学の神様がいて、正しいとはこういうことだ、と教えてくれるわけではありません。あくまでも科学は人間が考えて、実験して、作っていく知識体系です。なので、何をもって正しいと言うのか、何をもって理解できたとするのか、ということも人間が決めなければなりません。

また、あらゆる自然現象の原理を説明できるような理論があれば良いのですが、少なくとも今のところそんな万能理論は作られていません。まさに物理学者が研究中です。従って、現在人類が持っているあらゆる科学理論には、その理論が説明しようとする自然現象は何か、という目的（適用範囲）も規定されています。

以上から、あらゆる科学理論には「何を説明するのが目的で、何をもってその目的を理解した（正しい理解を得た）と考えるのか」という信念が必ず含まれていることが分かります。その信念を理解することが、科学理論の理解の第一歩目です。その信念は、単なる1人の科学者の思い込みではなく、多くの科学者同士の議論と数々の実験的検証を通して、より妥当なものへと磨き上げられていくのです。時代と共に科学は変化し磨き上げられていくのです。どんな自然現象を説明するのが目的で、何をもって理解したと考えるのか？これを理解することが、物理学を知る上で重要です。

§0. 導入

0.1 無限に遠くまで作用できる力 (作用・反作用の法則にも注意) (図 0.1)

- 電磁気力 (Maxwell の理論で理解できる — この講義では Maxwell 方程式は知らなくてよい)

例: 電荷 (電気量) q [C] を持つ荷電粒子と, Q [C] を持つ荷電粒子が距離 r [m] だけ離れて静止しているときの電気力 \vec{F}_E [N]

$$\rightarrow \text{クーロンの法則になる} : \begin{cases} \text{強さ: } F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qQ|}{r^2} \\ \text{(} \epsilon_0 : \text{誘電率} \rightarrow \text{真空での値 } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{ [Nm}^2\text{/C}^2\text{])} \\ \text{向き: } qQ > 0 \text{ で反発力, } qQ < 0 \text{ で引力} \end{cases} \quad \text{--- (0.1)}$$

補足: 電気力 (0.1) は荷電粒子が静止している場合の式

- 荷電粒子が運動する・電気量が変わる場合には電磁気現象の基礎方程式 (Maxwell 方程式) を解き直す。
- 粒子運動や電気量変化の情報は瞬時には伝わらないことが分かる。
- 情報が伝わる最高速度 $c = 3.0 \times 10^8$ [m/s] (30 万 km 毎秒=1 秒間に地球を 7 周半) であることが分かる。
(電場・磁場の振動, つまり電磁波=光, が真空中を伝わる速さも c である。)
- この最高速度 c を光速と言う。

- ニュートンの重力理論 (万有引力)

2つの物体 m [kg], M [kg] が距離 r [m] だけ離れている (運動していてもよい) ときの重力 \vec{F}_N

$$\begin{cases} \text{強さ: } F_N = G \frac{mM}{r^2} \quad (\text{ニュートン定数: } G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ [Nm}^2\text{/kg}^2\text{])} \\ \text{向き: 引力のみ (質量は常に正} \dots mM > 0) \end{cases} \quad \text{--- (0.2)}$$

↓

r がどんなに大きくても F_E, F_N はゼロでない (力が働く)。

補足: 原子核を作る力 (核力) は 10^{-15} [m] 程度の範囲でしか働かない。

→ 原子核の大きさは 10^{-15} [m] 程度

(核兵器・原子力発電で利用する (原子) 核分裂は, 大きな原子核を持つ元素で起きる現象)

0.2 宇宙と重力

- 宇宙には+電荷と-電荷が同量ずつ存在

→ 限られた領域では+と-に偏りがあっても, 宇宙全体では電磁気力は引力と反発力で打ち消しあっている。

- 重力はあらゆる物体の間で引力として作用する → 電磁気力のように打ち消しあうことはない

↓

よって, 宇宙全体 の発展 (進化) や性質は主に重力によって決まるはず!

$$\begin{cases} \text{恒星・惑星や銀河の誕生と進化} \\ \text{宇宙における銀河の分布} \\ \text{時間と空間そのもの (これが今回の講座に関わる)} \\ \text{etc ...} \end{cases} \quad \rightarrow \text{重力を知らずに宇宙は理解できない}$$

0.3 ニュートン重力理論の適用限界と相対性理論 (図 0.2)

● 式 (0.2) によると (m, M は運動していてもよいので) ...

◇ 式 (0.2) は運動する物体に適用できると考えているので, m の物体が運動して距離 r が変化すると ...

→ 距離 r が変化した瞬間に, 質量 M の物体に作用する重力 \vec{F}_N の強さや向きも変化。

→ ニュートン重力理論は

『物体 m の運動の情報が瞬時に (時間差ゼロで) 離れた物体 M に伝わる』と主張。

◇ 質量 m が変化すると (例えば $m \rightarrow m'$ と別の値に変化) ...

→ 質量 m が変化した瞬間に, 質量 M に作用する重力の強さ $G \frac{mM}{r^2} \rightarrow G \frac{m'M}{r^2}$ に変化。

→ ニュートン重力理論は

『物体の質量変化の情報が瞬時に (時間差ゼロで) 離れた物体 M に伝わる』と主張。

↓ 以上2つより ...

ニュートン重力理論は『重力に関わる情報の伝わる速さが無限大』と主張していることが分かる。

→ しかし, これは精密に測定すると間違っていることが (間接的に) 実験や天体観測で分かっている。

(→ 直接的検証は“重力波”の検出ができれば OK ... 世界中で実験中)

→ ニュートン重力理論は精密には正しくない (日常生活の範囲では問題なし!)

↓ そこで, 現在分かっていることをまとめると ...

● ニュートン重力理論の限界

⎧ 重力がとても強い (密度や質量が非常に大きい)
⎧ 光速 c に近い速さで物体が運動
⎧ 光速 c で飛んでもすぐに通過できないほど広い領域

の場合に, ニュートン重力理論が不正確であることが顕著に現れる。

→ 正確には一般相対性理論 (アインシュタイン重力理論) が必要!

⎧ ◇ 一般相対論を使って計算すると, 重力の変化といった情報は重力波として伝搬し, その伝搬速度は c であることが分かる。
⎧ ◇ 一般相対論で, 「重力が弱い」かつ「光速が ∞ 」, と近似するとニュートン重力理論 (0.2) が得られる。
⎧ ◇ 時間と空間そのものの性質も一般相対論によって考えられる → 時空の力学!

→ 一般相対論で重力がない場合, つまり光の伝搬速度が有限の値 c であることだけを正確に考慮した場合を, 特殊相対性理論と呼ぶ。

● 特殊相対性理論は, 重力がない場合の時間と空間 (時空) の性質を説明する理論, である。

→ ⎧ 世の中の最高速は光速である
⎧ 人によって時間の進み方が変わる
⎧ 人によって物差しの長さが変わる
⎧ 質量はエネルギーに変化する ($E = mc^2$)
⎧ 人によって波の波長や周期が変わる (特殊相対論的ドップラー効果)

などの帰結が得られる。

(さらに, 一般相対論とその帰結「ブラックホール」「膨張宇宙論」の雰囲気も可能なら話す。)

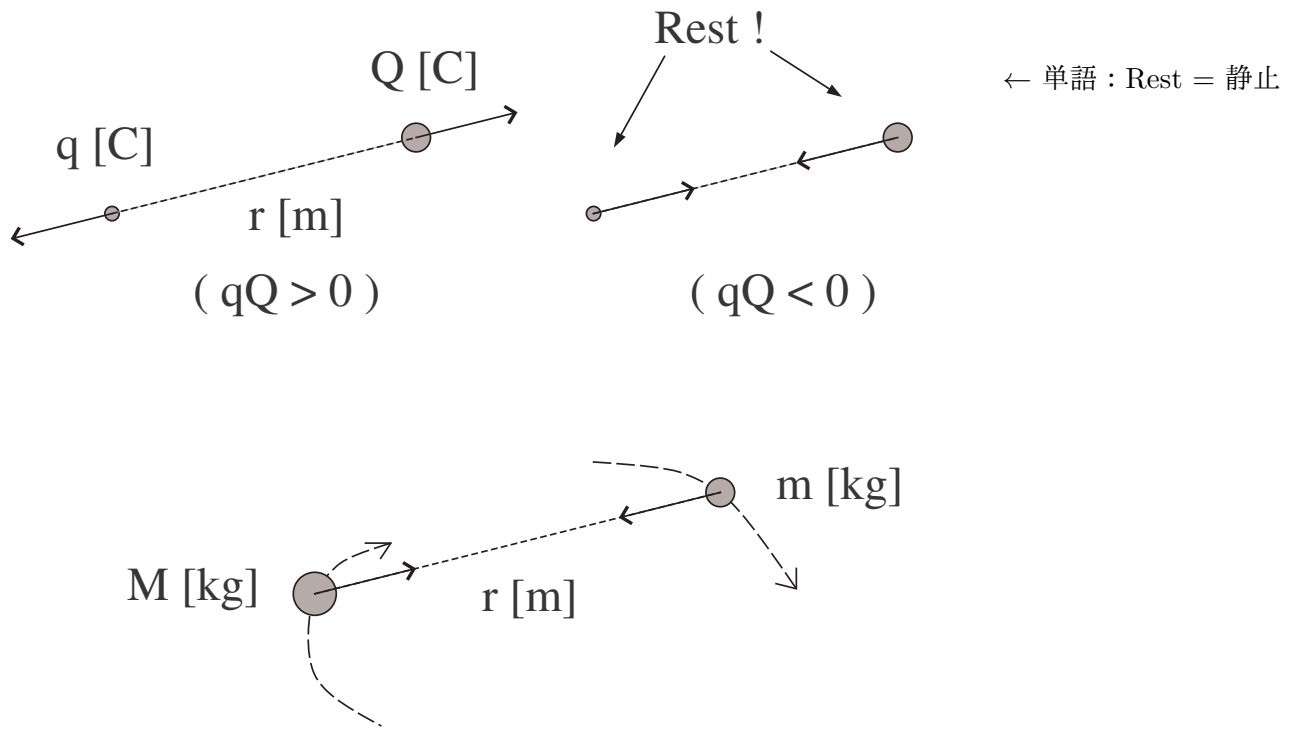


図0.1 : (上側) 荷電粒子が静止している場合の電気力 (クーロンの法則)
 (下側) ニュートン重力

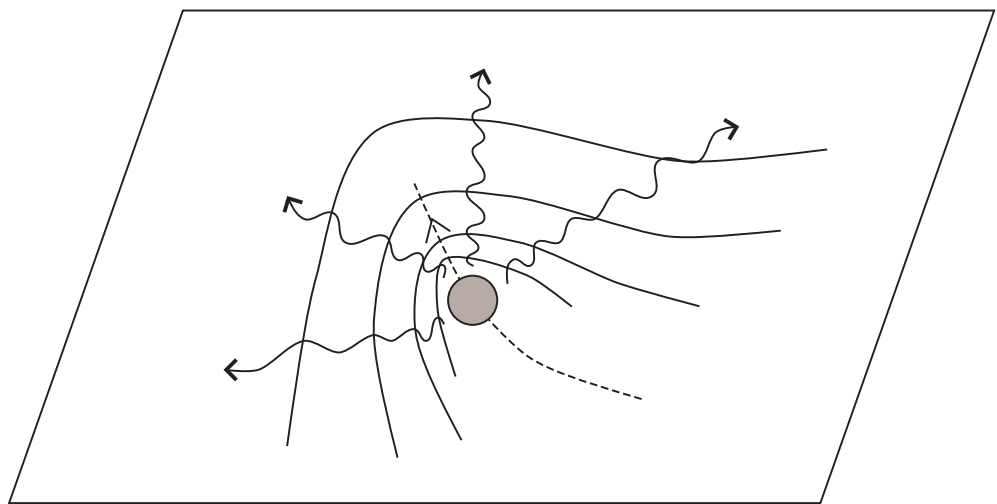


図0.2 : 重力波のイメージ図

モノが運動することで、重力の強弱が伝搬していく。これは、モノが運動したときに生じる、空間そのものの『さざ波』, と思ってもよい。重力波は光と同じ速さで伝わっていく。

§1. 特殊相対論の基本原則, 同時刻の概念

§1.1 導入 (§0のまとめ)

- 離れた物体の間に働く力: $\left\{ \begin{array}{l} \text{電磁気力: 引力と反発力がある} \rightarrow \text{広い範囲を見れば平均的に釣り合っている} \\ \text{重力: 引力しかない} \rightarrow \text{平均的に釣り合うことはない} \end{array} \right.$

→ 宇宙全体 (時間と空間, 銀河の分布, 銀河の形などなど) の発展や性質は主に重力によって決まる。

→ 重力の正確な理論はアインシュタイン重力理論 (一般相対性理論)

重力は4次元時空の曲がり具合 (曲率): $\left\{ \begin{array}{l} \text{インフレーション宇宙・ビッグバン宇宙: 膨張する空間} \\ \text{ブラックホール: 重力が極めて強く, 光すら脱出できない領域} \\ \text{重力波: 重力の強弱 (時空の伸び縮み) が伝搬する現象} \end{array} \right.$

→ 必要な数学は「微分幾何学」

- 一般相対論で 重力がない場合

→ 特殊相対性理論

時間と空間はまとめて「時空」として考えるべき...

→ 特殊相対論の基礎を知る上で必要な数学は「直線の方程式」と「双曲線の方程式」。

- ◇ 宇宙で可能な最高速は光速 (光の伝わる速さ)
- ◇ 人によって時間の進み方が異なる
- ◇ 人によって定規の長さが異なる
- ◇ 質量はエネルギーに変化する ($E = mc^2$)
- ◇ 特殊相対論の運動論的ドップラー効果

あと, ゆっくりでもいいから順を追って考える姿勢と, 出来れば好奇心, があるとよい。

→ このノートでは, 主に特殊相対論の基礎 (具体的には上記5項目) を解説する。

§1.2 準備 (図 1.1)

- 時空図: 時間-空間グラフのこと (“たて軸” に時間, “よこ軸” に空間とする)
 - $t-x$ グラフ (平面的グラフ), $t-x-y$ グラフ (立体的グラフ), $t-x-y-z$ グラフ (4次元グラフ)
- 事象 (世界点): 時空図の中の点 (t, x, y, z) (理論のプロは4次元をイメージしようと頑張る)
- 世界線: 時空図の中の曲線や直線
- 慣性観測者: 加速運動していない (等速直線運動する) 観測者
- 慣性系: 慣性観測者に対する座標系 (t 軸はその観測者の世界線)

補足: ◇ 今後「慣性観測者」という意味で「慣性系」と書くこともある。(短い言葉使いで楽をする。)

◇ ある慣性系 K に対して x 軸方向に速度 v_1 で等速直線運動している慣性系 (慣性観測者) K_1 を考える
→ 「 K の $t-x$ 時空図」の中に K_1 の世界線を描くと, x 軸からの傾きが $\frac{1}{v_1}$ の直線である! - 図 1.1 -
注意: 「 t 軸からの傾き k 」 \Leftrightarrow 「 x 軸からの傾き $1/k$ 」

§1.3 特殊相対論の基本原則: 2つの実験事実 (根本的な理由は知らんが, なぜか正しい事実) (図 1.2)

特殊相対論の基本原則は「特殊相対性原理」と「光速不変の原理」の2つ。

特殊相対性原理: 任意の2つの観測者の間の相対速度は測れる。しかし, どんな観測者でも絶対速度 (空間に対する速度) は測ることはできない。

→ 絶対速度が測れないということは, どんな観測者から見ても (重力がない場合の) 空間には特別な位置や方向がない, という事。

→ つまり, 特別な慣性系はない (物理法則は慣性系によらず普遍) という事。

* なぜこの原理が正しいのかは分からない。理解して覚えるべき**実験事実** (古くはガリレイが起源)。

光速不変の原理: 任意の運動をする光源が発した光を考える。その光の伝わる速さを, どんな 慣性観測者 が測定しても, 同じ値 $c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] である。- 図 1.2 -

* なぜこの原理が正しいのかは分からない。理解して覚えるべき**実験事実** (マイケルソンとモーレーが発見)。

§1.4 光の世界線と同時刻の概念 (図 1.3, 1.4, 1.5)

状況設定: 「速さ」×「時間」＝「距離」に注意 - 図 1.3 -

- ◇ 慣性系 $K(t, x, y, z)$ に対して, 別の慣性系 $K'(t', x', y', z')$ が x 軸方向に速度 v [m/s] で進んでいる。
 $\Leftrightarrow K'$ から見ると, K は x' 軸方向に $-v$ [m/s] で進んでいる。

(以下では, 運動方向と無関係な (y, z) と (y', z') は省略する。)

→ 光も x 軸方向に進むものだけ考えて, $t-x$ 時空図 (K から見た時空) と $t'-x'$ 時空図 (K' から見た時空) で考える。それぞれの原点の事象 O は共通とする: O での座標 $(t_o, x_o) = (0, 0)$, $(t'_o, x'_o) = (0, 0)$

→ それぞれの時空図で:

$$\begin{cases} t' \text{ 軸が慣性観測者 } K' \text{ の世界線:} \\ \text{これは, } t-x \text{ 時空図の中では, } x \text{ 軸からの傾きが } \frac{1}{v} \text{ の直線 } \rightarrow t = \frac{1}{v} x \text{ (} x = vt \text{)} \\ t \text{ 軸が慣性観測者 } K \text{ の世界線:} \\ \text{これは } t'-x' \text{ 時空図の中で, } x' \text{ 軸からの傾きが } -\frac{1}{v} \text{ の直線 } \rightarrow t' = -\frac{1}{v} x' \text{ (} x' = -vt' \text{)} \end{cases}$$

→ 事象 O で x 軸 (x' 軸) の正方向に出した光の世界線は, 光速不変の原理より時間軸からの傾きが不変:

$$\begin{cases} t-x \text{ 時空図の中でみた光の世界線 } L : x \text{ 軸からの傾きが } \frac{1}{c} \text{ の直線 } \rightarrow t = \frac{1}{c} x \text{ (} x = ct \text{)} \\ t'-x' \text{ 時空図の中でみた光の世界線 } L' : x' \text{ 軸からの傾きが } \frac{1}{c} \text{ の直線 } \rightarrow t' = \frac{1}{c} x' \text{ (} x' = ct' \text{)} \end{cases}$$

● 定義: 「同時刻な空間」＝「同じ時間座標の値を持つ事象の集まり」

慣性系 K からみて事象 O と同時刻な空間 - 図 1.4 -

- ◇ 「 K からみて事象 O と同時刻な空間」＝「事象 O での時刻と同じ時間座標の値を持つ事象を集めたもの」
 $\rightarrow t = 0$ の空間になる (事象 O で $t = 0$ なので)
 $\rightarrow K$ からみて事象 O と同時刻な空間は, x 軸である。
 (K からみて任意の時刻 t で同時刻な空間は, x 軸に平行な直線で表わされる。)

- ◇ K からみて事象 O と P が同時刻のとき, $t-x$ 時空図から分かる特徴は ...
 次のような事象 A と B がある:

慣性観測者 K が事象 A で光を出し, その光が事象 P で反射されて, 事象 B で慣性観測者 K に戻る

$\rightarrow t-x$ 時空図 (図 1.4) から, $\triangle OPA \equiv \triangle OPB$ (直角三角形の合同) なので: $OA = OB$

\rightarrow 物理的な意味: 「事象 A から P へ光が進む時間」＝「事象 P から B へ光が戻る時間」

- ◇ K' からみて事象 O と同時刻な空間も, $t'-x'$ 時空図の中で描けば, x' 軸である。→ 以下で使う図 1.5a

慣性系 K' からみて事象 O と同時刻な空間 (x' 軸) を $t-x$ 時空図 (K が見る時空図) の中に描く - 図 1.5 -

- ◇ K' から見て事象 O と同時刻な (x' 軸上の) 事象は無数にある。
 \rightarrow その一つの事象 R の座標 (t_r, x_r) が分かれば, 「事象 O と R を通る直線」が「 K' から見て事象 O と同時刻な空間 (x' 軸)」になる。

- ◇ そのような事象 R は, 次のように見つけられる。

(1) 慣性系 K' で, 図 1.4 と同じ光の反射実験を行う。光の反射の事象が R となる。 - 図 1.5a -

... 図 1.5a は, 『事象 D で発光 \rightarrow 事象 R で反射 \rightarrow 事象 E で受光』となっている。

(2) 上の実験を, 慣性系 K で観測して, 反射の事象 R の座標 (t_r, x_r) を求める。 - 図 1.5b -

\rightarrow この状況設定のイメージは図 1.5b

\rightarrow これを慣性系 K の時空図 ($t-x$ 時空図) の中に描くことで (t_r, x_r) が計算できる。

- 『観測者によって同時刻の空間が異なる』ことの定性的理解：図 1.5c の作図（練習問題）
慣性系 K' の「光の反射実験」を K の時空図の中に描く。手順は次の通り。

- (1) 光 ② を受光する事象 E (t_e, x_e) を適当にとる。定義より、事象 E は t' 軸上にある。
- (2) K の時空図の中でも OE=OD であることに注意して事象 D を決める。
- (3) 事象 D で放射する光 ① の世界線を図 1.5c に描く。光速不変の原理に注意して作図。
- (4) 事象 E で受け取る光 ② の世界線を図 1.5c に描く。光速不変の原理に注意して作図。
- (5) 光 ① と ② の交点が事象 R である。

事象 R が x 軸上にない、つまり x' 軸（事象 O と R を通る直線）が x 軸と異なることが分かる。
→ この状況をまとめた図が、図 1.5d である。

- 『観測者によって同時刻の空間が異なる』ことの定量的理解：慣性系 K の時空図の中で x' 軸を表す方程式

◇ 上で作図した図 1.5c から、慣性系 K で測る事象 R の座標 (t_r, x_r) を、事象 E の時間 t_e で表す。

慣性観測者 K' が光を受け取る事象 E (t_e, x_e) は K' の世界線上にあるので： $x_e = vt_e$

よって、OD=OE より、事象 D の座標 (t_d, x_d) は：
$$\begin{cases} t_d = -t_e \\ x_d = -x_e = -vt_e \end{cases}$$

事象 D と E の座標が分かった（全ての座標成分が測定値 t_e で表された）ので、直線の方程式は：

$$\begin{cases} \text{事象 D を通って x 軸の正方向に進む光 ① の世界線の方程式：} & t = \frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e - t_e \\ \text{事象 E を通って x 軸の負方向に進む光 ② の世界線の方程式：} & t = -\frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e + t_e \end{cases} \quad (\text{補足 1 を参照})$$

よって、光 ① と光 ② の交点が事象 R なので、R の座標は：
$$\begin{cases} t_r = \frac{v}{c}t_e \\ x_r = ct_e \end{cases} \quad (\text{補足 2 を参照})$$

- ◇ t-x 時空図の中に描く「慣性系 K' から見て事象 O と同時刻な空間 (x' 軸)」

→ 事象 O と R を通る直線が、慣性系 K' から見て事象 O に同時刻な空間 (x' 軸)！

$$t\text{-}x \text{ 時空図の中での } x' \text{ 軸を表わす方程式：} t = \frac{t_r}{x_r}x \rightarrow t = \frac{v}{c^2}x \quad \text{————— (1.1)}$$

→ x 軸 ($t = 0$) と x' 軸 ($t = \frac{v}{c^2}x$) は明らかに異なる！

どの事象が同時刻になるかは、観測者の速度によって異なる！

↑

この宇宙に存在するあらゆるものは、それぞれが様々な瞬間を経験している。そして、同一の物体を異なる速度で運動する観測者が観測すると、「その物体が経験するどの瞬間」を「自分のどの瞬間（例えば時刻 0）」と同時刻だと認識するのかが、観測者によって異なるのである。別の言い方をすると、「ある物体 A が経験するどの瞬間」と「別の物体 B が経験するどの瞬間」が同時刻だと認識するのかが、観測者の速度によって異なるのである。

- 以上の同時刻の考察からも分かるように、特殊相対性理論は「重力がない場合の時間と空間（時空）の性質に関する理論」であることが分かる。そして、時空の中を運動する物体の振る舞いも、時空の性質によって決まることが、特殊相対論によって導き出される。（例えば、§1.1 に挙げた 5 つの例。）

◇ 補足 1 : 光 ② の世界線の方程式を立てる

分かっている条件 : $\begin{cases} (x \text{ 軸からの) 傾きが } -\frac{1}{c} & (\text{光 ① を考えるときは } 1/c \text{ にする。}) \\ \text{直線が通る点 (事象) E の座標 } (t_e, vt_e) & (\text{光 ① を考えるときは D を使う。}) \end{cases}$

傾きが $-\frac{1}{c}$ なので, 光 ② の世界線の方程式を次のようにおける : $t = -\frac{1}{c}x + a$ (a は定数)

これが事象 E を通るので, $t_e = -\frac{1}{c}vt_e + a \iff a = \frac{v}{c}t_e + t_e$

よって, 光 ② の世界線の方程式 : $t = -\frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e + t_e$

また, 光 ① の世界線の方程式も同様に求められる。自分で求めてみよ。

◇ 補足 2 : 事象 R の座標を求める

次の連立方程式を解けばよい : $\begin{cases} \text{光 ① の世界線} : t = \frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e - t_e & \text{---(1A.1)} \\ \text{光 ② の世界線} : t = -\frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e + t_e & \text{---(1A.2)} \end{cases}$

両方の式から, $(t =) \frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e - t_e = -\frac{1}{c}x + \frac{v}{c}t_e + t_e \iff \frac{2}{c}x = 2t_e$

この両辺を $\frac{c}{2}$ 倍して, $x = ct_e$

これを式 (1A.1) に代入して,

$$t = \frac{1}{c} \cdot ct_e + \frac{v}{c}t_e - t_e = \frac{v}{c}t_e$$

よって, 事象 R $\left(\frac{v}{c}t_e, ct_e\right)$... (t, x) の座標の順番に注意

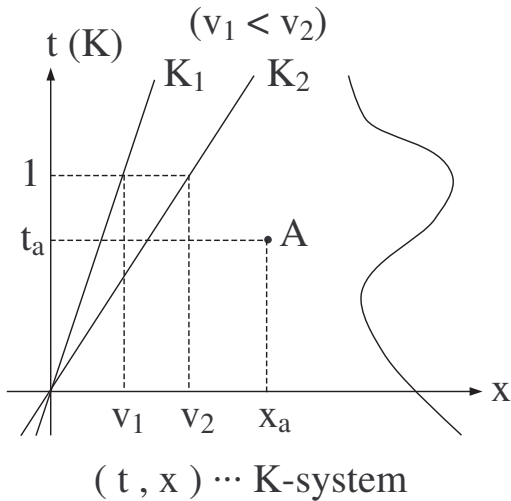
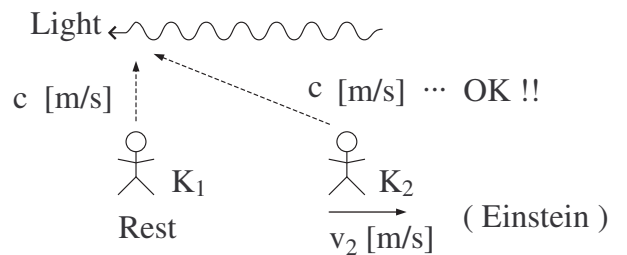
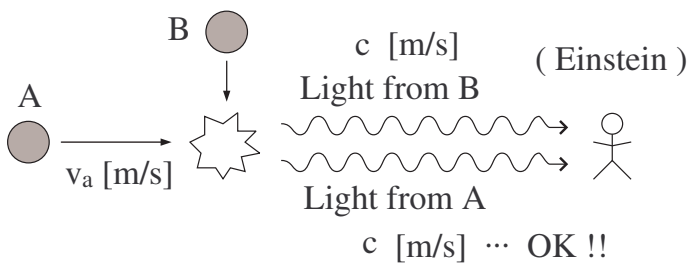
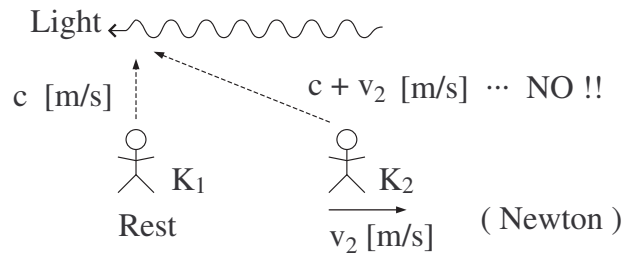
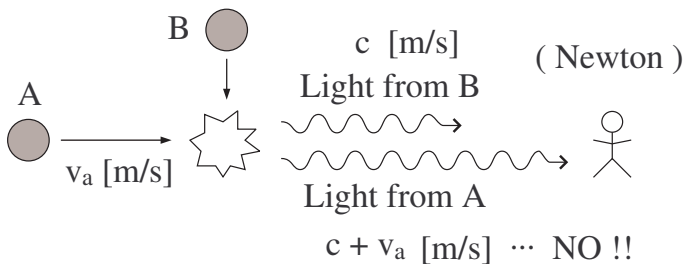


図 1.1 : 時空図の基本事項

専門用語の英語 system (= 系) は「考察対象」というニュアンスである。K-system を辞書的に訳せば「系 K」だが、この図では「慣性観測者 K から見た時空図 (つまり慣性系 K)」という意味で使っている。慣性観測者 K から見た状況を考えよう、ということである。

記号の使い方や座標の書き方の注意点

- x_a や K_1 は、2文字をまとめて一つの記号として使っている。(右下の小さな数字や文字は「添え字」という。) 例えば、 x_a は事象 A の x 座標の値を代入する記号である (例: $x_a = 3$)。また、 K_1 はある慣性観測者の名前である。
- 相対性理論のプロは習慣的に「時間の t 軸をたて軸」「空間の x 軸をよこ軸」に書いている。また、座標の書き方も (t, x) のように、
(たて軸の時間座標の値, よこ軸の空間座標の値)
という順番で書く習慣がある。この授業でも、敢えてプロの習慣に従って書いていく。



光源の運動によらない c の不変性

慣性観測者の選び方によらない c の不変性

図 1.2



• ニュートン (Newton) は 17 世紀 (日本の江戸時代) に高校でも習う力学を完成させた天才。ニュートン力学 (物体の運動に関する理論) は、特殊相対論に対して「光速が無量大」という近似をすると (特殊相対論の近似理論として) 導かれる。ニュートン重力 (重力に関する理論) は、一般相対論に対して「光速が無量大」かつ「重力は非常に弱い」という近似をすると (一般相対論の近似理論として) 導かれる。

• アインシュタイン (Einstein) は 20 世紀に相対性理論を作った天才。当時最新の実験結果とマクスウェルの電磁気学理論を基に「光速不変の原理」という着想を得たらしい。そして、ニュートンの理論を修正して相対論を作り上げた。

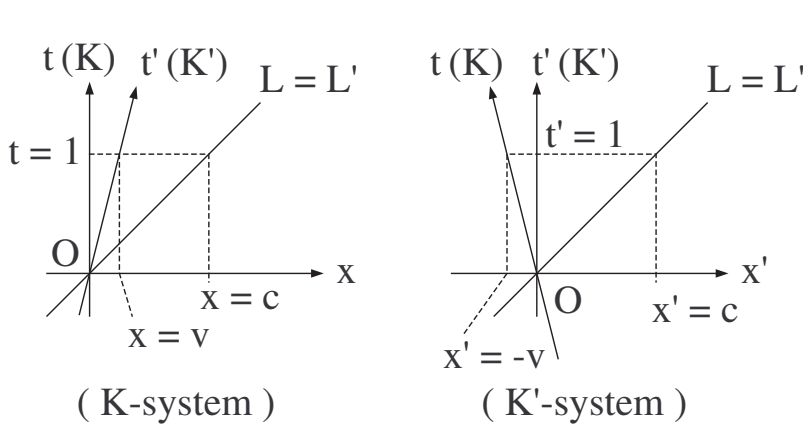


図 1.3 : 光速不変の原理に注意

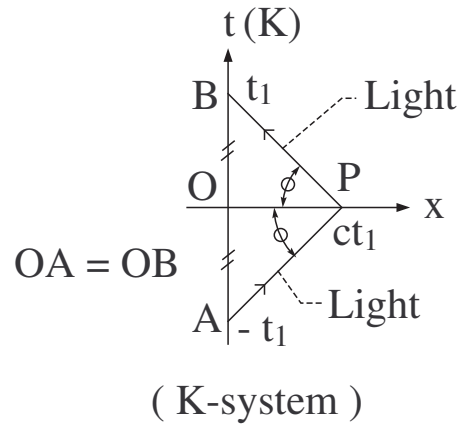


図 1.4 : 「同時刻」 の特徴の一つ

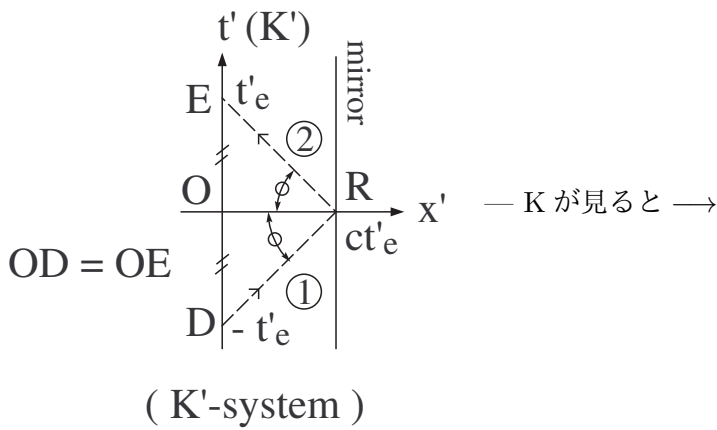


図 1.5a : 慣性系 K' で行う光の反射実験
事象 O と R が、K' の同時刻

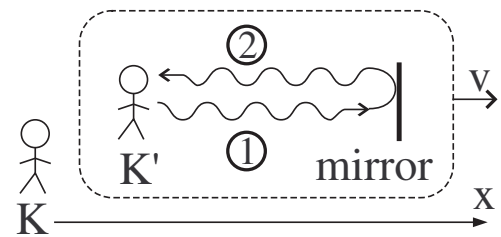


図 1.5b : 慣性系 K で、K' の反射実験を観測

↓ 練習問題 : K の時空図に光 ①, ② を描け

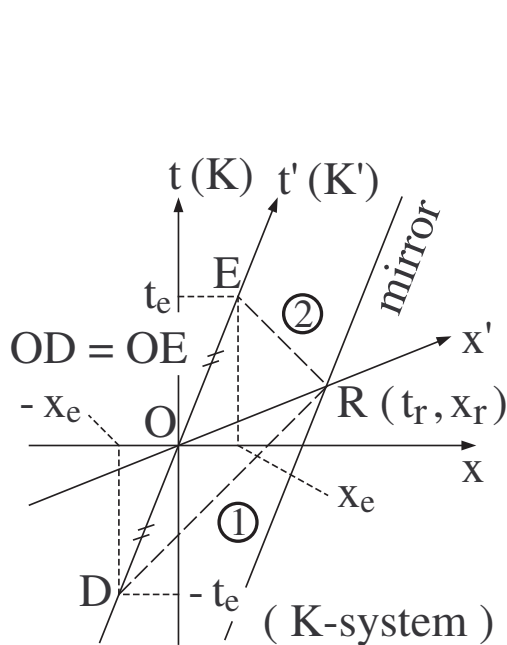


図 1.5d : 慣性系 K' の光反射実験を
K で見た場合のまとめ

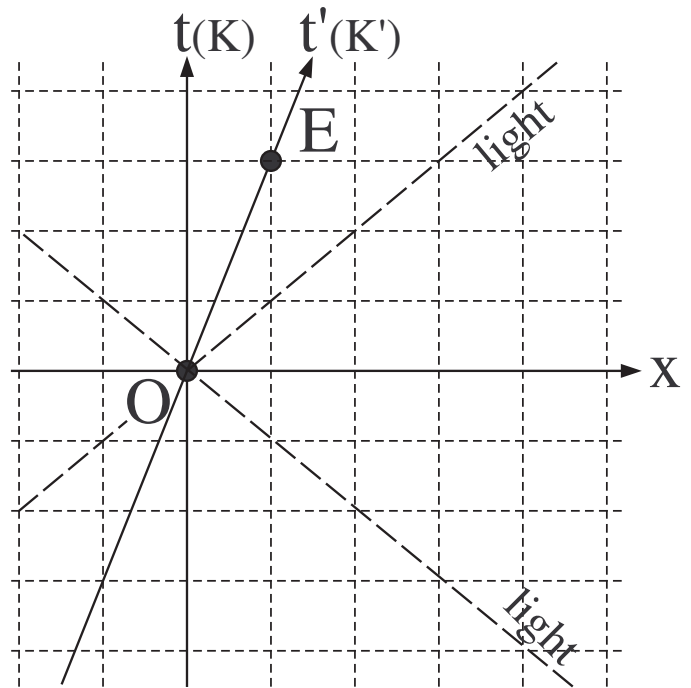


図 1.5c : 慣性系 K の時空図に描いた光 ①, ②

注意点: { K の時空図においても $OD=OE$
光速不変の原理

§2. 『距離』の概念の重要性

§2.1 ニュートン力学 (高校物理でも学習する力学) における空間と距離 (図 2.1, 2.2)

- ニュートン力学 (高校物理でも学習する力学) の枠組みでは、どの観測者からみても同時刻の空間は同じ!

→ ニュートン力学では、時間と空間を完全に区別して扱う。

→ ニュートン力学の空間内での距離がどういうものか、この §2.1 でまとめる。

* 補足：力学とは『物体はどんな条件でどんな運動をするのか』を記述する理論。

- 例：二次元の空間 (平面) で、 x - y 座標と x' - y' 座標を考える

ただし、共に“直交座標”で、原点は共通 (→ 軸の向きが違う) とする。

このとき、ある2点 (点 A, 点 B) の位置を指定する座標成分は、

$$\text{点 A の座標成分} : \begin{cases} x\text{-}y \text{ 座標} : (x_a, y_a) \\ x'\text{-}y' \text{ 座標} : (x'_a, y'_a) \end{cases}, \quad \text{点 B の座標成分} : \begin{cases} x\text{-}y \text{ 座標} : (x_b, y_b) \\ x'\text{-}y' \text{ 座標} : (x'_b, y'_b) \end{cases} \quad \text{— 図 2.1 —}$$

→ x - y 座標と x' - y' 座標が、図 1 のように描けて、重要な性質が読み取れる：

ニュートン力学の空間における距離の性質：2点 A, B の間の距離 r [m] は、 x - y 座標で測っても、 x' - y' 座標で測っても、等しい値になる。

- ニュートン力学の空間における距離 r [m] の定義 (ピタゴラスの定理)

$$r^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = (x'_a - x'_b)^2 + (y'_a - y'_b)^2 \quad \text{— (2.1) —}$$

→ 距離がこのように (ピタゴラス定理で) 決まる空間を **ユークリッド空間** と呼ぶ。

(ニュートン力学の空間は3次元ユークリッド空間である。)

- 問題：どうやって座標軸に目盛りを付けるか？

座標軸の目盛り付け：原点からの距離が一定な曲線 (曲面) を考えれば、座標軸上に目盛りを付けられる。

→ 例：上の例の2次元平面 (2次元ユークリッド空間) で、それぞれの座標軸に目盛りを付ける。

距離の定義 (2.1) より、ユークリッド空間では円を考えればよいことが分かる：

$$r^2 = \begin{cases} x^2 + y^2 & : x\text{-}y \text{ 座標で半径 } r \text{ の円} \\ x'^2 + y'^2 & : x'\text{-}y' \text{ 座標で半径 } r \text{ の円} \end{cases} \quad \text{— 図 2.2 —}$$

→ 円と軸 (x 軸, y 軸, x' 軸, y' 軸) の交点 r が、その軸上での目盛り $\pm r$ の位置を示す。

* 補足：「円」という曲線を表わす方程式

x - y 平面上で、原点を中心として半径 r の円を考える。この円周上の任意の点の座標を (x, y) とすると、その点と原点の間の距離が r なので、ピタゴラス定理から次の式を得る：

$$\text{円の方程式} : x^2 + y^2 = r^2$$

円周上の任意の点についてこの式が成立するので、これは x - y 平面上の円を表わす方程式である。

- ニュートン力学の時間と空間に関するポイント (まとめ)

ニュートン力学における同時刻な空間は、あらゆる観測者に対して共通である。つまり、時間と空間の区別は観測者によらず共通である (時間と空間を別々に扱ってよい)。よって、距離は、時間座標を含まず空間座標だけで決められる (定義 (2.1) を考えれば十分)。

→ では、同時刻の空間が観測者によって異なっている特殊相対論での「距離」はどうか???

§2.2 特殊相対論での時間と空間では？ (図 2.3, 2.4)

● §1.4 で分かったように、特殊相対論では観測者によって同時刻の空間が異なる。

→ 時間と空間を完全には区別できない！ そこで、特殊相対論では次のように考える：

この世界 (宇宙) は互いに直交する 4 つの座標軸 (t - x - y - z 軸) を設定できる 4 次元時空である

→ 4 次元時空の中での「距離」は、2 つの事象 (例えば事象 P, Q) の間の「時空距離」であり、それが次の性質を満たすことを要請する (「ニュートン力学における距離の性質」の拡張版)： - 図 2.3 -

特殊相対論における時空距離の性質：2 つの事象 P, Q の間の時空距離 s [m] は、どんな慣性観測者が測っても (観測者 K の t - x - y - z 時空図で測っても、別の観測者 K' の t' - x' - y' - z' 時空図で測っても) 等しい値になる。

以下では y, z を省略して、 (t, x) の『2 次元時空』を考えてイメージを簡単化する。

● 図 2.3 を見るときの注意点：

t [s] と x [m] の単位が違うので、 t - x 時空図の中で時空距離 s [m] を表せない。(t' - x' 時空図でも同様。)

→ これに対処するための発想：

時間軸の単位を便宜的に [m] にするように、速度の単位をもつ適切な定数を t に掛けたものを考えよう！

→ 光速不変の原理より、光速 c [m/s] を使うのが適切

→ t 軸の代わりに ct 軸を時間軸 (たて軸) にして ct - x 時空図 を描く！

● 特殊相対論の時空は、ユークリッド的ではない - 図 2.4 -

→ このことの証明の戦略：

特殊相対論の時空がユークリッド的だと仮定した結果、矛盾が生じることを示す。矛盾が生じるということは、最初の仮定 (時空がユークリッド空間であるという仮定) が間違っていることになる。

* 補足：このように『ある仮定から矛盾が生じることを示すことで、そもそもの仮定が間違っていることを示す』という論法を『背理法』と言う。

◇ 背理法による証明

特殊相対論の時空もユークリッド的であると仮定する。

この仮定に従って座標軸 (ct 軸, x 軸, ct' 軸, x' 軸) に目盛りをつけてみる。

式 (2.1) の (x, y) を (ct, x) , (ct', x') に置き換えて：

$$\text{時空距離の 2 乗} : s^2 = \begin{cases} (ct)^2 + x^2 & : ct-x \text{ 時空図で半径 } s \text{ の円} \\ (ct')^2 + x'^2 & : ct'-x' \text{ 時空図で半径 } s \text{ の円} \end{cases} \quad \text{- 図 2.4 (左側) -}$$

→ 円と座標軸の交点が、その軸上での目盛り $\pm s$ の位置を示す。

次に、図 2.4 のように、この円上の事象 D に注目する。

○ 図 2.4 (左側) から分かる事実：

$$\begin{cases} ct-x \text{ 時空図で見た, 事象 D の } x \text{ 座標} & : x_d < s \\ ct'-x' \text{ 時空図で見た, 事象 D の } x' \text{ 座標} & : \underline{x'_d < s} \end{cases}$$

○ 図 2.4 (右側) から分かる事実： ct - x 時空図に ct' 軸と x' 軸を描き、D の x' 座標を読み取ると $x'_d > s$

この 2 つの事実は矛盾する！

よって、最初の仮定が間違えであり、特殊相対論の時空はユークリッド的でないことが証明できた。

● 生じる疑問 (§3 の内容)：特殊相対論の時空はどんな時空か？

→ 言い換えれば：特殊相対論の時空距離は式 (2.1) の代わりにどんな式で計算すべきか？

Newton : Euclid Space

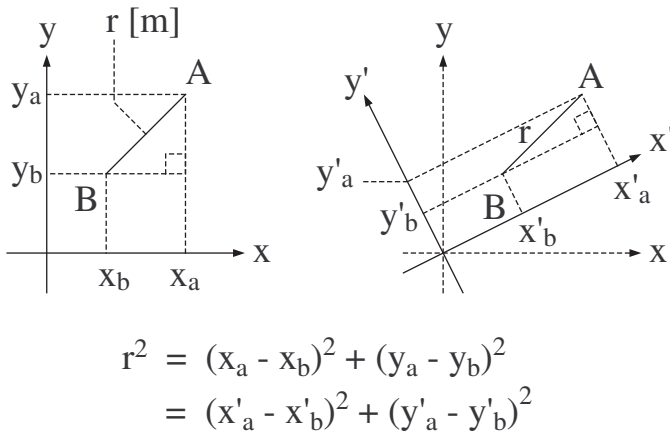


図 2.1 : ニュートン力学の空間はユークリッド空間
単語 Euclid Space = ユークリッド空間

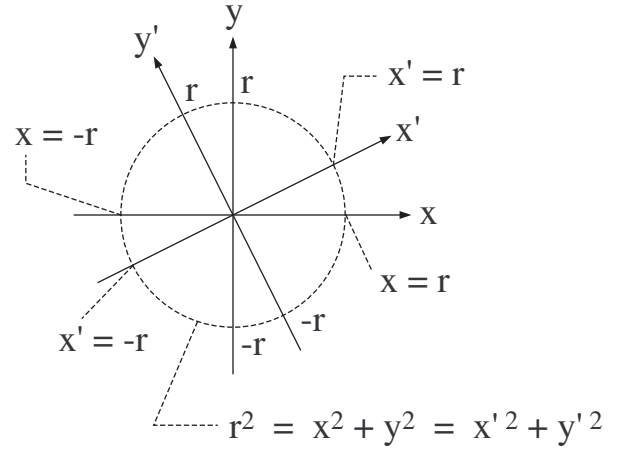


図 2.2 : ユークリッド空間での座標軸の目盛つけ

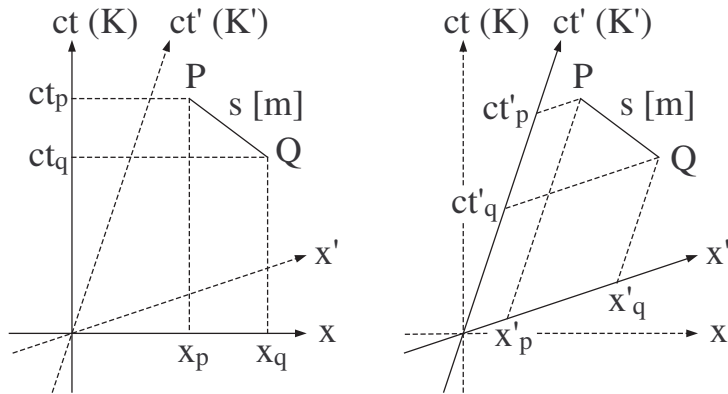


図 2.3 : たて軸を ct [m] (ct' [m]) で表わす時空図

座標を読み取る時の注意点
ある点 (事象) の座標は、『その点 (事象) を通って座標軸に平行な直線』を使って読み取る。図 2.1 で (x', y') 座標を読み取るときと、図 2.3 で (ct', x') 座標を読み取るときに、どんな直線を描いて座標を読み取っているかに注意。

時間軸と空間軸を表わす直線の方程式
§1.4 の結果から、慣性系 K の $ct-x$ 時空図の中に、別の慣性系 K' の t' 軸と x' 軸がどう描かれるかに注意。慣性観測者 K に対する K' の速度を v とすると、次のようになる：

- t' 軸の方程式： $t = \frac{1}{v}x \rightarrow \underline{\underline{ct = \frac{c}{v}x}}$
→ $ct-x$ 時空図の中で、
x 軸からの傾きが $\frac{c}{v}$ の直線
- x' 軸の方程式： $t = \frac{v}{c^2}x \rightarrow \underline{\underline{ct = \frac{v}{c}x}}$
→ $ct-x$ 時空図の中で、
x 軸からの傾きが $\frac{v}{c}$ の直線

補足： $ct-x$ 時空図の中で、 x' 軸の傾きは ct' 軸の傾きの逆数である。

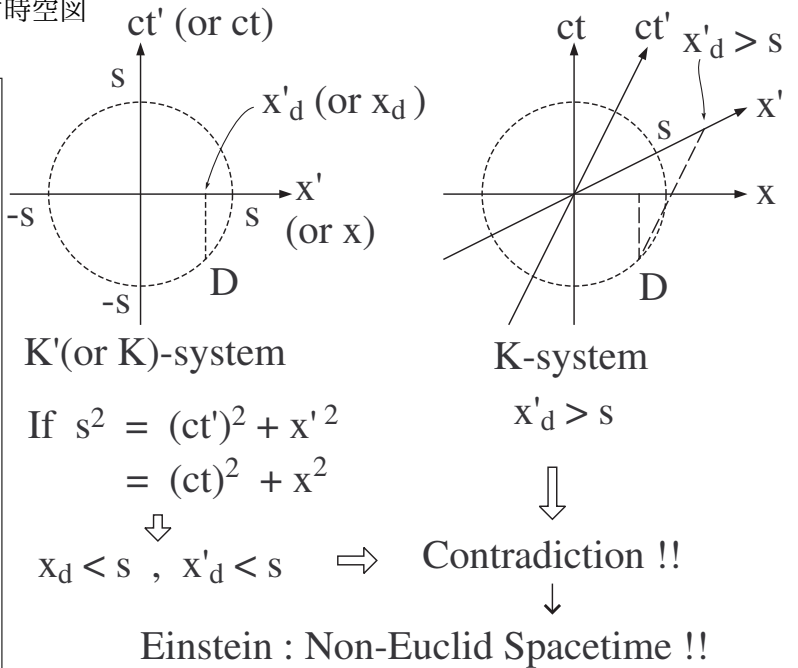
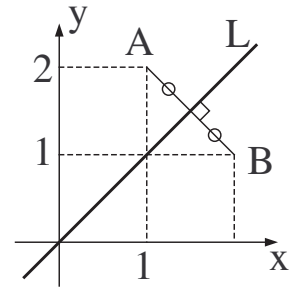


図 2.4 : 特殊相対論の時空はユークリッド的でない

単語 { Contradiction = 矛盾
Spacetime = 時空
Non-Euclid Spacetime = 非ユークリッド時空

問題

x - y 平面上の, $\left\{ \begin{array}{l} \text{原点を} \text{通} \text{って, } x \text{ 軸からの傾きが} 1 \text{ の直線 (の名前) を } L \text{ とする。} \\ \text{原点を} \text{通} \text{って, } x \text{ 軸からの傾きが} 2 \text{ の直線 (の名前) を } S \text{ とする。} \end{array} \right.$



(a) 直線 S は, 原点 $O(0, 0)$ と点 $A(1, 2)$ を通る直線である。そして, 点 A を直線 L に関して折り返した位置にある点 B は右図のような作図で得られる。点 B の座標を答えよ。(これを『点 A と点 B は, 直線 L に関して対称な位置の点である』と表現する。)

(b) 原点 $O(0, 0)$ と点 B を通る直線 (の名前) を T とする。直線 T の方程式を答えよ。そして, 直線 T の傾きは直線 S の傾きの逆数になることを確認せよ。

(c) 3つの直線 S, T, L を作図し, 点 A, B の位置も示せ。そして, 直線 S と T は, 直線 L に関して折り返すと重なるような直線であることを確かめよ。(これを『直線 S と直線 T は, 直線 L に関して対称になっている』と表現する。)

* 以上から, 『傾き 1 の直線に関して対称になっている 2 つの直線について, それぞれの傾きを k_1, k_2 とすると $k_1 k_2 = 1$ である』ことが分かる。

* ct - x 時空図で原点を通る光の世界線を表す方程式は $ct = x$ となる。これは ct - x 時空図の中で傾き 1 の直線である。従って, 図 2.3 の補足にまとめた ct' 軸と x' 軸を表す方程式 (の傾き) を見れば, 『 ct - x 時空図の中で, ct' 軸と x' 軸は光の世界線に関して対称になっている』ことが分かる。

§3. 特殊相対論の時空：ミンコフスキー時空

§3.1 光の世界線から得る示唆

慣性系 K' が、慣性系 K (ct, x) の x 軸方向に速度 v で慣性運動している場合を考える。

→ x 軸方向に進む光の世界線：
$$\begin{cases} K \text{ で見て} : ct = \pm x \\ K' \text{ で見て} : ct' = \pm x' \end{cases} \quad (\text{光速不変の原理より, どの慣性系で見ても光速は } c.)$$

→ 光の世界線の特徴： $-(ct)^2 + x^2 = -(ct')^2 + x'^2 = 0$

→ 光の世界線に対して『 $-(ct)^2 + x^2$ 』という量は どの慣性系で測っても同じ値 ゼロ, $-(ct)^2 + x^2 = 0$ 。

→ 特殊相対論の時空において『 $-(ct)^2 + x^2$ 』という量は, どんな慣性系で見ても同じ値になりそうだと推測 できる。光の場合, その値がたまたまゼロである, と理解する。

→ §2.2 の「時空距離の性質」から, 時空距離の計算式は『 $-(ct)^2 + x^2$ 』だと推測できる!

§3.2 特殊相対論の時空距離 (の 2 乗) (図 3.1)

● 特殊相対論の時空の「距離」の計算式をまとめる (これで正しいという証明は付録 3.1 にある):

特殊相対論の時空距離：慣性系 K の座標を (ct, x) とする。 c [m/s] は光速である。

慣性系 K から見た $\begin{cases} \text{事象 P の座標} : (ct_p, x_p) \\ \text{事象 Q の座標} : (ct_q, x_q) \end{cases}$ とすると, 事象 P と Q の間の時空距離 s [m]

(の 2 乗 s^2) は次の式で与えられる,

$$s^2 = -(ct_p - ct_q)^2 + (x_p - x_q)^2 \quad \text{---(3.1)}$$

この s の値はどんな慣性系で測っても同じである (§2.2 の性質を持つということ)。 - 図 3.1 -

→ 式 (3.1) で距離 s が測れる時空をミンコフスキー時空という。特殊相対論に合致する時空はミンコフスキー時空である。

● y - z 座標も含めて 4 次元 (ct, x, y, z) で考えると, 事象 P と Q の間の時空距離は,

$$\text{4次元ミンコフスキー時空距離} : s^2 = -(ct_p - ct_q)^2 + (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2$$

である。空間部分 $(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2$ だけ見るとユークリッド空間に見えるが, 時間方向まで含めるとユークリッド的ではない。これは相対論を理解する要点の一つである。

● 式 (3.1) の第 1 項が負の値であることに注意: s^2 は正, ゼロ, そして負の値を取り得る !!

● 距離の 2 乗が負 $s^2 < 0$ になる場合もある, とはどういうことか?

例えば, $s^2 = -9$ のとき, $s = 3\sqrt{-1}$ と表現する。($i = \sqrt{-1}$ として, $s = 3i$ と短く書く場合も多い。)

この $\sqrt{-1}$ を虚数単位 (Imaginary unit) と言い, この実数倍 (例えば $3\sqrt{-1}$) を虚数 (Imaginary number) と言う。虚数単位は 2 乗して -1 になるような想像上の数である。数学としては, 既に良く知っている「実数」と新たに導入した「虚数」が互いに矛盾せず共存できれば, 何の問題もない。(数学とはそういうものだと思ってよいだろう。数学は無矛盾に論理展開できることを追求する学問だといえる。)

→ 時空距離の 2 乗 s^2 が負になる場合があるということは,

時空の距離は実数だけでなく虚数も使って表現すべきものだ

ということである。

* 補足: 英単語「imaginary」=「想像上の」... Imaginary number は虚数 (空虚な数?) でなく想像数などと訳す方が適切だと思うが, 既に専門用語として虚数という日本語が定着してしまった。

§3.3 例題（時空図，時空距離，双曲線）（図 3.2, 3.3, 3.4）

(a) 図 3.2 の時空図に示す事象 A について，次のような座標を読み取れ。

a-1) 慣性系 K で見た座標 (ct_a, x_a) の値

a-2) 慣性系 K' で見た座標 (ct'_a, x'_a) の値

• 問い (a) の答え

a-1) 図 3.2（左側）のような「ct 軸と x 軸に平行な線で作る，正方形の格子」に沿って座標を読み取って，

$$\underline{A (ct_a, x_a) = (6, 4)}$$

a-2) 図 3.2（右側）のような「ct' 軸と x' 軸に平行な線で作る，ひし形の格子」に沿って座標を読み取って，

$$\underline{A (ct'_a, x'_a) = \left(5 - \frac{1}{3}, 2\right) = \left(\frac{14}{3}, 2\right)}$$

(b) 図 3.3 の事象 B, C, D, E, F に注目する。事象 O は時空図の原点であり，目盛の単位は [m] である。

b-1) 事象 O を通って x 軸の正方向に進む光の世界線と，x 軸の負方向に進む光の世界線が，図 3.3 の斜めの直線であることを確かめよ。

b-2) 事象 OB 間，OC 間，OD 間，OE 間，OF 間の時空距離の 2 乗 $s_{ob}^2, s_{oc}^2, s_{od}^2, s_{oe}^2, s_{of}^2$ を求めよ。

b-3) 事象 FC 間の時空距離の 2 乗 s_{fc}^2 を求めよ。

• 問い (b) の答え

b-1) 原点 O を通って $\begin{cases} \text{x 軸の正方向に進む光} & : ct = x \\ \text{x 軸の負方向に進む光} & : ct = -x \end{cases}$ の直線を作図すれば確かめられる。

b-2) 式 (3.1) に適切に事象の座標を代入すればよい。（ただし，今の問題では y 座標と z 座標は無視する。）

$$\underline{s_{ob}^2 = -0^2 + 5^2 = 25 \text{ [m}^2\text{]}}$$

$$\underline{s_{oc}^2 = -4^2 + 4^2 = 0 \text{ [m}^2\text{]}}$$

$$\underline{s_{od}^2 = -5^2 + 0^2 = -25 \text{ [m}^2\text{]}}$$

$$\underline{s_{oe}^2 = -1^2 + 3^2 = 8 \text{ [m}^2\text{]}}$$

$$\underline{s_{of}^2 = -7^2 + 3^2 = -40 \text{ [m}^2\text{]}}$$

b-3) $\underline{s_{fc}^2 = -(7-4)^2 + (3-4)^2 = -8 \text{ [m}^2\text{]}}$

補足 1 : x 軸上の事象 B について $s_{ob}^2 = 25 > 0$ （原点 O からの距離の 2 乗が正）である。また，b-1) の光の世界線よりも下（過去側）にある事象 E についても $s_{oe}^2 = 8 > 0$ （原点 O からの距離の 2 乗が正）である。光よりも過去側（空間軸方向）に離れた 2 事象の間の時空距離の 2 乗は正になる。

補足 2 : 事象 O と C は光の世界線につながっている。それらの時空距離 $s_{oc} = 0$ であることも分かる。つまり，光の世界線に沿って測る時空上の距離はゼロなのである！ たとえ時空上で離れた 2 事象であっても，それらが（一本の）光の世界線で結ばれる場合，その 2 事象の間の時空距離はゼロである。

補足 3 : ct 軸上の事象 D について $s_{od}^2 = -25 < 0$ （原点 O からの時空距離の 2 乗が負）である。また，b-1) の光の世界線よりも上（未来側）にある事象 F についても $s_{of}^2 = -40 < 0$ である。光よりも未来側（時間軸方向）に離れた 2 事象の間の時空距離の 2 乗は負になる。これは，その（マイナスの s^2 の平方根で）時空距離が虚数（Imaginary number = 想像上の数）であることを意味する。目に見えない時間軸方向の距離を上手く想像（Imagine）しよう，ということである。

(c) 数学の補足問題： x - y 平面上で、次の関係式で決まる座標 (x, y) の点を繋いで描かれる曲線を双曲線と言う：

$$\text{双曲線： } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \quad (a, b, k \text{ は定数})$$

c-1) $a = b = 1, k = -1$ の場合を考える： $x^2 - y^2 = -1$ ——(3.2)

$x = -2, -1, 0, 1, 2$ での y の値をそれぞれ求めよ。

c-2) x - y 平面に c-1) で求めた点 x - y 平面に記入し、これらを適切に曲線で結んで式 (3.2) の双曲線を描け。

c-3) $a = b = 1, k = 1$ の場合を考える： $x^2 - y^2 = 1$ ——(3.3)

$y = -2, -1, 0, 1, 2$ での x の値をそれぞれ求めよ。

c-4) x - y 平面に c-3) で求めた点を記入し、これらを適切に曲線で結んで式 (3.3) の双曲線を描け。

c-5) 問い c-2) と c-4) で描いたグラフに、さらに次の2つの直線も描け： $y = x$, $y = -x$

● 問い (c) の答え

c-1) 式 (3.2) より、 $y^2 = x^2 + 1 \implies y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$ ——(3.4)

(x の一つの値に対して、二つの y の値 $\sqrt{x^2 + 1}$ と $-\sqrt{x^2 + 1}$ が対応している。)

よって、 $x = -2$ で $y = \pm\sqrt{5}$, $x = -1$ で $y = \pm\sqrt{2}$, $x = 0$ で $y = \pm 1$

$$\underline{x = 1 \text{ で } y = \pm\sqrt{2} \text{ , } x = 2 \text{ で } y = \pm\sqrt{5}}$$

c-2) x - y 平面に記入する点は次の10点： $(-2, \sqrt{5})$, $(-2, -\sqrt{5})$, $(-1, \sqrt{2})$, $(-1, -\sqrt{2})$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, \sqrt{2})$, $(1, -\sqrt{2})$, $(2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$

式 (3.4) より、 x^2 が0以上のとき (x が実数のとき) $y \leq -1$ または $1 \leq y$ となることに注意して、適切に点を結んで曲線を描くと図4のようになる。

c-3) 式 (3.3) より、 $x^2 = y^2 + 1 \implies x = \pm\sqrt{y^2 + 1}$ ——(3.5)

よって、 $y = -2$ で $x = \pm\sqrt{5}$, $y = -1$ で $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$ で $x = \pm 1$

$$\underline{y = 1 \text{ で } x = \pm\sqrt{2} \text{ , } y = 2 \text{ で } x = \pm\sqrt{5}}$$

c-4) x - y 平面に記入する点は次の10点： $(\sqrt{5}, -2)$, $(-\sqrt{5}, -2)$, $(\sqrt{2}, -1)$, $(-\sqrt{2}, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{5}, 2)$, $(-\sqrt{5}, 2)$

式 (3.5) より、 y^2 が0以上のとき (y が実数のとき) $x \leq -1$ または $1 \leq x$ となることに注意して、適切に点を結んで曲線を描くと図4のようになる。

c-5) 図3.4のようになる。

補足4：問い (c) で、次のような変数の置き換えを考えてみる： $y \rightarrow ct$ (y を ct とする)

この置き換えによって、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{式 (3.2) は、} -(ct)^2 + x^2 = -1 \quad : \text{特殊相対論で時空距離 } s^2 = -1 \text{ の場合} \\ \text{式 (3.3) は、} -(ct)^2 + x^2 = 1 \quad : \text{特殊相対論で時空距離 } s^2 = 1 \text{ の場合} \end{array} \right.$

となる。よって、特殊相対論の時空距離の2乗 (式 (3.1)) が一定な場合 (例えば $-(ct)^2 + x^2 = 1$) を考えると、時空図上に双曲線が現れることが分かる。

さらに、変数の置き換えで、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{問い c-5) の直線 } y = x \text{ は、} ct = x \quad : \text{時空図で } x \text{ 軸の正方向に進む光} \\ \text{問い c-5) の直線 } y = -x \text{ は、} ct = -x \quad : \text{時空図で } x \text{ 軸の負方向に進む光} \end{array} \right.$

となる。よって、時空距離の2乗が一定の双曲線 (例えば双曲線 $-(ct)^2 + x^2 = 1$) に沿って ct や x を大きくしていくと、その双曲線は光の世界線にどんどん近づく (しかし接触することはない) と分かる。(このように、接触はしないがどんどん近づいていくことを、漸近する、という。)

証明のポイント : - 図 3.5 -

式 (3.1) の距離 s が §2.2 でまとめた「特殊相対論における時空距離の性質」を満たすこと, を示せば良い。

→ つまり, 事象 P と Q の間の時空距離 s が, どんな慣性観測者からみても同じ値であること, を示せば良い。

→ そこで, $\left\{ \begin{array}{l} \text{別の慣性観測者 } K' \text{ を考える : } K \text{ に対して任意の向きに速度 } v \text{ で等速直線運動} \\ \qquad \qquad \qquad \rightarrow K' \text{ の運動方向は (これまでのように) } x \text{ 軸方向とは限らない} \\ \text{計算を少し簡単にする設定 : 事象 } Q \text{ を慣性系 } K \text{ と } K' \text{ の時空図の原点にする} \\ \qquad \qquad \qquad \rightarrow K \text{ から見ても } K' \text{ から見ても事象 } Q \text{ の座標は } (0, 0) \end{array} \right.$

→ 以上の設定で …

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 } K \text{ で見た事象 } P \text{ の座標 : } (ct_p, x_p) \\ \text{慣性系 } K' \text{ で見た事象 } P \text{ の座標 : } (ct'_p, x'_p) \end{array} \right. \text{ として,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 } K \text{ で見た事象 } QP \text{ 間の時空距離の 2 乗 : } s_p^2 = -(ct_p)^2 + x_p^2 \\ \text{慣性系 } K' \text{ で見た事象 } QP \text{ 間の時空距離の 2 乗 : } s_p'^2 = -(ct'_p)^2 + x_p'^2 \end{array} \right. \text{ となる。} \quad \text{--- (3A.1)}$$

→ よって, 等式 『 $s_p^2 = s_p'^2$ 』 が成り立つこと, を示せばよい。

注意 : 等式 $s_p^2 = s_p'^2$ を示すということは, 何か変数の値を決める (方程式を解く) という問題ではない。

事象 P と観測者 K, K' を決めれば (原理的に) s_p と s_p' の値は決まるのである。その既に決まっている値が実は $s_p^2 = s_p'^2$ という関係を満たしている, ということを証明するのである。

等式 $s_p^2 = s_p'^2$ を示す準備

事象 P と慣性観測者 K, K' を決めたので, $\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 } K \text{ で見た座標 : } (ct_p, x_p) \\ \text{慣性系 } K' \text{ で見た座標 : } (ct'_p, x'_p) \end{array} \right.$ の値も決まっている。

→ これらの座標の値から … $\left\{ \begin{array}{l} w_x = \frac{x_p}{ct_p} \quad \text{--- (3A.2)} \\ w'_x = \frac{x'_p}{ct'_p} \quad \text{--- (3A.3)} \end{array} \right.$

◇ 次の関係を満たす定数 a_t, a_x も考えられる : $ct'_p = a_t ct_p + a_x x_p$ --- (3A.4)

補足 1 : 定数 a_t, a_x の具体的な値は以下の証明では使わない。しかし, このような定数が存在する, という事実が以下の証明を進める上で重要である。

補足 2 : 定数 a_t, a_x の具体的な値は, §5 で扱うローレンツ変換で明らかになる。

等式 $s_p^2 = s_p'^2$ の証明

以上の準備をした上で証明に入る。証明は 3 段階に分ける。

第 1 段階

以上の設定から $\left\{ \begin{array}{l} \text{式 (3A.2) より : } x_p = w_x ct_p \quad \text{--- (3A.5)} \\ \text{式 (3A.3) より : } x'_p = w'_x ct'_p \quad \text{--- (3A.6)} \\ \text{式 (3A.5) を式 (3A.4) に代入して : } ct'_p = (a_t + a_x w_x) ct_p \quad \text{--- (3A.7)} \end{array} \right.$

式 (3A.6), (3A.7) を, 式 (3A.1) にある $s_p'^2$ に代入すると,

$$s_p'^2 = -(ct'_p)^2 + w_x'^2 (ct'_p)^2 = (-1 + w_x'^2) (ct'_p)^2 = (-1 + w_x'^2) (a_t + a_x w_x)^2 (ct_p)^2 \quad \text{--- (3A.8)}$$

一方、式 (3A.5) を、式 (3A.1) にある s_p^2 に代入すると、

$$s_p^2 = -(ct_p)^2 + w_x^2 (ct_p)^2 = (-1 + w_x^2) (ct_p)^2 \iff (ct_p)^2 = \frac{1}{-1 + w_x^2} s_p^2 \quad \text{---(3A.9)}$$

以上より、式 (3A.9) を式 (3A.8) に代入して、 s_p^2 と $s_p'^2$ が次のように比例することが分かる：

$$s_p'^2 = \frac{-1 + w_x'^2}{-1 + w_x^2} (a_t + a_x w_x)^2 s_p^2$$

これを簡単に $s_p'^2 = b s_p^2$ と書くことにすると、

$$s_p'^2 = b s_p^2 \quad \text{ただし、} b = \frac{-1 + w_x'^2}{-1 + w_x^2} (a_t + a_x w_x)^2 \quad \text{---(3A.10)}$$

あとは、比例係数 b が 1 であること ($b = 1$) が示せれば、等式 $s_p^2 = s_p'^2$ が成立することの証明が完成する。

第 2 段階

係数 b について事実をまとめていく。

まず、「事象 P と慣性観測者 K と K' を決めれば、式 (3A.10) の関係 $s_p'^2 = b s_p^2$ の定数 b の値が決まる」ことは次の事実 ① を示す：

- ◇ 事象 P と観測者の相対速度 v を決めれば、 b の値が決まる (式 (3A.10) が成立する)。 — 事実 ①
(b は事象 P と速度 v の関数 $b(ct_p, x_p, v)$ である。)

次に、この事実 ① と、特殊相対性原理 (空間には特別な位置がない) より、次の事実 ② が分かる：

- ◇ 事象 P によらず、相対速度 v (の速さと向き) で b の値が決まる (式 (3A.10) が成立する)。 — 事実 ②
(b は事象 P に依存せず、速度 v だけの関数 $b(v)$ である。)

さらに、この事実 ② と特殊相対性原理 (空間には特別な方向がない) より、次の事実 ③ が分かる：

- ◇ 相対速度 v の向き (符号) によらず、
大きさ (絶対値) $|v|$ だけで b の値が決まる (式 (3A.10) が成立する)。 — 事実 ③
(b は事象 P と v の符号によらず、絶対値 $|v|$ だけの関数 $b(|v|)$ である。)

そして、この事実 ③ より、式 (3A.10) は慣性系 K と K' を入れ換えても (s_p^2 と $s_p'^2$ を入れ換えても) 成立する：

$$s_p^2 = b s_p'^2 \quad \text{---(3A.11)}$$

この式 (3A.11) に式 (3A.10) を代入して、

$$s_p^2 = b \cdot b s_p^2 = b^2 s_p^2 \implies b^2 = 1 \iff b = +1 \text{ または } -1$$

つまり、事実 ③ では「絶対値 $|v|$ の値が変わると、もしかしたら b の値も変わるかもしれない (b は $|v|$ の関数である)」ということであったが、実は $|v|$ にも無関係に決まる単なる数値であり、可能性としては +1 か -1 のどちらかであることが分かった。

- ◇ 特殊相対性原理より (事実 ③ より)、
式 (3A.10) の比例係数 $b = +1$ あるいは $b = -1$ のどちらかである。 — 事実 ④

あとは $b = \pm 1$ の符号のうち、正の符号 +1 が正しい、ということを示せば証明が完成する。

第 3 段階

事実 ④ より、 b は事象 P にも相対速度 v にも無関係に +1 か -1 のどちらかだと分かったので、次の事実 ⑤ が分かる：

- ◇ 仮にある特定の相対速度と特定の事象 P (ある特定の s_p^2 と $s_p'^2$) について $b > 0$ が示せれば、
それは任意の相対速度と任意の事象 P について $b = +1$ だということを意味する。 — 事実 ⑤

そこで、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 P がたまたま慣性系 K' の ct' 軸上にある (事象 P と Q は慣性系 K が経験する異なる瞬間)} \\ \text{相対速度 } v \text{ の向きがたまたま x 軸の正方向, かつ光速より遅い (} 0 < v < c \text{)} \end{array} \right.$

の場合を考えて $b > 0$ であることを示す。— 図 3.6 —

この場合、事象 P が ct' 軸上にあるので、慣性系 K' が測る時空距離について：

$$s_p'^2 = -(ct_p')^2 + 0^2 \implies s_p'^2 < 0 \quad \text{---(3A.12)}$$

一方、 $0 < v < c$ であることから (図 3.6 より) 慣性系 K で測る事象 P の座標について： $ct_p > x_p (> 0)$

よって、慣性系 K が測る時空距離について：

$$s_p^2 = -(ct_p)^2 + x_p^2 \implies s_p^2 < 0 \quad \text{---(3A.13)}$$

したがって、図 3.6 の設定では、式 (3A.12) と (3A.13) より式 (3A.10) の比例係数が正の値 $b > 0$ であることが示される。

つまり、事実 ⑤ より、 $b = +1$ であることが示せた。

以上で、任意の 2 つの慣性系 K と K' で測った時空距離 (式 (3.1)) が等しいこと $s_p^2 = s_p'^2$ が証明できた。

(ミンコフスキー時空が特殊相対論の時空として適切であること、が証明された。)

[証明終]

補足コメント：

特殊相対論は、中学生や高校 1 年生にとって、数学的な考え方という点でとても高度な内容です。一度で分からないことがあって当たり前だと思います。高校 2, 3 年生で数学の「微分・積分」や「行列」, 「ベクトル」などを学ぶと数学的な考え方の訓練ができるので、その後にこの特殊相対論の講義を聞くと、理解の進み具合がだいぶ違ってくると思います。

ちなみに (双曲線の親類としての楕円)：

この特殊相対論の講義で楕円は登場しないが、双曲線の親類を一つ紹介する。

§2.1 で説明したように、 x - y 平面上の「原点を中心として半径 r の円」を表わす方程式は (ピタゴラスの定理の応用で)、次のようになっていた：

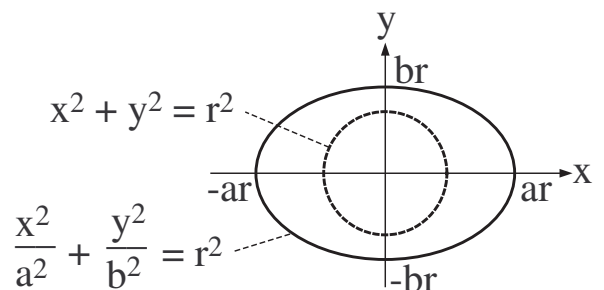
$$\text{円 : } x^2 + y^2 = r^2$$

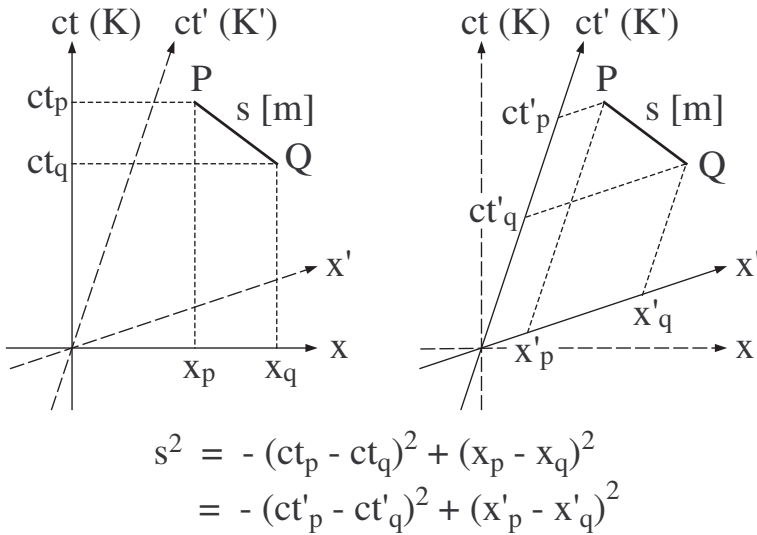
この円を x 軸方向に a 倍、 y 軸方向に b 倍すると楕円になる (右下図)。この楕円を表わす方程式は次のようになる：

$$\text{楕円 : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \quad (k = r^2)$$

楕円で $a = b$ の場合が円である。楕円と双曲線の方程式はよく似ている (ので親類である)。

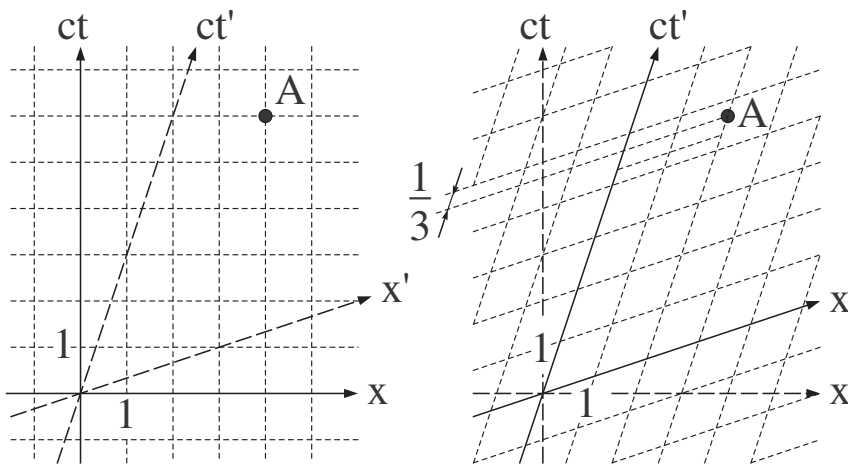
楕円も双曲線もそして放物線 (2 次関数の曲線) も円錐 (えんすい) を平面で切ったときの切り口として現れる。(数学の授業で勉強するかも。)





← 図 3.1: $ct-x$ 時空図で表した時空の事象間距離 s

- 式 (3.1) で計算できる距離 s は, どんな慣性観測者で測っても (観測系 K で測っても観測系 K' で測っても) 同じ値になる。
- ある事象 P の座標の値は「座標軸に平行かつ事象 P を通る線 (図1では点線) を使って読み取る」ということに注意。



← 図 3.2: 事象 A の座標を読み取れ。
 $ct-x$ 時空図に描いた「 t' 軸と x' 軸に平行な線で作る網目」は「ひし形の格子」になることに注意。

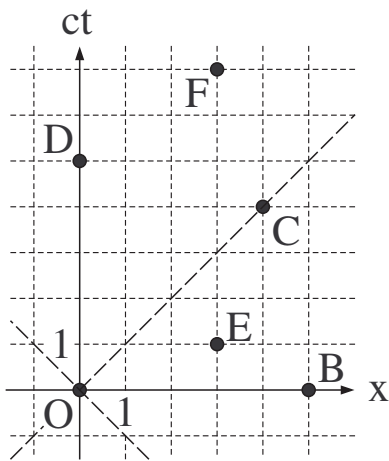


図 3.3: 時空距離を計算せよ

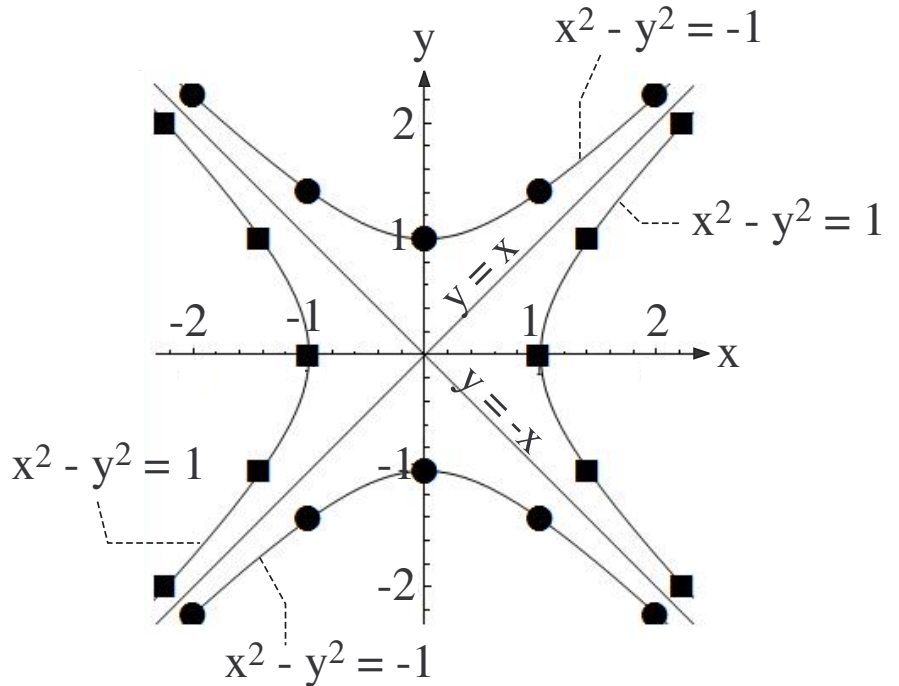
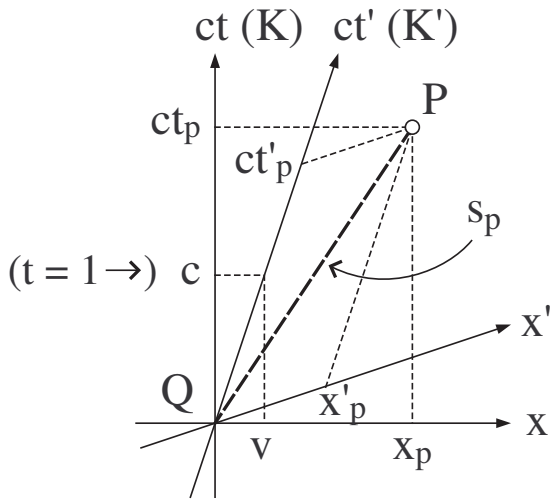


図 3.4: 式 (3.2) と (3.3) の双曲線, それらが漸近する直線 $y = \pm x$

● → 双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ が通る点 (問い c-2) の答え)

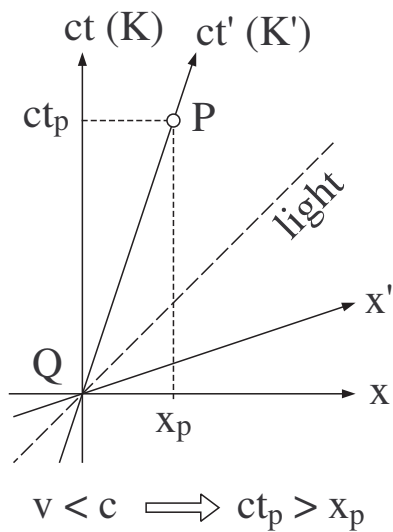
■ → 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が通る点 (問い c-4) の答え)

双曲線は, 上下 (また左右) に現れる 2 つの曲線で構成される。



← 図 3.5 :

時空の中の事象 $P (ct_p, x_p)$ と、事象 PQ 間の時空距離 s_p を表わす線分 (破線で表示)。



← 図 3.6 :

慣性観測者 K と K' の相対速度が x 軸方向、かつ、事象 P が ct' 軸上にある場合の時空図。

物理学探究講座 第 1 部 練習問題

問題

図 3.3 の時空図に示す事象について考える。

(a) 事象 DF 間の時空距離の 2 乗 s_{df}^2 ，事象 DC 間の時空距離の 2 乗 s_{dc}^2 ，事象 DB 間の時空距離の 2 乗 s_{db}^2 ，事象 DE 間の時空距離の 2 乗 s_{de}^2 ，を計算せよ。

(b) 事象 F, C, B, E のうち、事象 D と一本の光の世界線で結ばれる事象はどれか、理由をつけて答えよ。

§4. 「時間の遅れ」と「ローレンツ収縮」(初等幾何による理解)

§4.1 座標軸の目盛りつけ (図 4.1, 4.2)

- ミンコフスキー時空の座標軸の目盛りつけも, §2.1 (ニュートン力学の場合) と同じ方針:

座標軸の目盛り付け: 原点からの時空距離 (の 2 乗) が一定な曲線を考えれば, 座標軸上に目盛りを付けられる。

→ 特殊相対論とニュートン力学では, 距離の定義 (計算式) が異なる。

→ ユークリッド空間での目盛り付けは円で行った。距離の定義が異なるミンコフスキー時空ではどうか?

ある事象 (ct, x) と原点 $(0, 0)$ の間の時空距離を s [m] とすると, §3.2 より, $s^2 = -(ct)^2 + x^2$ である。

よって, $s^2 = k$ (一定値) とすると,

$$\underline{ct-x \text{ 時空図上で時空距離が一定の曲線: } -(ct)^2 + x^2 = k \quad \dots \quad ct-x \text{ 時空図上の双曲線!}}$$

→ ミンコフスキー時空では, 双曲線を使って座標軸の目盛りつけが可能!

- 以下, 異なる慣性観測者の座標軸の目盛りつけ, を実行。

状況設定 - 図 4.1 -

◇ 慣性系 K に対して, 別の慣性系 K' が, K の x 軸方向に速度 v [m/s] で慣性運動している。 $v < c$ とする。

◇ 速度が x 軸方向なので, y 座標と z 座標を省略して考えられる: $\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 } K \text{ の座標} : (ct, x) \\ \text{慣性系 } K' \text{ の座標} : (ct', x') \end{array} \right.$

◇ ct 軸上の事象 A: 慣性系 K で見た座標 $(ct_a, x_a) = (a, 0)$ → 事象 OA の時空距離 (の 2 乗): $s_a^2 = -a^2$

◇ x 軸上の事象 B: 慣性系 K で見た座標 $(ct_b, x_b) = (0, b)$ → 事象 OB の時空距離 (の 2 乗): $s_b^2 = +b^2$

何を考えるか? (方針)

以上の設定で, 次の 2 つの事象を見つけることで, ct' 軸と x' 軸に目盛りをつける:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 C} : ct' \text{ 軸上にあり, かつ, 事象 OC の時空距離 } s_c'^2 = s_a^2 (= -a^2) \\ \text{事象 D} : x' \text{ 軸上にあり, かつ, 事象 OD の時空距離 } s_d'^2 = s_b^2 (= +b^2) \end{array} \right. \dots \text{ 「距離が一定」 を考える!}$

→ この 2 つの事象を使って: $\left\{ \begin{array}{l} ct' \text{ 軸上で事象 C が居る位置に, } ct' = \pm a \text{ という目盛りがつく。} \\ x' \text{ 軸上で事象 D が居る位置に, } x' = \pm b \text{ という目盛りがつく。} \end{array} \right. \quad \text{---(4.1)}$

ct' 軸の目盛りつけ (事象 C の位置の特定) - 図 4.1 -

事象 C は次の 2 つの線の交点である。この 2 つの線を $ct-x$ 時空図での方程式 (ct と x の関係式) で表す:

$$\text{事象 A を通る双曲線 } H_a : -(ct)^2 + x^2 = -a^2 \quad (= s_a^2) \quad , \quad ct' \text{ 軸} : ct = \frac{c}{v} x$$

→ 図 1 のように双曲線 H_a が描けて, $ct-x$ 時空図での事象 C の位置が分かる。

→ よって, 方針 (4.1) の通り『事象 C の位置が, 慣性系 K' で見た $ct' = \pm a$ という目盛り』だと分かる。

→ これは, 『慣性系 K' で見た事象 C の座標 $(ct'_c, x'_c) = (\pm a, 0)$ である』, も意味する。

* 双曲線の計算に基く補足:

慣性系 K' で見て: $\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 C の座標} : (ct'_c, x'_c) \rightarrow s_c'^2 = s_a^2 \text{ より, } -(ct'_c)^2 + x_c'^2 = -a^2 \\ ct' \text{ 軸上の事象の, } x' \text{ 座標の値はゼロ: } x'_c = 0 \end{array} \right.$

→ この 2 つの式より: $ct'_c = \pm a$ を得る。確かに 慣性系 K' で見た事象 C の時間座標は $\pm a$ になっている。

→ 一つの『時空距離が一定の双曲線』で, 様々な『観測者の時間座標軸』に目盛つけ出来ることが, 計算に基いて (数学的に) 保障されることが分かる。

x' 軸の目盛りつけ (事象 D の位置の特定) - 図 4.1 -

事象 D は次の 2 つの線の交点である。この 2 つの線を $ct-x$ 時空図での方程式 (ct と x の関係式) で表す:

$$\text{事象 B を通る双曲線 } H_b: -(ct)^2 + x^2 = +b^2 \quad (= s_b^2), \quad x' \text{ 軸: } ct = \frac{v}{c} x$$

→ 図 1 のように双曲線 H_b が描けて、 $ct-x$ 時空図での事象 D の位置が分かる。

→ よって、方針 (4.1) の通り『事象 D の位置が、慣性系 K' で見た $x' = \pm b$ という目盛り』だと分かる。

→ これは、『慣性系 K' から見て、事象 D の座標 $(ct'_d, x'_d) = (0, \pm b)$ である』、も意味する。

* 双曲線の計算に基く補足:

$$\text{慣性系 } K' \text{ で見て: } \begin{cases} \text{事象 D の座標: } (ct'_d, x'_d) \rightarrow s'_d{}^2 = s_b^2 \text{ より, } -(ct'_d)^2 + x'_d{}^2 = b^2 \\ x' \text{ 軸上の事象の, } ct' \text{ 座標の値はゼロ: } ct'_d = 0 \end{cases}$$

→ この 2 つの式より: $x'_d = \pm b$ を得る。確かに慣性系 K' でみた事象 D の空間座標は $\pm b$ になっている。

→ 一つの『時空距離が一定の双曲線』で、様々な『観測者の空間座標軸』に目盛りつけ出来ることが、計算に基いて (数学的に) 保障されることが分かる。

双曲線の数学的な性質からの注意点 (双曲線の接線) - 図 4.2 -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 C での双曲線 } H_a \text{ の接線は, } x' \text{ 軸に平行な直線 (A での接線は } x \text{ 軸に平行なことと同様)} \\ \rightarrow \text{「この接線上の全ての事象における } ct' \text{ 座標の値} = \text{「事象 C の } ct' \text{ 座標} = \pm a \\ \rightarrow \text{これは, 慣性系 } K' \text{ で見て事象 C と同時刻の空間。} \\ \\ \text{事象 D での双曲線 } H_b \text{ の接線は, } ct' \text{ 軸に平行な直線 (B での接線は } ct \text{ 軸に平行なことと同様)} \\ \rightarrow \text{「この接線上の全ての事象における } x' \text{ 座標の値} = \text{「事象 D の } x' \text{ 座標} = \pm b \\ \rightarrow \text{これは, 慣性系 } K' \text{ で見て事象 D と同じ } x' \text{ 座標の位置に留まり続けている物体の世界線。} \\ \text{(慣性系 } K \text{ に対して, 慣性系 } K' \text{ と同じ速度 } v \text{ で慣性運動している物体の世界線。)} \end{array} \right.$$

§4.2 時間の遅れ (図 4.3, 4.4)

問題: §4.1 と同じ慣性系 K と K' がお互いに、お互いの時計を見ると、それぞれどう見えるか? - 図 4.3 -

答: 時間の遅れ (どちらも、相手の時計が遅れているように見える。)

証明:

◇ まず、図 4.4 で事象 C と同時刻になる事象を整理: $\begin{cases} \text{慣性系 } K' \text{ で見て事象 C と事象 E が同時刻} \\ \text{慣性系 } K \text{ で見て事象 C と事象 F が同時刻} \end{cases}$

◇ 次に、それぞれの観測者が持つ時計が示す時刻 (時間座標) の値を整理:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{「慣性観測者 } K \text{ の時計が事象 E で示す時刻} = \text{「事象 E の } ct \text{ 座標} = ct_e \\ \text{「慣性観測者 } K \text{ の時計が事象 F で示す時刻} = \text{「事象 F の } ct \text{ 座標} = ct_f \\ \text{「慣性観測者 } K' \text{ の時計が事象 C で示す時刻} = \text{「事象 C の } ct' \text{ 座標} = ct'_c = a \end{array} \right.$$

◇ よって、図 4.4 の座標軸の目盛りを比べて: $ct_e > a$, $ct_f < a$

→ 「相手の時間を知る」とは「自分にとって同時刻の事象で時計を比べる」ことなので、以上の 3 つより:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性観測者 } K \text{ は 同時刻の事象 C と F を比べて, 観測者 } K' \text{ の時計が遅れている, と判断。} \\ \text{慣性観測者 } K' \text{ は 同時刻の事象 C と E を比べて, 観測者 } K \text{ の時計が遅れている, と判断。} \end{array} \right. \quad [\text{証明終}]$$

補足：この「時間の遅れ」は実際に観測されている。例えば、宇宙からやってくる放射線（宇宙線）の観測など。

現代物理学では、多くの素粒子（原子核や、原子核を構成する陽子や中性子など）は、ある時間が経過すると崩壊すると考えられている。この「粒子の崩壊」とは、観測者は何もしていないのに、その粒子が自分で勝手に壊れて（自発的に崩壊して）他の（複数の）粒子になる現象である。ある粒子が作られてから崩壊するまでの時間を「粒子の寿命」と言う。

ある粒子が観測者に対して静止している場合の寿命は、（その粒子を実験室で静止させることで）実際に測定されている。一方、ある特定の粒子は絶えず宇宙空間から地球に降り注いでいる（宇宙線）。宇宙線に含まれるある粒子の（実験室で静止させて測定した）寿命は極めて短い。その短い寿命が、粒子が静止していない場合にも正しいとすると、例えその粒子が地球上空で生成されても地上に届く前に崩壊してしまうはずである。しかし実際には、宇宙線の粒子は（地上の観測者から見て）速度をもって運動しているので、特殊相対論の「時間の遅れ」の効果によって（地上の観測者の時間で計る）寿命が延びて、その粒子が崩壊する前に地上に届くことが観測されている。

§4.3 ローレンツ収縮（図 4.5, 4.6, 4.7）

問題： - 図 4.5 -

§4.1 と同じ慣性観測者 K は (K が測った) 長さ b [m] の棒を持っている。慣性観測者 K' も (K' が測った) 長さ b [m] の棒を持っている。このときお互いに、お互いの棒の長さを測ると、どんな長さに見えるか？

答：ローレンツ収縮（どちらも、相手の棒の長さが b より短く見える。）

証明：

◇まず、図 4.6 の灰色部分は「 K' の棒」が描く世界面。（棒の一端の世界線は $ct-x$ 時空図の原点を通るとする。）

◇「棒の長さ」は「棒の両端が同時刻のときの、空間座標の差」である。

◇以上より、図 4.6 の $\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 D の位置で測る } x' \text{ 座標 が, } K' \text{ が測る 「K' の棒」 の長さ } b \text{ である: } x'_d = b \\ \text{事象 P の位置で測る } x \text{ 座標 が, } K \text{ が測る 「K の棒」 の長さ } b_K \text{ である: } x_p = b_K \end{array} \right.$

→ 図 4.6 の目盛りを比べて： $x_p < b \implies b_K < b$

→ 慣性観測者 K には、「 K' の棒」の長さが (K' が測る長さ) b より短く見える。

◇次に、図 4.7 の灰色部分は「 K の棒」が描く世界面。（棒の一端の世界線は $ct-x$ 時空図の原点を通るとする。）

◇「棒の長さ」は「棒の両端が同時刻のときの、空間座標の差」である。

◇以上より、図 4.7 の $\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 Q の位置で測る } x' \text{ 座標 が, } K' \text{ が測る 「K の棒」 の長さ } b_{K'} \text{ である: } x'_q = b_{K'} \\ \text{事象 B の位置で測る } x \text{ 座標 が, } K \text{ が測る 「K の棒」 の長さ } b \text{ である: } x_b = b \end{array} \right.$

→ 図 4.7 の目盛りを比べて： $x'_q < b \implies b_{K'} < b$

→ 慣性観測者 K' には、「 K の棒」の長さが (K が測る長さ) b より短く見える。

[証明終]

付録 4.1 : 「時間の遅れ」の計算 (図 4.3, 4.4)

§4.2 で、自分に対して運動している人の時間は遅れて見える、ことが分かった。

では、その遅れた時間は具体的にいくらなのか？ この付録 4.1 では、その遅れた時間の計算式を導出する。

何を計算すればよいか？

図 4.3, 4.4 の設定において、慣性系 K で見て事象 F と C が同時刻なので、『慣性系 K で計る事象 F の時間 ct_f 』と『慣性系 K' で計る事象 C の時間 ct'_c 』を比べれば、『慣性系観測者 K が認識する慣性観測者 K' の時間の遅れ』が計算できる。

「時間の遅れ」の計算式の導出

(1) 慣性系 K で計る時間座標を計算するために、 (ct, x) 座標で計算を行う。

まず、K から見た事象 C の座標 (ct_c, x_c) を求める。それは次の 2 つの線の交点である：

$$\begin{cases} \text{慣性系 K で見た双曲線 } H_a : -(ct)^2 + x^2 = -a^2 (= s_a^2) \\ \text{慣性系 K' で見た } ct' \text{ 軸} : ct = \frac{c}{v} x \end{cases}$$

この連立方程式を解いて (計算は下の補足にまとめる)，

$$C \text{ の座標 } (ct_c, x_c) = \left(\frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{v}{c} \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$$

(2) 「慣性系 K で計る事象 F の時刻」 = 「慣性系 K' で計る事象 C の時刻」 である。

よって、時空図 (図 4.4) から、慣性系 K' で見た事象 F の座標が読み取れる： $(ct_f, x_f) = (ct_c, 0)$

$$(3) \text{ 以上より : } \begin{cases} \text{K の時計 で計る事象 F の時刻} : ct_f = \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \text{K' の時計 で計る事象 C の時刻} : ct'_c = a \end{cases} \implies ct'_c = ct_f \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\implies \text{『事象 C で K' が測る時間 (K' の時刻)』} = \text{『事象 F で K が測る時間 (K の時刻)』} \times \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

よって、慣性観測者 K は同時刻の事象 C と F を比べて、別の慣性観測者 K' の時刻 ct'_c が自分の時刻 ct_f

の $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍である、と判断。($v < c$ より、 $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} < 1$ であることに注意。)

◇ 補足：事象 C の座標の計算

まず、図 4.4 に示した C の位置から、C の座標の符号を $x_c > 0$ かつ $ct_c > 0$ として考えることにする。

$$\text{次に, } \begin{cases} \text{双曲線 } H_a \text{ の方程式より} : x^2 = (ct)^2 - a^2 \\ \text{ct' 軸の方程式より} : (ct)^2 = \frac{c^2}{v^2} x^2 \iff x^2 = \frac{v^2}{c^2} (ct)^2 \end{cases}$$

$$\implies (x^2 =) (ct)^2 - a^2 = \frac{v^2}{c^2} (ct)^2 \iff \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (ct)^2 = a^2$$

$$\text{両辺を } \frac{1}{1-(v/c)^2} \text{ 倍して, } (ct)^2 = \frac{a^2}{1-(v/c)^2}$$

$$\implies ct_c > 0 \text{ なので平方根の正符号を採用して, } ct = \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\text{さらに, ct' 軸の方程式より, } x = \frac{v}{c} ct = \frac{v}{c} \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\text{以上より, 慣性系 K' で見た事象 C の座標 } (ct_c, x_c) = \left(\frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{v}{c} \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$$

双曲線 H_a の方程式から、 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ という係数が出てきていることが分かる。この係数 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ は、まさに、特殊相対論の時空距離が測定値に与える影響を表している。

付録 4.2 : 「ローレンツ収縮」の計算 (図 4.5, 4.6)

§4.3 で、自分に対して運動している人の長さは短く見える、ことが分かった。

では、その短くなった長さは具体的にいくらなのか？ この付録 4.2 では、その短くなった長さの計算式を導出する。

何を計算すればよいか？

図 4.5, 4.6 の設定において、慣性系 K' で測る「 K' の棒」の長さが b である ($x'_d = b$)。これと、『慣性系 K で測る「 K' の棒の長さ」 b_K 』を比べれば、『ローレンツ収縮 (K が認識する K' の棒の縮み)』が計算できる。ここで、図 4.6 より、 $b_K = x_p$ (x_p は事象 P の x 座標) であることが分かる。したがって、 x_p を求めることが目的となる。

「ローレンツ収縮」の計算式の導出

(1) 慣性系 K で測る距離 (長さ) を計算するために、 (ct, x) 座標で計算を行う。

まず、 K から見た事象 D の座標 (ct_d, x_d) を求める。それは次の 2 つの線の交点である：

$$\begin{cases} \text{慣性系 } K \text{ で見た双曲線 } H_b : -(ct)^2 + x^2 = b^2 (= s_b^2) \\ \text{慣性系 } K \text{ で見た } x' \text{ 軸} : ct = \frac{v}{c} x \end{cases}$$

この連立方程式を解いて (計算は下の補足 1) ,

$$D \text{ の座標 } (ct_d, x_d) = \left(\frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)$$

(2) 事象 D を通って ct' 軸 (x 軸からの傾き $\frac{c}{v}$) に平行な直線の方程式は次のようになる (計算は下の補足 2) ,

$$ct = \frac{c}{v} x - \frac{c}{v} x_d + ct_d$$

(3) この直線と x 軸 ($ct = 0$) の交点が事象 P である。連立方程式を解いて (計算は下の補足 3) ,

$$P \text{ の座標 } (ct_p, x_p) = \left(0, b \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)$$

(4) 以上より、慣性系 K で測る「 K' の棒」の長さ $b_K = x_p = b \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$

したがって、慣性観測者 K は、 K にとって同時刻の OP 間距離を考えて、「別の慣性観測者 K' が測る棒の長さ」 b_K が「 K' 自身が測る長さ」 b の $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍である、と判断。($v < c$ より $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} < 1$ である。)

◇ 補足 1 : (1) での事象 D の座標の計算

まず、図 4.6 に示した D の位置から、 D の座標の符号を $x_d > 0$ かつ $ct_d > 0$ として考えることにする。

$$\text{次に、} \begin{cases} \text{双曲線 } H_b \text{ の方程式より} & : (ct)^2 = x^2 - b^2 \\ \text{x' 軸の方程式より} & : (ct)^2 = \frac{v^2}{c^2} x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left((ct)^2 = \right) x^2 - b^2 = \frac{v^2}{c^2} x^2 \iff \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x^2 = b^2$$

$$\text{両辺を } \frac{1}{1 - (v/c)^2} \text{ 倍して、} x^2 = \frac{b^2}{1 - (v/c)^2}$$

$$\Rightarrow x_d > 0 \text{ なので平方根の正符号を採用して、} x = \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

双曲線 H_b の方程式から、 $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ という係数が出てきていることが分かる。この係数 $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ は、まさに、特殊相対論の時空距離が測定値に与える影響を表している。

(次ページに続く)

さらに, x' 軸の方程式より, $ct = \frac{v}{c}x = \frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

以上より, 慣性系 K で見た事象 D の座標 $(ct_d, x_d) = \left(\frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$

◇ 補足 2 : (2) での直線の方程式の導出

分かっている条件 : $\begin{cases} (x \text{ 軸からの}) \text{ 傾きが } \frac{c}{v} \\ \text{直線が通る点 D の座標 } (ct_d, x_d) \end{cases}$

(x 軸からの) 傾きが $\frac{c}{v}$ なので, 求めたい直線の方程式を次のようにおける : $ct = \frac{c}{v}x + k$ (k は定数)

これが事象 D を通るので, $ct_d = \frac{c}{v}x_d + k \iff k = -\frac{c}{v}x_d + ct_d$

よって, 求める直線の方程式は, $ct = \frac{c}{v}x - \frac{c}{v}x_d + ct_d$

◇ 補足 3 : (3) での事象 P の座標の計算

解くべき連立方程式は, $\begin{cases} (2) \text{ の直線} & : ct = \frac{c}{v}x - \frac{c}{v}x_d + ct_d \\ x \text{ 軸} & : ct = 0 \end{cases}$

$\implies (ct =) \frac{c}{v}x - \frac{c}{v}x_d + ct_d = 0 \iff \frac{c}{v}x = \frac{c}{v}x_d - ct_d$

両辺を $\frac{v}{c}$ 倍して, $x = x_d - \frac{v}{c}ct_d$

これに (1) で求めた事象 D の座標を代入して,

$$x = \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{v}{c} \cdot \frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (\text{第 2 項の下線部は } ct_d \text{ である})$$

$$= \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1-(v/c)^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} b$$

ここで, $1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \heartsuit$ と表わせれば, $x = \frac{\heartsuit}{\sqrt{\heartsuit}} b = \sqrt{\heartsuit} b = b\sqrt{\heartsuit} \leftarrow \left[\begin{array}{l} b \text{ が平方根の中に入ってい} \\ \text{ないことを明示するために,} \\ \text{かけ算の順番を代えた。} \end{array} \right]$

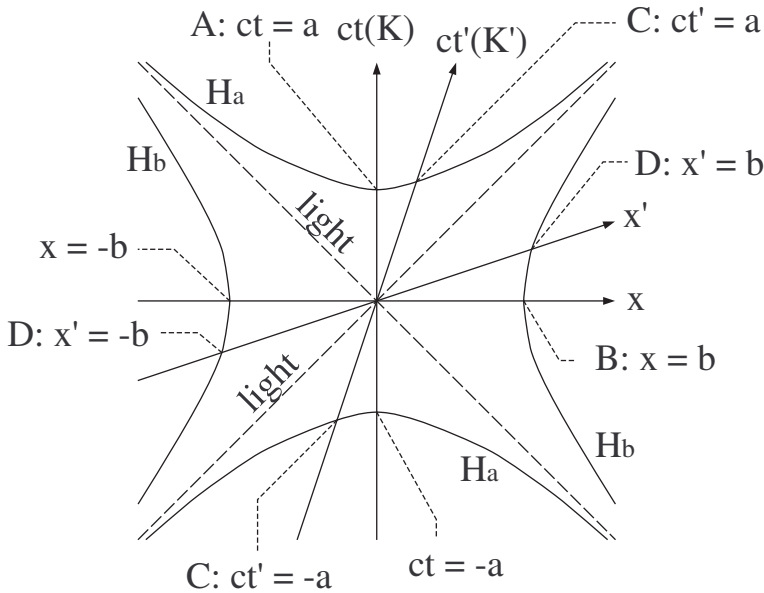
つまり, $x = b\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$

また, 事象 P は x 軸上なので $ct_p = 0$ であることは明らか。

以上より, 慣性系 K で見た事象 P の座標 $(ct_p, x_p) = \left(0, b\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)$

* 以上の 2 つの付録での, 双曲線と直線の交点の計算は, ローレンツ変換を使うともっと楽に実行できる。

→ §5 の内容の一つ。



$H_a : -(ct)^2 + x^2 = -a^2 \quad (= -(ct')^2 + x'^2)$
 $H_b : -(ct)^2 + x^2 = b^2 \quad (= -(ct')^2 + x'^2)$

図 4.1 : ミンコフスキー時空の座標軸の目盛つけ

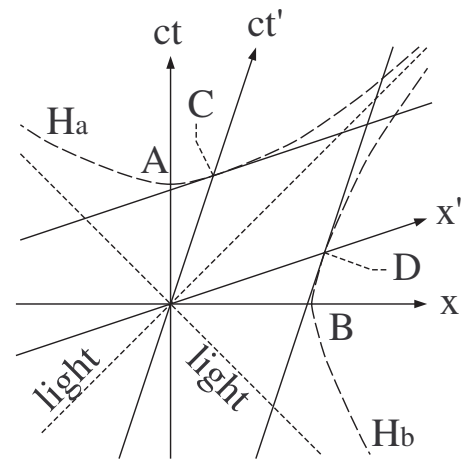


図 4.2 : 「時空距離が一定の双曲線の接線」と「慣性系の座標軸」

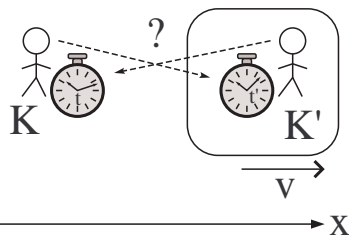


図 4.3 : 「時間の遅れ」の状況設定

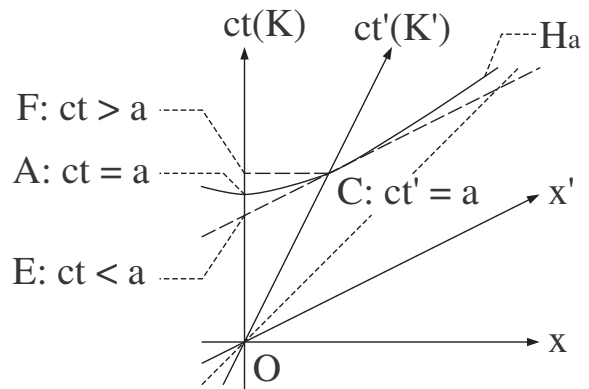


図 4.4 : 「時間の遅れ」の時空図

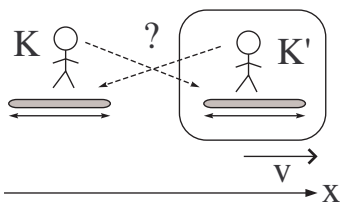


図 4.5 : 「ローレンツ収縮」の状況設定

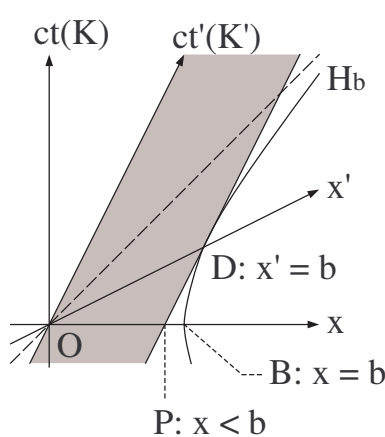


図 4.6 : 「ローレンツ収縮」の時空図
K が「K' の棒」を見る場合

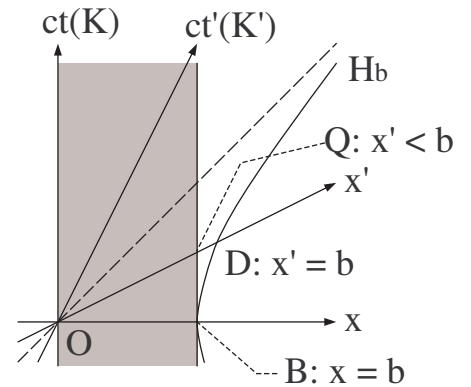


図 4.7 : 「ローレンツ収縮」の時空図
K' が「K の棒」を見る場合

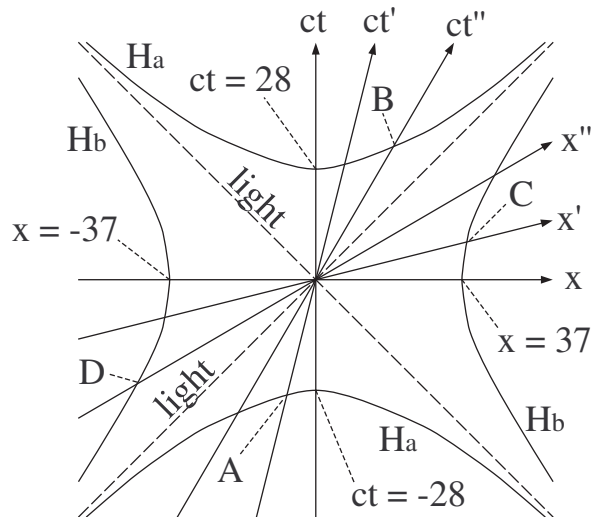
問題

慣性観測者 K に対して、別の慣性観測者 K' と K'' が x 軸の正方向にそれぞれ異なる速度で運動している。右の ct - x 時空図は慣性系 K で見た時空図であり、慣性系 K' の ct' 軸と x' 軸、慣性系 K'' の ct'' 軸と x'' 軸も描いてある。

また、双曲線 H_a は、慣性系 K で見て事象 $(ct, x) = (\pm 28, 0)$ を通る双曲線 $(-ct)^2 + x^2 = -28^2$ である。

双曲線 H_b は、慣性系 K で見て事象 $(ct, x) = (0, \pm 37)$ を通る双曲線 $-(ct)^2 + x^2 = 37^2$ である。

なお、以下の問いは双曲線の方程式を使わずに答えられる。



(a) 慣性系 K' で見た場合について考える。

a-1) 慣性系 K' で見た事象 A の時間座標 ct'_a の値を、時空図から読み取れ。

a-2) 慣性系 K' で見た事象 C の空間座標 x'_c の値を、時空図から読み取れ。

(b) 慣性系 K'' で見た場合について考える。

b-1) 慣性系 K'' で見た事象 B の時間座標 ct''_b の値を、時空図から読み取れ。

b-2) 慣性系 K'' で見た事象 D の空間座標 x''_d の値を、時空図から読み取れ。

§5. ローレンツ変換

§5.1 ローレンツ変換 (図 5.1, 5.2)

- 時間の遅れ (§4.2) とローレンツ収縮 (§4.3) を理解する上での注意点:

ある事象の座標を $\begin{cases} \text{慣性系 K で測った値 } (ct, x) \\ \text{慣性系 K' で測った値 } (ct', x') \end{cases}$ の2つを区別すること。

→ では, (ct, x) と (ct', x') の関係は? ... ローレンツ変換!

- 特殊相対論における, 異なる慣性系が測る座標の間関係式 (この関係式の導出は付録 5.1 にまとめた):

ローレンツ変換: 慣性系 K の x 軸方向に, 別の慣性系 K' が速度 v で慣性運動している (図 5.1)。このとき,

任意の事象 E の座標を $\begin{cases} \text{慣性系 K が測った値} : (ct_e, x_e) \\ \text{慣性系 K' が測った値} : (ct'_e, x'_e) \end{cases}$

とすると, 特殊相対論では次の関係が成立する (図 4.2):

$$\text{ローレンツ変換} \begin{cases} ct'_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(ct_e - \frac{v}{c} x_e \right) \\ x'_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e \right) \end{cases} \quad \text{---(5.1)}$$

→ これで, 一方の慣性系の座標値 (ct, x) だけを使って, もう一方の慣性系の座標値 (ct', x') を計算できる。

- 式 (5.1) は, 「慣性系 K で測る座標値」を使って「慣性系 K' で測る座標値」を計算するという形である。

→ 逆に, 「K' で測る座標 (ct'_e, x'_e) 」を使って「K で測る座標 (ct_e, x_e) 」を計算する形にするには, 式 (5.1) で, (ct'_e, x'_e) と (ct_e, x_e) を入れ換えて, かつ, 速度を $-v$ にすればよい。(K' から見た K の速度は $-v$)

$$\text{ローレンツ変換 (5.1) の逆} \begin{cases} ct_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(ct'_e + \frac{v}{c} x'_e \right) \\ x_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v}{c} ct'_e + x'_e \right) \end{cases} \quad \text{---(5.2)}$$

補足: ニュートン力学の再現

日常生活の感覚では, 光速 $c \doteq 30$ [万 km/s] (1 秒で地球を 7.5 周) は無限に速く感じられる。

→ そこで, ローレンツ変換 (5.1) に『光速 c が無限に大きい ($c \rightarrow \infty$)』という近似をすると, 次の関係式になる (∞ は無限大を意味する。『 $c \rightarrow \infty$ 』は, c をどんどん大きくして無限大にする, という意味.):

$$\text{ローレンツ変換の『} c \rightarrow \infty \text{』近似;} \begin{cases} t'_e = t_e \\ x'_e = x_e - vt_e \end{cases} \quad \leftarrow \left[\begin{array}{l} \text{式 (5.1) の上側の式の両辺を } \frac{1}{c} \text{ 倍} \\ \text{してから, } c \text{ を無限大にする。} \end{array} \right]$$

この近似の結果は, 次を意味する:

$c \rightarrow \infty$ とすると, $\begin{cases} \text{慣性系 K と K' の時間 (同時刻な空間) は共通} \\ \text{距離は, K' の移動距離の分 (} vt_e \text{) だけずれる} \end{cases}$... ニュートン力学の考え方!

→ つまり, 『 $c \rightarrow \infty$ 』近似で, 特殊相対論からニュートン力学の考え方が再現される。

§5.2 「時間の遅れ」の計算 (図 5.3, 5.4)

状況設定： §4.2 と同じ問題設定を考える → 図 5.3, 5.4

何を計算すればよいか？

図 5.3, 5.4 の設定において、慣性系 K で見て事象 F と C が同時刻なので、『慣性系 K で計る事象 F の時間 ct_f 』と『慣性系 K' で計る事象 C の時間 ct'_c 』を比べれば、『慣性系観測者 K が認識する慣性観測者 K' の時間の遅れ』が計算できる。

時間の遅れの計算：

慣性系 K で測った事象 F の時間を ct_f とすると (K から見た K' の速度が v であることに注意して)

$$\text{事象 C の} \begin{cases} \text{慣性系 K からみた座標} & : (ct_c, x_c) = (ct_f, vt_c) = (ct_f, \frac{v}{c} ct_c) = (ct_f, \frac{v}{c} ct_f) \\ \text{慣性系 K' からみた座標} & : (ct'_c, x'_c), x'_c = 0 \quad \dots \text{以下の計算は } ct'_c \text{ を } ct_f \text{ で表すことが目的} \end{cases}$$

これらの座標は同一の事象 C の座標 (しかし座標を測った観測者が違う) なので、ローレンツ変換で結びついている。よって、ローレンツ変換の逆 (式 (5.2)) より、

$$ct_c = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(ct'_c + \frac{v}{c} x'_c \right) \quad \Rightarrow \quad ct_f = \frac{ct'_c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\text{したがって, } \underline{ct'_c = ct_f \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\text{前回の付録 4.1 と同じ結果}) \quad \text{——(5.3)}$$

$$\Rightarrow \text{『事象 C で K' が測る時間 (K' の時刻)]} = \text{『事象 F で K が測る時間 (K の時刻)]} \times \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

よって、慣性観測者 K は同時刻の事象 F と C を比べて別の慣性観測者 K' の時刻が自分の時刻の $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍だけしか経過していないと判断する。 ($v < c$ より、 $\sqrt{1 - (v/c)^2} < 1$ であることに注意。)

補足：ローレンツ変換によって、付録 4.1 で行った双曲線と直線の交点の計算が楽になった。ただし、双曲線 (時空距離の式) を利用した計算は、付録 5.1 『ローレンツ変換の導出』の第 3 段階に入っているのので、この §5.2 の計算は (結局、双曲線と直線を暗に利用しているという意味で) 付録 4.1 の計算と同じだと見なせる。

§5.3 「ローレンツ収縮」の計算 (図 5.5, 5.6)

状況設定： §4.3 と同じ問題設定を考える → 図 5.5, 5.6

何を計算すればよいか？

図 5.5, 5.6 の設定において、慣性系 K' で測る「K' の棒」の長さが b である ($x'_d = b$)。これと、『慣性系 K で測る「K' の棒」の長さ b_K 』を比べれば、『ローレンツ収縮 (K が認識する K' の棒の縮み)』が計算できる。ところで図 5.6 より、

$$b_K = \begin{cases} x_p \\ x_d - x_r \end{cases} \quad (x_p, x_d, x_r \text{ はそれぞれ、慣性系 K で測る事象 P, D, R の } x \text{ 座標}) \quad \text{——(5.4)}$$

である。よって、 x_p あるいは $x_d - x_r$ のどちらかを計算すればよい。この §5.3 では、 $x_d - x_r$ を計算する。

補足 1：前回 §4.3 では、 x_p をみてローレンツ収縮を定性的に理解したが、ここで定量的に理解 (次の補足 2 を参照) するには $x_d - x_r$ をみるほうが計算が比較的楽になる。

補足2:「定量的な理解」とは、数値的にも計算して正確に現象を理解すること。「定性的な理解」とは、数値的には不正確でも、どういう理由でどういう傾向の現象になるかを(図などから)理解すること。

ローレンツ収縮の計算

(1) 以下のように、慣性系 K で測る事象 D の座標 (ct_d, x_d) を求める:

事象 D は x' 軸上にあることと、慣性系 K' で測る『K' の棒の長さ』が b であることから、

$$\text{慣性系 K' で測る事象 D の座標: } (ct'_d, x'_d) = (0, b)$$

K で見た座標 (ct_d, x_d) と K' で見た座標 (ct'_d, x'_d) はどちらも同一の事象 D の座標なので(しかし観測者が違う)、これらはローレンツ変換で結びついている。よって、ローレンツ変換の逆(式(5.2))より、

$$\begin{cases} ct_d = \frac{0 + (v/c)b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ x_d = \frac{0 + b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases}$$

$$\text{つまり、慣性系 K で測る事象 D の座標: } (ct_d, x_d) = \left(\frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)$$

(2) 次に、以下のように慣性系 K で測る事象 R の x 座標 x_r を求める:

$$\text{図 5.6 より, } \begin{cases} \text{慣性系 K で見て事象 R と D は同時刻} \implies \text{慣性系 K で測る事象 R の時間 } ct_r = ct_d \\ \text{事象 R は } ct' \text{ 軸 (速度 } v \text{ の慣性系観測者 K' の世界線) の上} \implies x_r = vt_r = \frac{v}{c} ct_r \end{cases}$$

$$\text{この2つの事実より, } x_r = \frac{v}{c} \times ct_d$$

$$\text{上の(1)で求めた事象 D の時間座標 } ct_d \text{ を代入して, } x_r = \frac{(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} b$$

(3) 以上から、慣性系 K で測る「K' の棒」の長さ $b_K = x_d - x_r$ (式(5.4)の下側)を計算する:

上の(1), (2)で求めた x_d, x_r を代入して、

$$b_K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} b - \frac{(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} b = \frac{1 - (v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} b$$

$$\text{ここで, } 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \star \text{ とすれば, } b_K = \frac{\star}{\sqrt{\star}} b = \sqrt{\star} b = b\sqrt{\star} \left[\begin{array}{l} b \text{ が平方根の中に入ってい} \\ \text{ないことを明示するために,} \\ \text{かけ算の順番を代えた。} \end{array} \right]$$

$$\text{つまり, } \underline{b_K = b\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\text{前回の付録 4.2 と同じ結果}) \quad \text{-----(5.5)}$$

$$\implies \text{『慣性系 K で測る「K' の棒」の長さ』} = \text{『慣性系 K' で測る自分の棒の長さ』} \times \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

よって、慣性観測者 K は K にとって同時刻の OP 間距離を考えて、「別の慣性観測者 K' の棒の長さ」 b_K が「K' 自身が測る長さ」 b の $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍である、と判断する。($v < c$ より $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} < 1$ である。)

補足: ローレンツ変換によって、付録 4.2 で行った双曲線と直線の交点の計算が楽になった。ただし、双曲線(時空距離の式)を利用した計算は、付録 5.1『ローレンツ変換の導出』の第3段階に入っているの、この §5.2 の計算は(結局、双曲線と直線を暗に利用しているという意味で)付録 4.2 の計算と同じだと見なせる。

付録 5.1 : ローレンツ変換 (式 (5.1)) の導出 (図 5.7)

状況設定 : §5.1 と同じ - 図 5.1, 5.7 -

* 慣性系 K の x 軸方向に, 別の慣性系 K' が速度 v で慣性運動 (等速直線運動) している。

* 任意の事象 E について, $\begin{cases} \text{慣性系 K で測る座標} & : (ct_e, x_e) \\ \text{慣性系 K' で測る座標} & : (ct'_e, x'_e) \end{cases}$

* ct' 軸と x' 軸の直線をあらわす方程式 (復習) :

$$ct' \text{ 軸} : \begin{cases} \text{慣性系 K で見ても (変数は } ct, x) & : ct = \frac{c}{v} x & \text{---(5A.1)} \\ \text{慣性系 K' で見ても (変数は } ct', x') & : x' = 0 \end{cases}$$

$$x' \text{ 軸} : \begin{cases} \text{慣性系 K で見ても (変数は } ct, x) & : ct = \frac{v}{c} x & \text{---(5A.2)} \\ \text{慣性系 K' で見ても (変数は } ct', x') & : ct' = 0 \end{cases}$$

- 図 5.7 -

何を考えるか? (証明の方針) - 図 5.7 -

座標軸の目盛り付けは「時空距離が一定の曲線 (双曲線) と座標軸の交点」で行った (§4.1)

→ 時空距離が基準だから, 「座標軸に沿った時空距離」で座標軸の目盛りを測れる。

→ 図 5.7 で, $\begin{cases} ct'_e = \text{「事象 OA 間の時空距離 } s_a \text{」} \\ x'_e = \text{「事象 OB 間の時空距離 } s_b \text{」} \end{cases}$ だと分かる。

→ 式 (5.1) を導くには, 時空距離 s_a と s_b を計算すればよいことが分かる。

ローレンツ変換 (5.1) の導出

慣性系 K で見た事象 E の座標 (ct_e, x_e) は決まっているとして, 慣性系 K' で見た事象 E の座標 (ct'_e, x'_e) を求める。 (ct'_e, x'_e を ct_e, x_e の式で表わす。) → 証明は次の 3 段階に分ける。

第 1 段階 : 図 5.7 の事象 A, B の, 慣性系 K で見た座標を求める :

◇ 事象 A は, $\begin{cases} ct' \text{ 軸} & : ct = \frac{c}{v} x \\ \text{E を通り } x' \text{ 軸に平行な直線} & : ct = \frac{v}{c} x - \frac{v}{c} x_e + ct_e \quad (\text{補足 2 を参照}) \end{cases}$ の交点である。

⇒ 補足 3 の計算より, 慣性系 K で見た A の座標 (ct_a, x_a) は,

$$(ct_a, x_a) = \left(\frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c} x_e \right), \frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c} x_e \right) \right)$$

◇ 事象 B は, $\begin{cases} x' \text{ 軸} & : ct = \frac{v}{c} x \\ \text{E を通り } ct' \text{ 軸に平行な直線} & : ct = \frac{c}{v} x - \frac{c}{v} x_e + ct_e \quad (\text{補足 2 を参照}) \end{cases}$ の交点である。

⇒ 補足 4 の計算より, 慣性系 K で見た B の座標 (ct_b, x_b) は,

$$(ct_b, x_b) = \left(\frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e \right), \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e \right) \right)$$

第 2 段階 : 図 5.7 の事象 A, B の, 慣性系 K' で見た座標を設定する :

◇ 事象 A は ct' 軸上 ($x' = 0$) ⇒ 慣性系 K' で見た A の座標 : $(ct'_a, x'_a) = (ct'_e, 0)$

◇ 事象 B は x' 軸上 ($ct' = 0$) ⇒ 慣性系 K' で見た B の座標 : $(ct'_b, x'_b) = (0, x'_e)$

→ 次の第 3 段階で, この ct'_e, x'_e を ct_e, x_e の式で表わしていく。

第3段階：§2.2 でまとめた『時空距離の不変性（時空距離 s_a, s_b は K で測っても、 K' で測っても同じ値）』を利用して式 (5.1) を導く：

時空距離の不変性から（事象 A, B それぞれについて）「第1段階で得た座標で計算する時空距離」と「第2段階で得た座標で計算する時空距離」は等しいので、

$$s_a^2 = \begin{cases} -(ct_a)^2 + x_a^2 = -\frac{1}{1-(v/c)^2} (ct_e - \frac{v}{c}x_e)^2 & : \text{慣性系 } K \text{ で測って計算} \\ -(ct'_a)^2 + x'^2_a = -(ct'_e)^2 & : \text{慣性系 } K' \text{ で測って計算} \end{cases} \quad \text{---(5A.3)}$$

$$s_b^2 = \begin{cases} -(ct_b)^2 + x_b^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2} (-\frac{v}{c}ct_e + x_e)^2 & : \text{慣性系 } K \text{ で測って計算} \\ -(ct'_b)^2 + x'^2_b = x'^2_e & : \text{慣性系 } K' \text{ で測って計算} \end{cases} \quad \text{---(5A.4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{式 (5.8) より, } (ct'_e)^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2} (ct_e - \frac{v}{c}x_e)^2 \\ \text{式 (5.9) より, } x'^2_e = \frac{1}{1-(v/c)^2} (-\frac{v}{c}ct_e + x_e)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct'_e = \pm \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (ct_e - \frac{v}{c}x_e) \\ x'_e = \pm \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (-\frac{v}{c}ct_e + x_e) \end{cases} \quad \text{---(5A.5)}$$

時空距離の定義式 (3.1) から $\sqrt{1-(v/c)^2}$ という係数が出てきていることが分かる。この係数 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ は、まさに、特殊相対論の時空距離が測定値に与える影響を表している。

あとは、式 (5A.5) の右辺の符号（+ か - か）のどちらが正しいのかを決めればよい。

ところで、慣性観測者 K' の速度 v がたまたまゼロのとき慣性系 K と慣性系 K' は同じなので、

$$v = 0 \text{ のとき } \begin{cases} ct \text{ 軸と } ct' \text{ 軸が重なり, } ct'_e = ct_e \\ x \text{ 軸と } x' \text{ 軸が重なり, } x'_e = x_e \end{cases} \quad \text{---(5A.6)}$$

である。この要請 (5A.6) より、式 (5A.5) の符号は + を選ばなければならない。

したがって、次の関係式が得られる：

$$\begin{cases} ct'_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (ct_e - \frac{v}{c}x_e) \\ x'_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (-\frac{v}{c}ct_e + x_e) \end{cases}$$

これは式 (5.1) と同じである。

[証明終]

補足1：式 (5.1) の導出の第3段階で、時空距離 $s^2 = -(ct)^2 + x^2$ （今は y, z 座標は考えていないので省略）を利用した。一方、この時空距離 s が一定の曲線が、 ct - x 時空図の上で双曲線を描くのであった。よって、上の第3段階は双曲線を利用した計算である、と言える。

補足2：式 (5.1) の導出の第1段階で利用した『事象 E を通る直線』の方程式を立てる計算：

ct - x 時空図の上で、事象 E を通る『（ x 軸からの）傾きが k の直線』を考える。

… この傾きが $\begin{cases} x' \text{ 軸 (式 (5A.2)) と同じ } k = \frac{v}{c} \text{ の場合, 事象 A の計算で使う直線} \\ ct' \text{ 軸 (式 (5A.1)) と同じ } k = \frac{c}{v} \text{ の場合, 事象 B の計算で使う直線} \end{cases}$ になる。

（ x 軸からの）傾きが k の直線なので、次のように表わせる： $ct = kx + l$ （ l は定数）

(補足2の続き)

$$\text{この直線が事象 E を通るので, } ct_e = kx_e + l \iff l = -kx_e + ct_e$$

$$\text{よって, 事象 E を通る傾き } k \text{ の直線の方程式は, } ct = kx - kx_e + ct_e$$

$$\text{したがって, } \begin{cases} \text{事象 E を通り } x' \text{ 軸に平行な直線} & : ct = \frac{v}{c}x - \frac{v}{c}x_e + ct_e \\ \text{事象 E を通り } ct' \text{ 軸に平行な直線} & : ct = \frac{c}{v}x - \frac{c}{v}x_e + ct_e \end{cases}$$

補足3: 慣性系 K で測った事象 A の座標 (ct_a, x_a) を求める。

$$\text{次の連立方程式を解けばよい: } \begin{cases} ct = \frac{c}{v}x & \text{---(5A.7)} \\ ct = \frac{v}{c}x - \frac{v}{c}x_e + ct_e & \text{---(5A.8)} \end{cases}$$

$$\text{両方の式から, } (ct =) \frac{c}{v}x = \frac{v}{c}x - \frac{v}{c}x_e + ct_e$$

$$\text{両辺を } \frac{v}{c} \text{ 倍して, } x = \left(\frac{v}{c}\right)^2 x - \left(\frac{v}{c}\right)^2 x_e + \frac{v}{c} ct_e \iff \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)x = \frac{v}{c} ct_e - \left(\frac{v}{c}\right)^2 x_e$$

$$\iff \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)x = \frac{v}{c} \left(ct_e - \frac{v}{c}x_e\right) \iff x = \frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c}x_e\right)$$

$$\text{これを式 (5A.7) に代入して, } ct = \frac{c}{v} \frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c}x_e\right) = \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c}x_e\right)$$

$$\text{よって, 事象 A の座標 } (ct_a, x_a) = \left(\frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c}x_e\right), \frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(ct_e - \frac{v}{c}x_e\right) \right)$$

補足4: 慣性系 K で測った事象 B の座標 (ct_b, x_b) を求める。

$$\text{次の連立方程式を解けばよい: } \begin{cases} ct = \frac{v}{c}x & \text{---(5A.9)} \\ ct = \frac{c}{v}x - \frac{c}{v}x_e + ct_e & \text{---(5A.10)} \end{cases}$$

$$\text{両方の式から, } (ct =) \frac{v}{c}x = \frac{c}{v}x - \frac{c}{v}x_e + ct_e$$

$$\text{両辺を } \frac{v}{c} \text{ 倍して, } \left(\frac{v}{c}\right)^2 x = x - x_e + \frac{v}{c} ct_e \iff \left(-1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)x = \frac{v}{c} ct_e - x_e$$

$$\text{両辺を } -1 \text{ 倍して, } \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)x = -\frac{v}{c} ct_e + x_e \iff x = \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e\right)$$

$$\text{これを式 (5A.9) に代入して, } ct = \frac{v}{c} \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e\right) = \frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e\right)$$

$$\text{よって, 事象 B の座標 } (ct_b, x_b) = \left(\frac{(v/c)}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e\right), \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left(-\frac{v}{c} ct_e + x_e\right) \right)$$

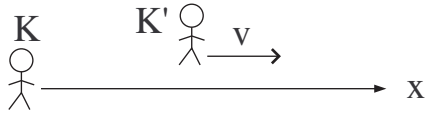


図 5.1 : 状況設定

ローレンツ変換を扱うときは、『時空図上で、どことどこの座標値の関係を与える式なのか?』に注意。

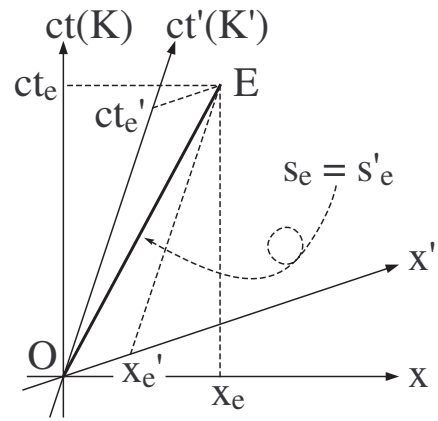


図 5.2 : ローレンツ変換

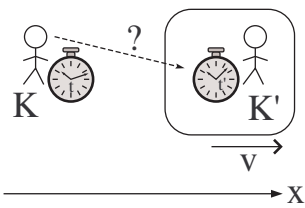


図 5.3 : 『時間の遅れ』状況設定

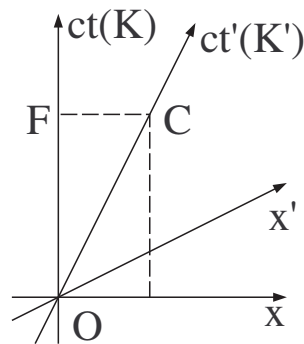


図 5.4 : 『時間の遅れ』の時空図

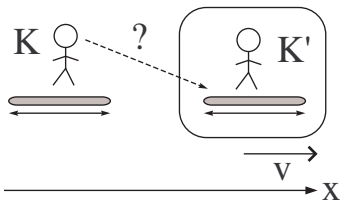


図 5.5 : 『ローレンツ収縮』状況設定

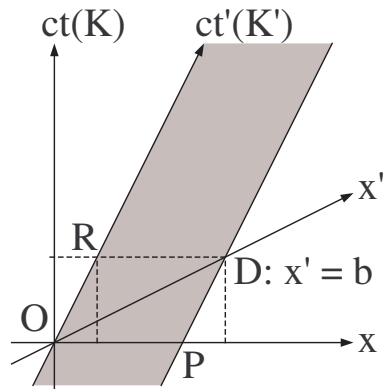
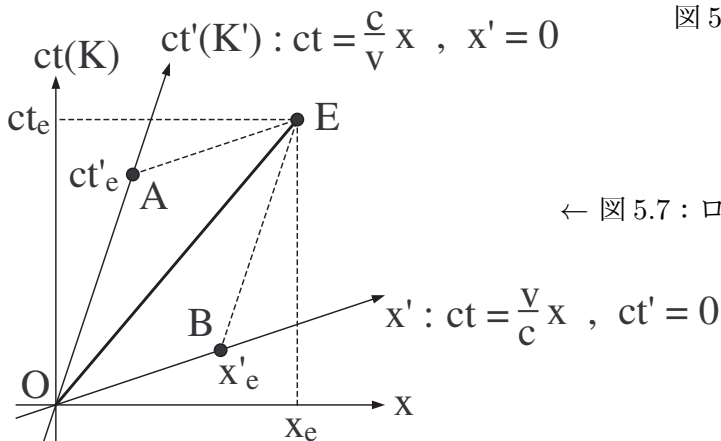


図 5.6 : 『ローレンツ収縮』の時空図



← 図 5.7 : ローレンツ変換の導出

問題

慣性観測者 K の x 軸方向に、別の慣性観測者 K' が速度 $v = c/10$ (光速の 10%) で慣性運動しているとする。このとき、『時間の遅れ』は §5.2 の式 (5.3), 『ローレンツ変換』は §5.3 の式 (5.5) で計算できる。これらの式から、 K は K' の時間も長さも $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍だけ遅くあるいは短くなったと認識することが分かる。

なお、平方根の答えには、有効数字 3 桁の値もカッコで示すこと (例: $\sqrt{3}$ ($\doteq 1.73$) [cm])。電卓を使ってよい。

(a) 慣性観測者 K と K' は、時刻 O を同じ事象で合わせた時計を持っているとする。(時空図で、 ct 軸と ct' 軸の原点 O は共通だということ。)

a-1) K が K' の時計が示す時刻を観測する場合を考える。 K は、 K' の時計は自分の時計の何倍の時刻になっていると認識するか?

a-2) 逆の場合で、 K' が K の時計が示す時刻を観測する場合を考える。 K' は、 K の時計は自分の時計の何倍の時刻になっていると認識するか? (§4.2 で『 K も K' もお互いに、お互いの時間が遅くなったと認識する』が分かったことに注意。)

(b) 慣性観測者 K と K' は、それぞれ (自分で測ったときの) 長さが 30 [cm] の棒を持っているとする。ただし、どちらも棒を K' の速度の向きに向けて持つとする。

b-1) K が測る「 K' の棒」の長さを求めよ。

b-2) 逆の場合で、 K' が測る「 K の棒」の長さを求めよ。(§4.3 で『 K も K' もお互いに、お互いの長さが短くなったと認識する』が分かったことに注意。)

§6. 速度合成則と因果律, 光円錐

§6.1 問題設定 (図 6.1)

状況設定: * 慣性観測者 K から見て x 軸方向に, 別の慣性観測者 K' が速度 v で慣性運動している。

$$* \text{座標の変数: } \begin{cases} \text{慣性系 K の座標} : (ct, x) \\ \text{慣性系 K' の座標} : (ct', x') \end{cases} \quad (y, z \text{ 座標は省略})$$

* 慣性観測者 K' が x' 軸方向に (K' から見た) 速度 u' で物体 A を発射する。

* v も u' も光速 c 以下 ($-c \leq v \leq c, -c \leq u' \leq c$) とする。

問題: 慣性観測者 K が測る物体 A の速度 u はいくらか? (u を v, u', c を使って表したい。)

§6.2 速度合成の定性的理解 (図 6.2, 6.3)

● 例: $v = \frac{2}{3}c, u' = \frac{2}{3}c$ の場合 - 図 6.2 -

→ ニュートン力学が正しければ $u = v + u' = \frac{4}{3}c (> c)$ で, 光速を超える, と結論してしまう。

→ しかし, 以下で分かるように相対論では光速以下になる!

図 6.2 で, この例で『慣性系 K で測る物体 A の速度 u が光速以下 ($u < c$) になる』を定性的に理解:

- 図 6.2a: 慣性系 K に対する ct - x 時空図の正方形マス目の一つと, 慣性観測者 K' の世界線 (ct' 軸), x' 軸。
- 図 6.2b: 慣性系 K の時空図に描いた, 慣性系 K' のひし形マス目の一つ。
時空距離が一定の双曲線に基いて, ct' 軸と x' 軸の目盛をつけている。
- 図 6.2c: 慣性系 K' のひし形マス目と物体 A の世界線。

→ 図 6.2c に作図したように, 物体 A の世界線は『光の世界線より ct 軸側』に傾いている。

→ 観測系 K で測っても, 物体 A の速度は光速より遅いこと ($u < c$) を意味する!

● 速度 v, u' が任意の場合 (単純化して v も u' も正, $0 < v \leq c, 0 < u' \leq c$, とする): - 図 6.3 -

この場合も, 図 6.3 から『慣性系 K で測る物体 A の速度は光速以下 $u \leq c$ 』が定性的に分かる:

- 図 6.3a: 慣性系 K の正方形マス目の一つと, K' の世界線。(上の例の図 2a に対応)
- 図 6.3b: 慣性系 K' のひし形マス目と物体 A の世界線。(上の例の図 2c に対応)
- 図 6.3c: 慣性系 K で測る物体 A の速度 u と正方形マス目。
- 図 6.3d: 正方形マス目, ひし形マス目, 物体 A の世界線, のまとめ。

→ 図 6.3b に作図したように, 物体 A の世界線は『光の世界線より ct 軸側』に傾いているので, $u \leq c$ である。

さらに, 図 6.3c の x 軸上の目盛を比べても, $u \leq c$ が読み取れる。

→ よって, v と u' が光速以下であれば, 慣性系 K で測った物体 A の速度も必ず光速以下 ($u \leq c$) である, ことが分かる。(以上は図による $u \leq c$ の理解。§6.4 で, 定量的な理解・証明も行う。)

§6.3 速度合成則 (図 6.4)

目的: 慣性系 K で測る物体 A の速度の計算式 (u を v, u', c で表す式) を速度合成則という。それを導く。

速度合成則の導出

物体 A の速度を知りたいので, A の世界線上の事象 P に注目する。

$$\text{事象 P の座標: } \begin{cases} (ct_p, x_p) : \text{慣性系 K で測った座標} \\ (ct'_p, x'_p) : \text{慣性系 K' で測った座標} \end{cases} \quad - \text{図 6.4} -$$

ローレンツ変換で (ct_p, x_p) と (ct'_p, x'_p) は結びつく。ローレンツ変換の逆 (§5.1 の式 (5.2)) より、

$$\begin{cases} ct_p = \gamma \left(ct'_p + \frac{v}{c} x'_p \right) \\ x_p = \gamma \left(\frac{v}{c} ct'_p + x'_p \right) \end{cases} \quad \text{ただし, } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{---(6.1)}$$

一方、事象 P の座標を使って速度を表わすと、

$$\begin{cases} \text{慣性系 K' で測る物体 A の速度 } u' = \frac{x'_p}{t'_p} & \text{---(6.2)} \\ \text{慣性系 K で測る物体 A の速度 } u = \frac{x_p}{t_p} = \frac{x_p}{ct_p} c & \text{---(6.3)} \end{cases} \quad (\leftarrow \text{これを } v, u', c \text{ で表したい})$$

よって、式 (6.3) に式 (6.1) を代入して、
$$u = \frac{\gamma \cdot \frac{v}{c} ct'_p + x'_p}{\gamma \left(ct'_p + \frac{v}{c} x'_p \right)} \cdot c = 1 \cdot \frac{\left(\frac{v}{c} ct'_p + x'_p \right) c}{ct'_p + \frac{v}{c} x'_p} = \frac{v ct'_p + c x'_p}{ct'_p + \frac{v}{c} x'_p}$$

分母、分子をそれぞれ $\frac{1}{ct'_p}$ 倍して、
$$u = \frac{\frac{1}{ct'_p} (v ct'_p + c x'_p)}{\frac{1}{ct'_p} \left(ct'_p + \frac{v}{c} x'_p \right)} = \frac{v + \frac{x'_p}{t'_p}}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{x'_p}{t'_p}}$$

式 (6.2) を代入して、
$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'} = \frac{v + u'}{1 + \frac{v u'}{c^2}}$$

以上より、速度合成則：
$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v u'}{c^2}} \quad \text{---(6.4)}$$

補足：§6.2 の例に速度合成則 (6.4) を適用すると、

$$u' = \frac{2}{3}c, v = \frac{2}{3}c \text{ なので, } u = \frac{(4/3)c}{1 + \frac{(2/3)^2 c^2}{c^2}} = \frac{(4/3)}{1 + (4/9)} c = \frac{12}{13} c (< c) \quad \dots \text{光速以下!}$$

§6.4 『光速を超えられない』こと (計算に基いた証明)

任意の $v (0 < v \leq c)$, $u' (0 < u' \leq c)$ に対して $u \leq c$ が成立することが証明できれば、『光速以下の速度を合成しても、光速を超える速度にならない』ことが分かる。

光速を超えられないこと $u \leq c$ の証明

$c - u \geq 0$ を示せばよい。そこで、 $c - u$ に式 (6.4) を代入すると、

$$\begin{aligned} c - u &= \frac{c \left(1 + \frac{v u'}{c^2} \right)}{1 + \frac{v u'}{c^2}} - \frac{v + u'}{1 + \frac{v u'}{c^2}} = \frac{c + \frac{v u'}{c} - (v + u')}{1 + \frac{v u'}{c^2}} = \frac{\frac{1}{c} [c^2 + v u' - c(v + u')]}{1 + \frac{v u'}{c^2}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{c^2 + v u' - c v - c u'}{1 + \frac{v u'}{c^2}} \\ &= \frac{(c - v)(c - u')}{c \left(1 + \frac{v u'}{c^2} \right)} \quad (\leftarrow \text{分母は明らかに正の値。分子が負になるかどうか問題}) \quad \text{---(6.5)} \end{aligned}$$

よって、 $c \geq v, c \geq u'$ より式 (6.5) の分子はゼロ以上なので $c - u \geq 0$, つまり $u \leq c$ であることが分かる。

したがって、相対論では (光速以下の速度を合成しても) 決して光速を超えることは出来ない!

なお、等号 $u = c$ は、 $v = c$ または $u' = c$ のときに成立する。つまり、少なくとも慣性観測者 K' か物体 A の一方の速度が光速でないと、合成した速度 u は光速に達しない。

§6.5 因果律, 光円錐 (図 6.5, 6.6, 6.7)

- §6.4 の『光速を超えられない定理』より, あらゆる物体が描く世界線は,

光の世界線と同じ傾きか, それより時間軸側に傾いた世界線 (光を追い越すような運動は不可能)

であることが分かる。- 図 6.5 -

→ ある事象 P で起きた現象 (爆発, 発光, 化学反応, など) と因果関係を持ち得る事象が, 時空のどの領域にあるかが, 以下のように判断できる。

- ある事象 P を頂点とする 光円錐 - 図 6.6 -

事象 P を通る光の世界線で構成される面を『(P を頂点とする) 光円錐』という。

→ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{次元時空の中では, 円錐的 } 3 \text{次元面。 (理論のプロはこれをイメージしようと頑張る。)} \\ \text{次元を } 1 \text{つ落として, } 3 \text{次元時空の中に描くと, 通常} \text{の円錐になる - 図 6.6 (右側) -} \end{array} \right.$

例: 2次元の時空図, 3次元の時空図 (ミンコフスキー時空) で表す光円錐 - 図 6.6 -

原点を頂点とする光円錐:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{図 6.6 (左側): } y, z \text{座標は省略し, } ct-x \text{時空図で図示した光円錐} \\ \text{図 6.6 (右側): } z \text{座標は省略し, } ct-x-y \text{時空図で図示した光円錐} \end{array} \right.$

→ この例に現れる因果律: $\left\{ \begin{array}{l} \text{光円錐の内側 (図 6.6 の灰色部分) を, 原点に関する時間的領域という。} \\ \quad \rightarrow \text{原点と因果関係を持つことが } \underline{\text{可能}}! \\ \text{光円錐の内側 (図 6.6 の白色部分) を, 原点に関する空間的領域という。} \\ \quad \rightarrow \text{原点と因果関係を持つことが } \underline{\text{不可能}}! \end{array} \right.$

- 時空図から読み取る因果関係の例 - 図 6.7 -

◇ 事象 Q の時間的領域の中に事象 R がある。

→ Q で起こる現象は, R で起こる現象に影響を与えられる。その逆は不可能。

◇ 事象 P の空間的領域の中に事象 R がある。

→ P で起こる現象は, R で起こる現象に何の影響も与えられない。

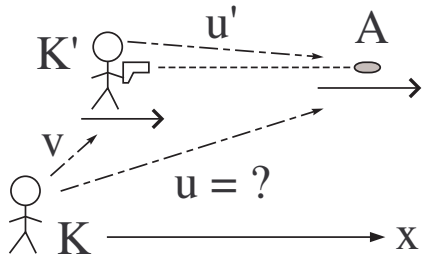


図 6.1 : 問題設定

時空図に関する補足

- 特殊相対論では、慣性系 K の時空図の中に描いた『別の慣性系 K' の ct' 軸と x' 軸』は『ひし形マス目』を作り出すことに注意 (図 6.2 と図 6.3)。この『ひし形マス目』のおかげで、どの慣性系で測っても光速が同じ値 c になる。
- 同一の量 (例えば座標や速度) を慣性系 K で測ったり別の慣性系 K' で測ったりする場合、正方形マス目とひし形マス目の使い分けに注意が必要。

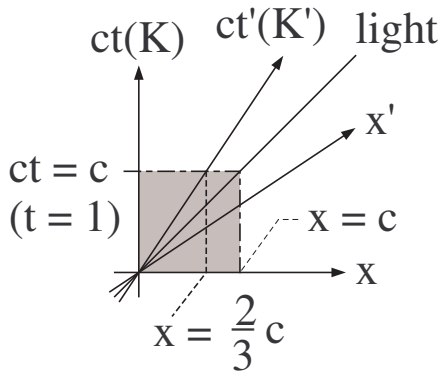


図 6.2a : 慣性系 K の ct-x 時空図の正方形マス目 (灰色) と、速度 $v = \frac{2}{3}c$ で運動する慣性観測者 K'

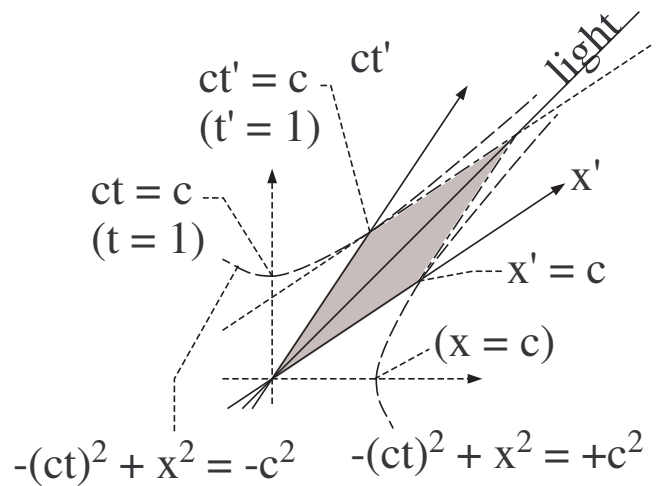


図 6.2b : 慣性系 K の時空図に描いた、慣性系 K' のひし形マス目 (灰色)

… 時空距離が一定になる双曲線で、ct' 軸と x' 軸の目盛をつけている。(§4.1 参照)

↑

ct 軸上で $ct = 1$ [m] は、実際の時間に換算すると、 $t = \frac{1}{c}$ [s] に対応する。

↓ 物体 A の世界線を記入 …

慣性系 K' で測る物体 A の速度 $u' = \frac{2}{3}c$ は、ひし形マス目で測る速度である。図 6.2c のように作図できて、物体 A の世界線は『光の世界線よりも ct 軸側に傾く』ことが分かる。これは、慣性系 K で測る物体 A の速度も光速以下 $u < c$ であることを意味する。

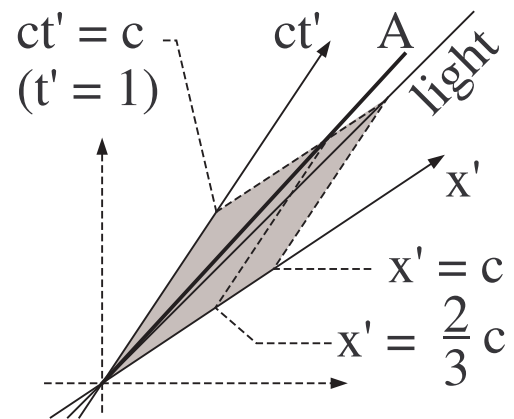


図 6.2c : 慣性系 K' のひし形マス目 (灰色) と物体 A の世界線 (太線)

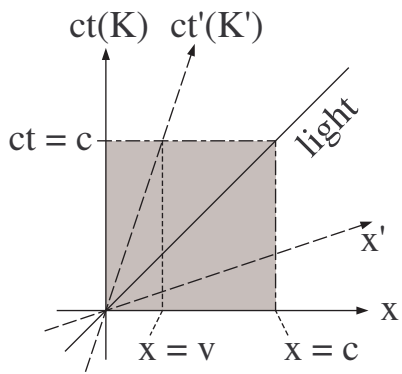


図 6.3a: 慣性系 K の ct - x 時空図の正方形マス目 (灰色) と速度 v の観測者 K'

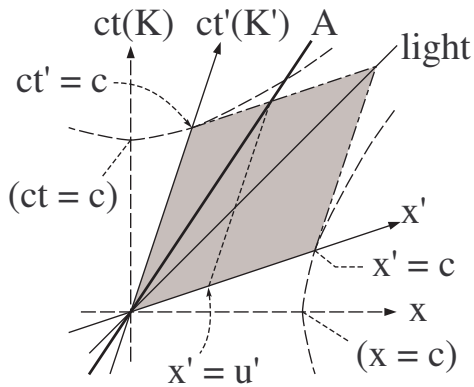


図 6.3b: 慣性系 K' のひし形マス目 (灰色) と物体 A の世界線 (太線)

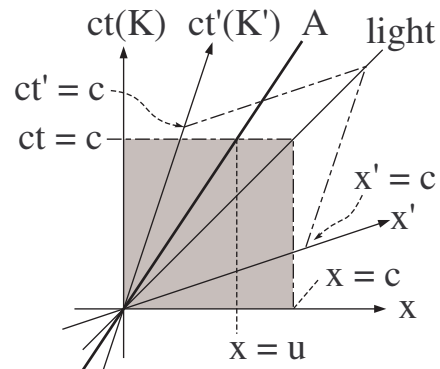


図 6.3c: 慣性系 K で測る, 物体 A の速度 u と正方形マス目
→ この図で $u \leq c$ が読み取れる。

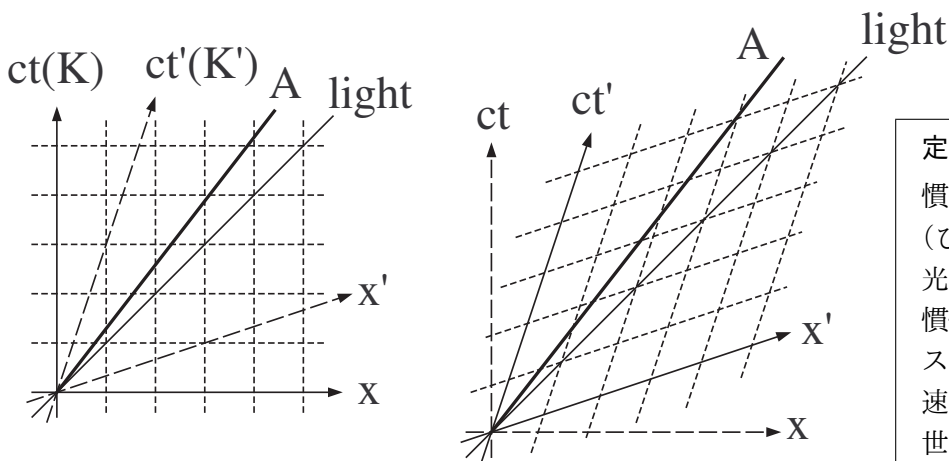
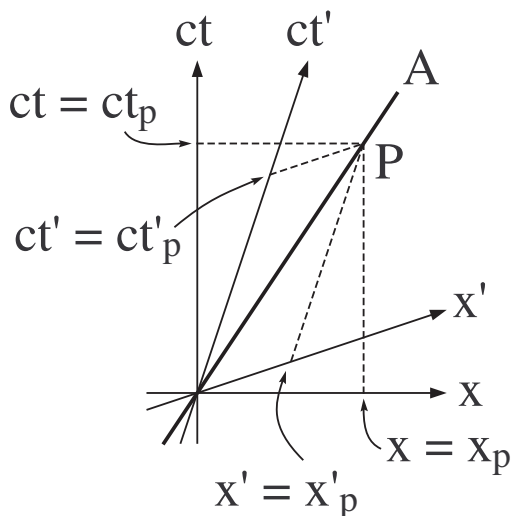


図 6.3d: 正方形マス目, ひし形マス目, そして物体 A の世界線

定性的な理解:

慣性系 K' で測る物体 A の速度 (ひし形マス目で測る速度) が光速以下 $u' < c$ である限り, 慣性系 K で測る速度 (正方形マス目で測る速度) は, 決して光速を超えない $u < c$ (物体 A の世界線は光の世界線より ct 軸側に位置すること) が分かる。



← 図 6.4: 速度合成則の計算式の導出

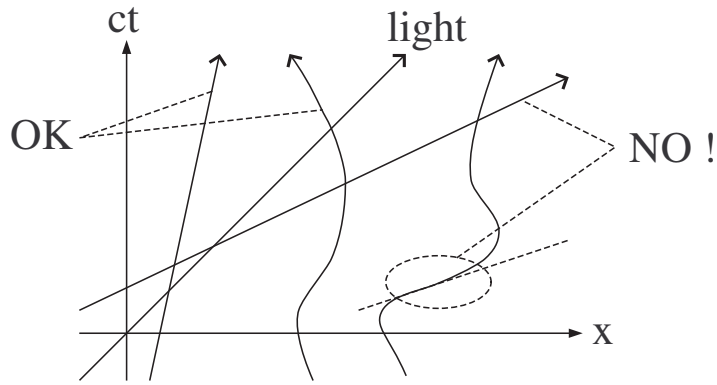


図 6.5 : 物体の運動として可能な世界線と不可能な世界線

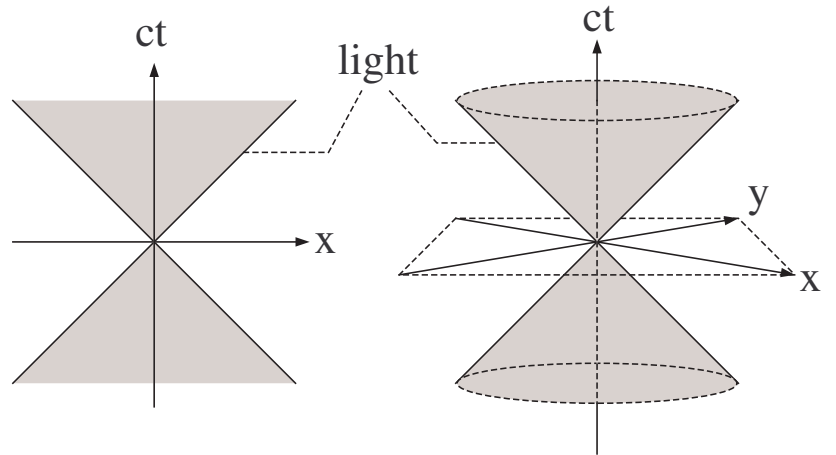


図 6.6 : 原点を頂点とする光円錐

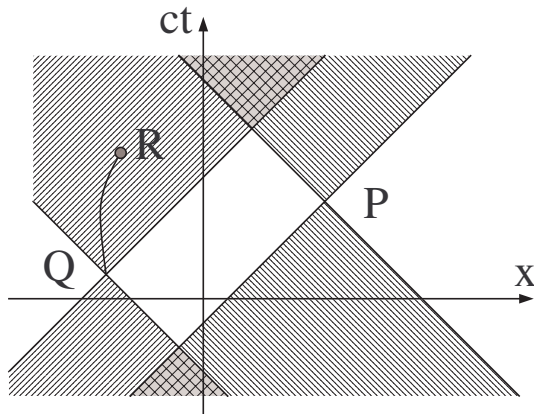


図 6.7 : 因果関係

物理学探究講座 第 1 部 練習問題

問題

慣性観測者 K に対して、別の慣性観測者 K' が速度 v で慣性運動している (§6.1 と同様の状況設定)。そして、慣性観測者 K' が (速度 v と同じ向きに) 光を放った。慣性観測者 K が測定するこの光の速度が、やはり c になることを示せ。(速度合成則 (6.4) を使えばよい。)

* これは、§1 の図 1.2 (の左側の図) で示す内容に対応する。

§7. 質量エネルギー

§7.1 ニュートン力学 (高校理科でも扱う力学) のポイント (図 7.1, 7.2, 7.3)

注意: この §7.1 では, ひとまず相対論は忘れる。時間と空間が完全に区別されるニュートンの考え方に基づく力学のポイントをまとめる。

- 力学の目的: 『物体は, どんな条件でどんな運動をするのか?』を知ること。

→ 最も重要な知識: 運動方程式: $F = ma$... $\begin{cases} m \text{ [kg]} & : \text{物体の質量} \\ a \text{ [m/s}^2] & : \text{物体の加速度} \\ F & : \text{物体に働く力} \end{cases}$ - 図 7.1 -

なぜ運動方程式が成立するのかという根本的な理由は分からない。しかし, 実験的に正しいことが確認されている法則であり, 覚えるしかない。なお, 運動方程式が成立することを初めて見出した (発見した) のがニュートン。

補足 1: 日常生活の経験から明らかに, 速度にも力にも, その大きさ (強さ) と向きがある。そこで, 図 7.1 では, 速度や力を矢印で描いてある (数学の「ベクトル」)。長い矢印ほど, 速度は大きく, 力は強い。

補足 2: 速度は単位時間あたりの位置の変化量

→ 時間 Δt [s] の間に, 位置が x_1 [m/s] から x_2 [m/s] に変化したとき, 速度 $v = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$ [m/s]

同様に, 加速度は単位時間あたりの速度の変化量 -図 7.1-

→ 時間 Δt [s] の間に, 速度が v_1 [m/s] から v_2 [m/s] に変化したとき, 加速度 $a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ [(m/s)/s]

加速度の単位: [(m/s)/s] = [m/s²]

補足 3: 力 F の単位は, 運動方程式から決まる: [kg · m/s²]

→ この単位は頻繁に登場するので略称が付いている: [kg · m/s²] = [N] (ニュートン)

補足 4: 力学の目的を達成する基本手順

(1) 力 (と質量) を測定して, 運動方程式から加速度 $a = \frac{F}{m}$ を得る。

(2) 加速度から速度を得る。

(3) 速度から位置を得る。

この手順で, 物体の位置が時々刻々とどう変化するか (つまり物体の運動) を知ることができる。

* 補足 4 の基本手順を正確に実行するために必要な数学は「微分・積分」である。運動方程式を (天体の運動の観測データなどから) 見抜いたニュートンは, 上記の手順を実行するための道具として微分・積分という数学も開発した。ニュートンは, 運動方程式の発見と微分・積分という数学の開発を行った天才であった。

* しかし, 高校の理科では微分・積分を使わないことにしているので, 本当なら微分・積分も使った結果として導かれることを, とりあえず公式として (とりあえず覚えるという暗記モノとして) 天下りの的に与えることも多い。高校生には, 決して物理を暗記科目だとは思ってほしくない。

- 1 [N] の力とはどれくらいの強さか?

... 例えば地球上で感じる重力を通して, [N] という単位の感覚がつかめる。

→ 質量 m [kg] の物体に働く地球からの重力 F は次のように計算できることが実験で分かっている:

地表での重力: $F = mg$ [N] ここで, $g \doteq 9.8$ [m/s²]: 重力加速度

→ 質量 100 [g] (= 0.1 [kg]) の物体に働く地表での重力が, $F \doteq 0.1 \times 9.8 = 0.98 \doteq 1$ [N] である。

注意1: ただし, この式 $F = mg$ は地表付近で近似的に正しいものであり, 厳密には地表面から離れると正しくない。もっと正確には g の値が地球の重心からの距離によって変わることを考慮する必要がある。そして, ニュートンは運動方程式と微積分だけでなく, 重力の計算式も実験的に定式化した。それが §0.1 の式 (0.2) であり, ニュートン重力 (万有引力) という。

注意2: 比例係数 g の単位は加速度と同じ単位でないと, mg という掛け算の単位が [N] にならない。そこで, この比例係数 g を重力加速度と言う。

● 力の頑張り具合を評価する量 - 図 7.2 -

→ 動かす物体が重いほど (つまり加える力が強いほど), 動かす距離が長いほど, 頑張ったな~と思う。

$$\rightarrow \boxed{\text{仕事: } W = F_x L \text{ [N} \cdot \text{m]}} \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x \text{ [N]} \quad : \text{力の「移動方向」成分} \\ L \text{ [m]} \quad : \text{物体の移動距離} \end{array} \right. \quad - \text{図 7.2} -$$

補足5: あくまでも「物体が移動した方向に」頑張った分を評価することにして, F_x を考える。

補足6: 仕事の単位: $[\text{N} \cdot \text{m}] = [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2]$

→ この単位は頻繁に登場するので略称が付いている: $[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2] = [\text{J}]$ (ジュール)

● 単位が [J] になる量は, 必ずしも「力」×「距離」でなくても現れる。

→ $\boxed{\text{単位が [J] であり, かつ向きを持たない量をエネルギーと言う。}}$

→ 仕事はエネルギーの一種である。

補足7: 世の中の量には「向きを持つ量」(速度や力など)と「向きを持たない量」(質量や温度など)がある。エネルギーも向きを持たない量である。

補足8: カロリー [cal] もエネルギーの単位である。ジュールとの換算は, $1 \text{ [cal]} = 4.1855 \text{ [J]}$ である。

→ 1 [cal] は『水 1 [g] の温度を 1 [°C] だけ上昇させるのに必要なエネルギー (熱量)』である。
(火などによる加熱で与えられるエネルギーを熱, 熱量, 熱エネルギー, などと言う。)

問題: 体重 $m = 60 \text{ [kg]}$ の人が, 階段 (or 山) を登ることで 1000 [kcal] を消費するには, 何メートル登ればよいか? ただし, 重力加速度 $g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$, $1 \text{ [cal]} = 4.2 \text{ [J]}$ とし, $1 \text{ [kcal]} = 1000 \text{ [cal]}$ である。なお, 階段を登るときに脚で加える力は, 身体に働く重力と同じ強さだとする。

解答: 階段を上るとは, 脚の力で自分の身体を持ち上げることである。

よって, 「脚の力」×「身体の上昇距離」という仕事 (エネルギー) だけカロリー消費することになる。

階段で登る距離を $L \text{ [m]}$ とすると, 脚の力で行う仕事は,

$$W = mgL = 60 \times 9.8 \times L = 588 L \text{ [J]}$$

この仕事の単位を [J] から [cal] に換算すると,

$$W = 588 L \text{ [J]} = \frac{588}{4.2} L \text{ [cal]} = 140 L \text{ [cal]}$$

この仕事 (エネルギー) が, $1000 \text{ [kcal]} = 1000000 \text{ [cal]} = 10^6 \text{ [cal]}$ になればよいので,

$$140 L = 3 \times 10^6 \implies L = \frac{1}{140} \times 10^6 \div 0.0071 \times 10^6 = 7.1 \times 10^3 \text{ [m]} = 7.1 \text{ [km]}$$

体重 60 [kg] の人が 1000 [kcal] の食事を山登りだけで消費するには, 7.1 [km] 登らなければならない。

● 物体に力を加えると速度が変わる – 図 7.3 –

→ 静止していた物体に力を加えると、加速する。(運動方程式から分かる。)

→ 物体が速度ゼロからある速度 v [m/s] まで加速する間に、力は物体に仕事を与える。

→ 仕事はエネルギーの一種なので、この仕事の分だけ物体にエネルギーが注入されたことになる。(図 7.3)

→ このように、速度を持つことで得るエネルギーを **運動エネルギー** という。

→ 運動方程式と微分・積分を利用して運動エネルギーを計算すると、次のようになることが分かっている：

$$\boxed{\text{運動エネルギー： } K = \frac{1}{2} m v^2 \text{ [J]}} \quad \dots \quad \begin{cases} m \text{ [kg]} & \text{: 物体の質量} \\ v \text{ [m/s]} & \text{: 物体の速度} \end{cases} \quad \text{– 図 7.3 –}$$

補足 9：運動エネルギーは速度の向きには寄らず、速度の大きさ（と質量）で決まる。

問題： 質量 $m = 1$ [kg] の物体が速さ $v = 1$ [m/s] で飛んできて、1 [L] (= 1 [kg] = 1000 [g]) の水の中に飛び込んで静止した。そして、物体が失った運動エネルギーが全て、水に熱エネルギーとして与えられたとする。このとき、水の温度は何 [°C] 上昇するか？ ただし、1 [cal] = 4.2 [J] とする。

解答： 物体が水に飛び込むときに持っている運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \text{ [J]}$$

この運動エネルギーが水に与えられた熱エネルギー Q になるので、 $Q = K$ である。この熱エネルギーの単位を [J] から [cal] に換算すると、

$$Q = \frac{1}{2} \text{ [J]} = \frac{1}{2 \times 4.2} \text{ [cal]} \doteq 0.12 \text{ [cal]}$$

一方、水の温度上昇 ΔT は

$$\Delta T = \text{「物体が飛び込む前の温度」} - \text{「物体からエネルギーを受けた後の温度」}$$

よって、1 [cal] の意味（前ページの補足 8）から次のように計算できる、

$$\Delta T = \frac{Q}{1000} \text{ [°C]} \doteq 1.2 \times 10^{-4} \text{ [°C]}$$

* 以上は、日常生活の中で特殊な実験装置を使わずに見られる現象（例：光速は無有限大 $c \rightarrow \infty$ ）に基づいて構成された『ニュートン力学』とのまとめである。特に §7 では、仕事という概念を拡張した『エネルギー』という概念（例：運動エネルギー）に注目する。そして、相対論を考慮した時の疑問は…

このエネルギーという概念は、特殊相対論ではどのように拡張・変更されるのだろうか？

§7.2 相対論的なエネルギー（図 7.4, 7.5）

状況設定

◇ 慣性観測者 K から見て、物体 A が速度 v で x 軸方向に等速直線運動している。(図 7.4)

◇ 物体 A と一緒に運動する人（物体 A に対して静止している人）が測る物体の質量（静止質量）： m

◇ 時間と空間の座標： $\begin{cases} \text{慣性観測者 K の座標：} & (ct, x) \\ \text{物体 A (と一緒に運動する人) の座標：} & (ct', x') \end{cases} \quad (c: \text{光速})$

物体 A の世界線上の事象 P

物体 A（と一緒に運動する人）が測る、物体 A 自身の位置は $x' = 0$ なので、

物体 A（と一緒に運動する人）が測る、物体 A の座標： $(ct', 0)$

よって、物体 A（と一緒に運動する人）が測る、物体 A の世界線上の事象 P の座標は、 – 図 7.5 –

物体 A の世界線上の事象 P： $(ct'_p, 0)$

次に、慣性系 K で測った事象 P の座標 (ct_p, x_p) を求める。

それは、ローレンツ変換 (式 (5.2)) で計算できる：

$$\begin{cases} ct_p = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (ct'_p + 0) = \frac{ct'_p}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ x_p = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\frac{v}{c} ct'_p + 0 \right) = \frac{vt'_p}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ct_p, x_p) = \left(\frac{ct'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \quad \text{---(7.1)}$$

物体 A の時間で測る速度 (時空速度)

- 速度は $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$ である。

この分母の「時間」を、物体 (と一緒に運動する人) の時間で測るとき、その速度を相対論的速度という。

余談：このノートでは時空を 2次元 (ct, x) に限定しているが、一般的に 4次元 (ct, x, y, z) を考えるとき、相対論的速度のことを 4次元速度 (略して 4元速度 four velocity) ということが多い。むしろ、「相対論的速度」よりも「4元速度」のほうが相対論の研究者には馴染み深い言葉かもしれない。しかし、このノートでは 2次元に限定するので、4元速度ではなく相対論的速度という言葉を使うことにする。

- 相対論的速度には、次のように、「空間方向」と「時間方向」の成分がある。(式 (7.1) から計算)

$$\text{慣性系 K が測る} \begin{cases} \text{物体 A の相対論的速度の「空間方向」の成分： } V_x = \frac{x_p}{t'_p} = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \text{物体 A の相対論的速度の「時間方向」の成分： } V_t = \frac{ct_p}{t'_p} = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases} \quad \text{---(7.2)}$$

→ 相対論的速度の空間方向の成分 V_x は、通常 velocity の考え方と同じ意味：

V_x = 「(物体 A で計る) 単位時間当たりの (慣性系 K で測る) 移動距離」

→ 問題は、相対論的速度の時間方向の成分 V_t の意味は、どう理解できるのか？

相対論的速度の時間方向の成分 $V_t = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ とエネルギーの関係

V_t を理解するために、次の数学的な事実を参考にする。(テイラー展開という関係式の一例)

◇ ある数 k が $|k| < 1$ を満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$\frac{1}{\sqrt{1+k}} = 1 - \frac{1}{2 \times 1} k + \frac{1 \times 3}{2^2 \times (2 \times 1)} k^2 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times (3 \times 2 \times 1)} k^3 + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2^4 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} k^4 + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n \times [n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1]} k^n + \dots \quad (\text{無限個の項の和})$$

この関係式に $k = -\left(\frac{v}{c}\right)^2$ を代入すると、 $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{v}{c}\right)^6 + \dots$

$$\Rightarrow V_t = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = c + \frac{c}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3c}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5c}{16} \left(\frac{v}{c}\right)^6 + \dots$$

この第 2 項は、 mc 倍すると運動エネルギー $\frac{1}{2} m v^2$ になる： $mc \times \frac{c}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{mc^2}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} m v^2$

そこで、 mcV_t を計算すると、 $mcV_t = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3mc^2}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$

この右辺の足し算の各項は、運動エネルギーと足し算できる量である。

→ 運動エネルギーと足し算できるということは（足算・引算は同じ単位の量でないといけないので）、全ての項は何らかのエネルギーを表わす、ということである。 mc^2 もエネルギーの一種だと分かる。

以上より、 mcV_t は相対論的なエネルギーを表わすと考えられる：

相対論的エネルギー：静止質量 m の物体が速度 v で運動しているとき、慣性系 K が測る相対論的エネルギーは、

$$E = mcV_t = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{————(7.3)}$$

補足 10：物体の速度 $v = 0$ のとき、相対論的エネルギー $E = mc^2$ である。これを（静止）質量エネルギーという。そして、式 (7.3) は、物体が運動することで質量が m から $\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ($> m$) に増加したと考えることもできる。

注意 3：一つの物体の速度を異なる観測者が測定すると、その速度の測定値は観測者によって異なる。よって、式 (7.3) より、相対論的エネルギーは物体に固有の量（観測者とは無関係に決まる量）ではないことが分かる！

相対論では、時間や長さだけでなく (§4 参照)、エネルギーの値も観測者によって異なる。

問題：何らかの方法で質量をエネルギー（例えば熱エネルギー）に変換できたとする（例：核兵器、原子力発電）。そして、1 [g] (= 10^{-3} [kg]) の物質の静止質量エネルギーを全て熱エネルギーに変換し、その熱を 1[t] (= 1000[kg] = 10^6 [g]) の水に与えたとする。この熱によって水の温度は何 [°C] 上昇するか？ ただし、光速 $c = 3 \times 10^8$ [m/s]、1 [cal] = 4.2 [J] とする。

解答：水に与えた熱エネルギー Q が静止質量エネルギーに等しい場合なので、

$$Q = mc^2 = 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{13} \text{ [J]}$$

この単位を [J] から [cal] に換算して、

$$Q = 9 \times 10^{13} \text{ [J]} = \frac{9}{4.2} \times 10^{13} \text{ [cal]} \doteq 2.1 \times 10^{13} \text{ [cal]}$$

よって、水の温度上昇 ΔT （＝「熱を与える前の温度」－「熱を与えた後の温度」）は、1 [cal] の意味（補足 8）から次のように計算できる、

$$\Delta T = \frac{Q}{10^6} \text{ [°C]} \doteq 2.1 \times 10^7 \text{ [°C]} = 2100 \text{ 万 [°C]}$$

光速の値が極めて大きいので静止質量エネルギー mc^2 も莫大な値になり、そのエネルギーによる温度上昇も尋常でなくなる。

ちなみに、太陽の表面温度は約 6 千 [°C]（測定値）で、中心温度は約 1500 万 [°C] と推定されている。（その推定には、恒星の内部構造の理論が使われる。）

補足 11：質量をエネルギーに転換する技術を確立すれば、莫大なエネルギーを生み出すことが可能だと分かる。それを軍事利用したものが核兵器。発電に利用したものが原子力発電。

補足 12：質量をエネルギーに転換できる方法の幾つか（原子核反応など）は、量子力学によって分かる。

付録 7.1 ニュートン力学のポイント (§7.1 の続き) (図 7.6)

注意：この付録 7.1 では、ひとまず相対論は忘れる。時間と空間が完全に区別されるニュートンの考え方に基づく力学のポイントをまとめる。

● 物体の運動の勢いを評価する量

→ 物体の質量が重いほど、物体の速度が大きいほど、勢いがあるな～（自分にぶつかると痛そう）と思う。

→ 運動量： $p = mv$ [kg m/s] ... $\begin{cases} m \text{ [kg]} : \text{物体の質量} \\ v \text{ [m/s]} : \text{物体の速度} \end{cases}$

● 速度の定義と微分

速度の正確な意味：時刻 t [s] での物体の速度 $v(t)$ とは、その時刻での位置 $x(t)$ の『時間変化率』である。

注意 4：時間変化率の大雑把な意味は『単位時間（1 [s]）あたりの変化量』である。位置の時間変化率とは、大雑把に言って、『1 [s] あたりの位置 $x(t)$ がどれだけ変化量（移動距離）』である。

→ 速度をどう表現したらよいかを考えていく。考察は 2 段階に分ける：

◇ 第 1 段階

図 7.6 の状況設定で考える：

$$\begin{cases} x(t) \text{ [m]} : \text{ある時刻 } t \text{ [s]} \text{ での物体の位置} \\ x(t') \text{ [m]} : \text{次の時刻 } t' \text{ [s]} \text{ での物体の位置} \end{cases} \rightarrow t' = t + \Delta t \text{ とする。}$$

（時刻 t からさらに時間 Δt だけ経過した時刻が t' である。）

この設定で「1 [s] あたりの移動距離」を計算しようとする、初等的には次の平均速度が考えられる：

$$\text{平均速度： } \bar{v} = \frac{\text{「移動距離」}}{\text{「経過時間」}} = \frac{x(t') - x(t)}{\Delta t} \text{ [m/s]}$$

これは次の問題を抱えており、力学における速度としての役割を十分に果たせないことが分かる：

平均速度の問題点：平均速度 \bar{v} について、次の 2 つの事実が分かる：

- 時刻 t で位置 $x(t)$ を通過し、時刻 t' で位置 $x(t')$ を通過する運動の仕方は一つではなく無数に考えられる。（図 7.6 に 3 つの例を示してある。）
- これらの異なる運動の全てに対して平均速度 \bar{v} を計算すると、その値は全ての運動で同じ値になる。

この 2 つの事実は、『平均速度 \bar{v} では、時間間隔 Δt の間の運動を区別して認識できない』ことを意味する。ところで、力学の目的は「物体の運動を知ること (§7.1 参照)」である。

したがって、平均速度 \bar{v} は、時間間隔 Δt の間の運動を知る（区別する）ことが不可能なので、力学の目的を達成するために使う量としては不十分である。時間間隔 Δt の間の運動も区別できるような「速度」という量を考案する必要がある。

◇ 第 2 段階

平均速度の問題点を克服して、 Δt の間の運動を区別できるような「速度」を考案する。

→ 平均速度の問題点の根本原因を取り除くことを考えればよい。

→ その根本原因は、『時間間隔 Δt が 0 でない有限な値であること』である。 Δt が 0 でない有限な値だから、その Δt の間の運動が区別できない。

→ 平均速度 \bar{v} の時間間隔 Δt をどんどん 0 に近づけていけば（極限）、平均速度の問題点が克服できる！

補足 13：ある量（例えば Δt ）をある値（例えば 0）に「どんどん近づけていく」とどうなるか？という考察方法を、数学では『極限 limit』という。例えば、関数 $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ の『 x が 0 に近づく極限』とは、次の計算のことである：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(2x + \frac{3}{x} \right) = 0 + \infty = \infty \text{ (無限大)}$$

通常の割り算 $\frac{3}{0}$ は計算不可能であるが、「 x がどんどん 0 に近づいていく」に従って「分数 $\frac{3}{x}$ はどんな値に近づいていくか（この場合は無限大 ∞ に近づいていく）」という考察は可能である。

これが極限という考察方法である。

以上の考察から、時刻 t での速度 $v(t)$ を次のように決める（定義する）：

$$v(t) = \text{『平均速度 } \bar{v} \text{ の } \Delta t \text{ が } 0 \text{ に近づいていく極限』} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t') - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

この最右辺は、分母 Δt も分子 $x(t + \Delta t) - x(t)$ もどんどん 0 に近づいていき、「 $\frac{\text{『微小な値』}}{\text{『微小な値』}}$ 」である（この分数の値は小さい場合も大きい場合もあり得る）。そこで、速度を次のように表記する：

$$\text{速度 : } v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \quad (= x'(t) \text{ と書くことも多い} \rightarrow \text{高校数学の教科書})$$

ここで、 $\begin{cases} dt & : \text{微小な時間間隔（極めて小さくなった } \Delta t \text{）というニュアンス} \\ dx(t) = x(t + dt) - x(t) & : \text{微小な時間 } dt \text{ の間の微小な移動距離というニュアンス} \end{cases}$

この $\frac{dx(t)}{dt}$ （あるいは $x'(t)$ ）を『関数 $x(t)$ の微分』（微小な値の分数）という。まとめると、

- 速度（位置の時間変化率） $v(t)$ は、正確には、位置 $x(t)$ の微分で計算できる： $v(t) = x'(t)$
- 微分とは、変化率を計算するための『計算テクニック』だと言える。

◇ 微分の例（微分を使った速度の計算例）：

$x(t) = 3t + 2$ のとき、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \left[\text{あるいは } x'(t) \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[3(t + \Delta t) + 2] - (3t + 2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 3 = 3 \quad (3 \text{ は、} \Delta t \text{ がどんな値であっても } 3 \text{ のままである。}) \end{aligned}$$

$x(t) = -5t^2 + 7$ のとき、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[-5(t + \Delta t)^2 + 7] - (-5t^2 + 7)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-10t\Delta t - 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t \\ &\quad (-10t \text{ は } \Delta t \text{ がどんな値であっても } -10t \text{ のままである。}) \end{aligned}$$

$x(t) = 4t^3 - t + 3$ のとき、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[4(t + \Delta t)^3 - (t + \Delta t) + 3] - (4t^3 - t + 3)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{12t^2\Delta t + 12t(\Delta t)^2 + 4(\Delta t)^3 - \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [12t^2 - 1 + 12t\Delta t + 4(\Delta t)^2] = 12t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$x(t) = -9 \text{ (定数関数) のとき, } v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-9 - (-9)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$x(t) = at^n$ (a, n は定数) のとき、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t)^n - at^n}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ant^{n-1}\Delta t + [\text{定数}](\Delta t)^2 + [\text{定数}](\Delta t)^3 + [\text{定数}](\Delta t)^4 + \cdots + a(\Delta t)^n}{\Delta t} = ant^{n-1} \end{aligned}$$

付録 7.2 静止質量, 固有時間と相対論的速度, 相対論的運動量 (図 7.7, 7.8)

相対論を考えて, 物体の静止質量と, 任意の運動 (速度が一定でなくてもよい) をしている物体に対する固有時間, 相対論的速度, 運動量を定義する。

● **静止質量** : 物体と一緒に運動する人 (物体に対して静止している人) が測る物体の質量

● **固有時間 τ** : 物体に乗った (仮想的な) 観測者が測る時間 – 図 7.7 –

→ 物体の世界線は, 固有時間の座標軸 ($c\tau$ 軸) であり, 時間的な傾き をもった曲線 (光速以下の速度)。

→ $c\tau$ 軸の目盛りは固有時間でつけられる。

→ 慣性系 K ((ct, x) 座標) から見た, 物体の位置の事象 $P(\tau) : (ct(\tau), x(\tau))$

補足 14 : 事象 $P(\tau) : (ct(\tau), x(\tau))$ は, 『物体 (と一緒に運動する人) の固有時間が決まれば, 物体の事象 P も決まる』ということで, 固有時間 τ を変数として表している。

一方, 『慣性系 K の時間 t に応じて物体の事象 P が決まる』という見方もできる。この場合は, 慣性系 K の時間 t を変数として,

$$\text{事象 } P(t) : (ct, x(t)) \quad , \quad \text{固有時間 } \tau = \tau(t)$$

となる。物体の事象 P の座標だけでなく, 物体の固有時間も t を変数とする関数として表される。

● **相対論的速度 \vec{V}** : 物体の位置の事象 $P(\tau)$ の『固有時間変化率』 – 図 7.8 –

$$\vec{V} := \frac{d\vec{OP}(\tau)}{d\tau} = \left(c \frac{dt(\tau)}{d\tau}, \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) \quad \text{———— (7A.1a)}$$

→ \vec{V} は物体の世界線に接する時空ベクトル。 – 図 7.8 –

また, 慣性系 K が測る (ニュートン力学の場合と同じ定義の) ニュートンの速度は

$$v(t) = \frac{dx(\tau(t))}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \quad (\text{合成関数の微分})$$

となるので,

$$\text{慣性系 K で測るニュートンの速度 } v(t) = c \frac{[\vec{V} \text{ の空間成分}]}{[\vec{V} \text{ の時間成分}]} \quad \text{———— (7A.1b)}$$

● **相対論的運動量 \vec{P}** : 物体の静止質量を m として,

$$\vec{P} := m\vec{v} = \left(mc \frac{dt(\tau)}{d\tau}, m \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) \quad \text{———— (7A.2a)}$$

→ 速度の場合と同様に,

$$\text{慣性系 K で測るニュートンの運動量 } p(t) = mv(t) = mc \frac{[\vec{P} \text{ の空間成分}]}{[\vec{P} \text{ の時間成分}]} \quad \text{———— (7A.2b)}$$

* 相対論的エネルギーは, 正確には (質量ゼロの粒子まで含めて考えようとする) 相対論的運動量に基づいて理解するほうがよい。これを以下でまとめる。

付録 7.3 相対論的運動量の時間成分と相対論的エネルギーの関係

$$\vec{V} \text{ の定義 (7A.1) において } \begin{cases} d\tau & : \text{固有時間の微小な時間間隔} \\ dt(\tau) & : d\tau \text{ の間に, K で測る微小な時間間隔} \\ dx(\tau) & : d\tau \text{ の間に, K で測る物体の微小な移動距離} \end{cases}$$

微小時間 $d\tau$ の間は、物体の（ニュートンの）速度 $v(t)$ は一定だとみなすと（そうみなせる程に微小な時間）、一定速度の観測者の間で発生する『時間の遅れ（§4.2, §5.2）』が適用される。

これは、固有時間は座標時間より経過が遅くなることを意味する：

$$d\tau = dt(\tau) \sqrt{1 - \left(\frac{v(\tau)}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma(\tau)} dt(\tau) \quad , \quad \gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v(\tau)/c)^2}} \quad (v(\tau) = v(t(\tau)))$$

$$\implies \frac{dt(\tau)}{d\tau} = \gamma(\tau) \quad , \quad \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{dx(t)}{dt} \frac{dt(\tau)}{d\tau} = v(t(\tau)) \gamma(\tau) = v(\tau) \gamma(\tau) \quad \leftarrow \text{式 (7A.1b) と同じ}$$

よって、相対論的速度 (7A.1a) は、

$$\vec{V} = (c\gamma(\tau), \gamma(\tau)v(\tau)) \quad \text{———— (7A.3)}$$

また、相対論的運動量 (7A.2a) は、

$$\vec{P} = (mc\gamma(\tau), \gamma(\tau)mv(\tau)) \quad \text{———— (7A.4)}$$

補足 15: $c\gamma(\tau)$ は、ニュートンの速度 $v = \text{定数}$ （一定速度）のとき、式 (7.2) で扱った相対論的速度の時間成分 V_t とまったく同じになる。したがって、式 (7A.1a) は、「ニュートンの速度 $v = \text{一定}$ の場合の相対論的速度」を、「任意の $v(t)$ の場合にも適用できる形式」に拡張したものだと理解できる。

以上より、式 (7A.4) と §7.2 の相対論的エネルギーの式 (7.3) を比べると、任意の（速度が一定でない）運動をする物体の相対論的エネルギーが次のように与えられることが分かる：

相対論的エネルギー：慣性系 K で見て静止質量 m の物体がニュートンの速度 $v(t)$ で運動しているとき、その慣性系 K で測る相対論的エネルギーは、

$$E = P_t c = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} \quad (P_t = \text{「}\vec{P}\text{ の時間成分」})$$

付録 7.4 光と粒子の世界線：質量ゼロの粒子は必ず光速で運動する

● §3.3（例題 (b) の考察）と §6.5 から分かっていること：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{時間的方向の世界線上の 2 つの事象 A, B 間の時空距離} & : s_{ab} \\ \text{光（ゼロ質量粒子）の世界線上の 2 つの事象 C, D 間の時空距離} & : s_{cd} \\ \text{空間的方向の世界線上の 2 つの事象 E, F 間の時空距離} & : s_{ef} \end{array} \right.$$

$$\text{とすると, } \left\{ \begin{array}{ll} s_{ab}^2 < 0 & : \text{光速以下の 3 次元速度で運動する粒子の世界線に対応} \\ s_{cd}^2 = 0 & : \text{速度合成則から, 実現可能な最高速度である光速の運動に対応} \\ s_{ef}^2 > 0 & : \text{光速以上の 3 次元速度に対応するが, 速度合成則から実現不可能} \end{array} \right.$$

● 相対論的速度、相対論的運動量の定義から分かること：

図 7.8 の $\overrightarrow{\Delta OP}(\tau)$ のように、上の 3 つの 世界線に沿った微小な時空距離を ds とすると、

$$\left\{ \begin{array}{ll} ds^2 < 0 & : \text{光速以下の 3 次元速度で運動する粒子の世界線に対応} \\ ds^2 = 0 & : \text{光（ゼロ質量粒子）の世界線に対応} \\ ds^2 > 0 & : \text{光速以上の 3 次元速度に対応するが, 速度合成則から実現不可能} \end{array} \right. \quad \text{———— (7A.5a)}$$

ただし、世界線に沿った微小変位を $(d(ct), dx, dy, dz)$ として、

$$\text{微小な時空距離: } ds^2 = -[d(ct)]^2 + (dx)^2 \quad \text{———— (7A.5b)}$$

さらに、 ds だけ粒子が移動する間の 微小な固有時間を $d\tau$ とすると、

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -\left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 \quad \text{————— (7A.6)}$$

$\frac{ds}{d\tau}$ は単位固有時間あたりの移動距離なので、式 (7A.6) の左辺は『相対論的速度 \vec{V} の大きさの2乗』だと考えられる。これは、式 (7A.6) が相対論的ベクトルの内積を与えることを意味する：

特殊相対論でのベクトル（ミンコフスキー時空中のベクトル）の内積と分類

$$\diamond \begin{cases} \vec{A} = (A^t, A^x) \\ \vec{B} = (B^t, B^x) \end{cases} : \text{ミンコフスキー時空中の相対論的ベクトル}$$

… [相対論研究者の習慣に従い、相対論的ベクトルの成分を区別する
添え字は、 A^t のように右上に付けた。累乗ではないことに注意!]

この相対論的ベクトルの内積を $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle$ と表すと、これは次で与えられる：

$$\text{内積} : \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle := -A^t B^t + A^x B^x \quad \text{————— (7A.7)}$$

ベクトルの大きさ $|\vec{A}|$ (の2乗) は、大きさ : $|\vec{A}|^2 := \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = -(A^t)^2 + (A^x)^2$

また、次のような分類もする：

$$\text{ベクトルの分類} : \begin{cases} \text{時間的ベクトル} : |\vec{A}|^2 < 0 & \text{となるベクトル} \\ \text{光的ベクトル} : |\vec{A}|^2 = 0 & \text{となるベクトル} \\ \text{空間的ベクトル} : |\vec{A}|^2 > 0 & \text{となるベクトル} \end{cases}$$

光的ベクトルは、大きさがゼロ (zero → ドイツ語 null) であることから、ヌル・ベクトルと言うことも多い。

→ 式 (7A.5) と内積 (7A.7) から、相対論的速度 \vec{V} について次のことが分かる：

$$\begin{cases} |\vec{V}|^2 < 0 & : \text{光速以下の粒子の相対論的速度は時間的ベクトル} \\ |\vec{V}|^2 = 0 & : \text{光速の粒子の相対論的速度は光的ベクトル} \\ |\vec{V}|^2 > 0 & : \text{光速以上の仮想粒子の相対論的速度は空間的ベクトル} \end{cases}$$

→ 相対論的運動量 $\vec{P} = m\vec{V}$ (定義 (7A.2)) について明らかに、

$$\begin{cases} |\vec{P}|^2 < 0 & : \text{光速以下の粒子の相対論的運動量は時間的ベクトル} \\ |\vec{P}|^2 = 0 & : \text{光速の粒子の相対論的運動量は光的ベクトル} \\ |\vec{P}|^2 > 0 & : \text{光速以上の仮想粒子の相対論的運動量は空間的ベクトル} \end{cases}$$

→ ところで、定義 (7A.2) より $|\vec{P}| = m|\vec{V}|$ なので、ゼロ質量 $m = 0$ なら必ず $|\vec{P}| = 0$ になる：

ゼロ質量の粒子は必ず光の世界線に沿った運動をする！

→ 光速不変の原理は、光ではなく任意のゼロ質量粒子に対する原理である。

● 常にニュートンの速度が光速以下 $v(t) < c$ の物体の相対論的速度 \vec{V} は、式 (7A.3) である。

→ 内積 (7A.7) より、 $|\vec{V}|^2 = \gamma^2 (-c^2 + v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - (v/c)^2} = -c^2$

従って、光速以下の粒子の相対論的速度の大きさは、ニュートンの速度の値によらず常に、 $|\vec{V}|^2 = -c^2$

→ 光速以下の粒子の相対論的運動量の大きさは常に、 $|\vec{P}|^2 = -m^2 c^2$

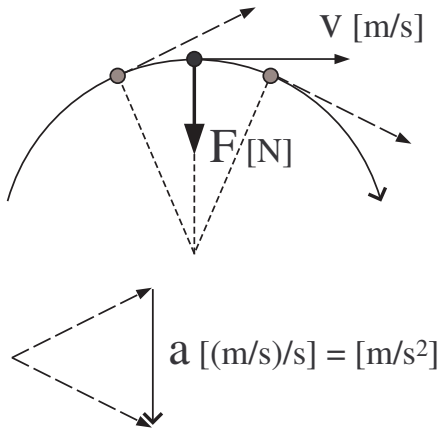


図 7.1 : 力の向きは加速度の向きと同じ。

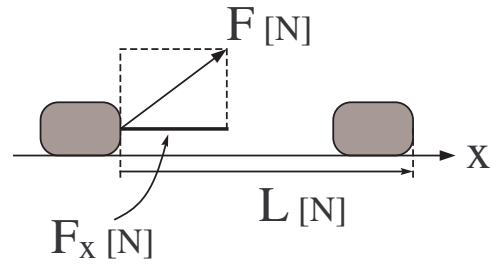


図 7.2 : 「仕事」は「力の頑張り具合」を評価する。



図 7.3 : 力が仕事をして物体にエネルギーを注入

これより上はニュートン力学を想定。これより下は特殊相対論を想定。

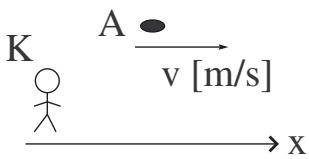


図 7.4 : 慣性観測者 K から見て、
物体 A は速度 v で運動

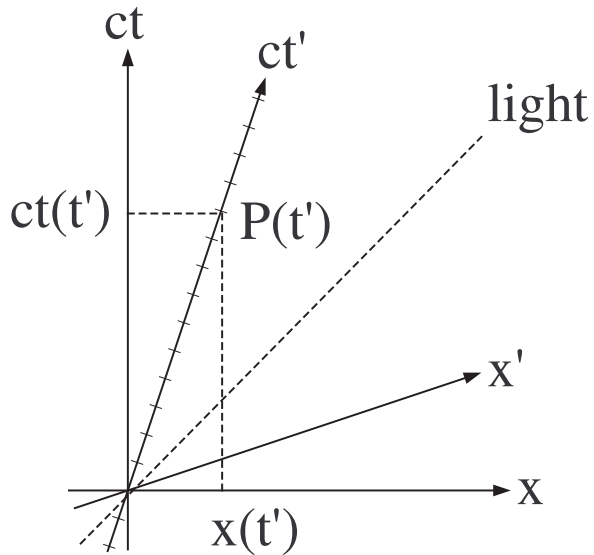


図 7.5 : 物体 A が測る時刻 t' を決めると、それに対応して、
物体 A の世界線上の事象 $P(t')$ が一つ決まる。

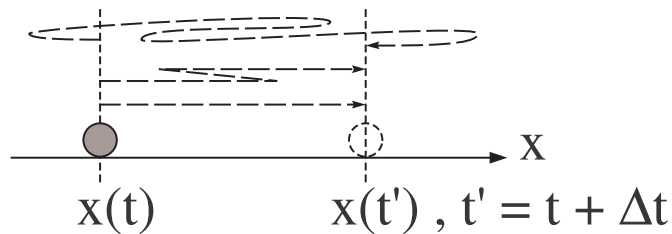


図 7.6 : 時間間隔 Δt が有限値である限り, 時間 Δt の間の運動を区別できない。

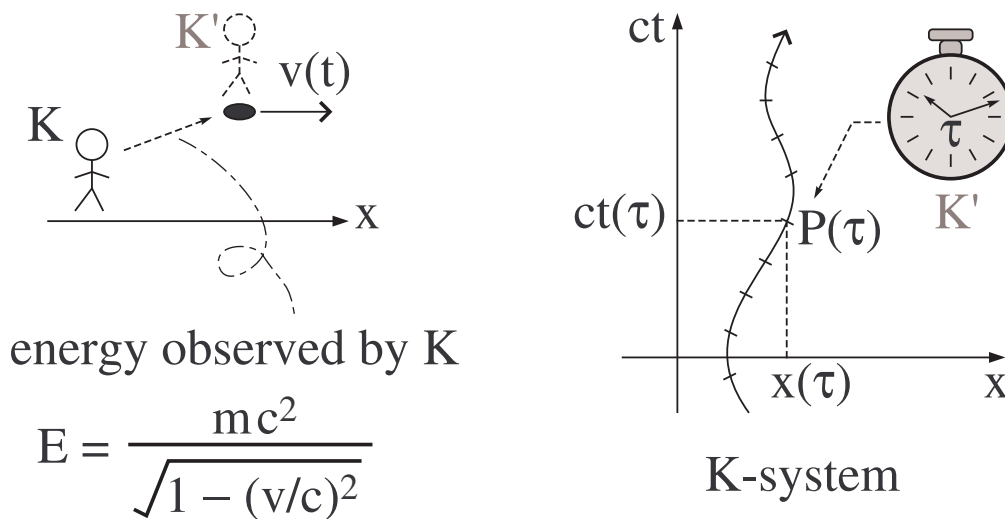


図 7.7 : 固有時間は粒子 (と一緒に運動する観測者) が計る時間

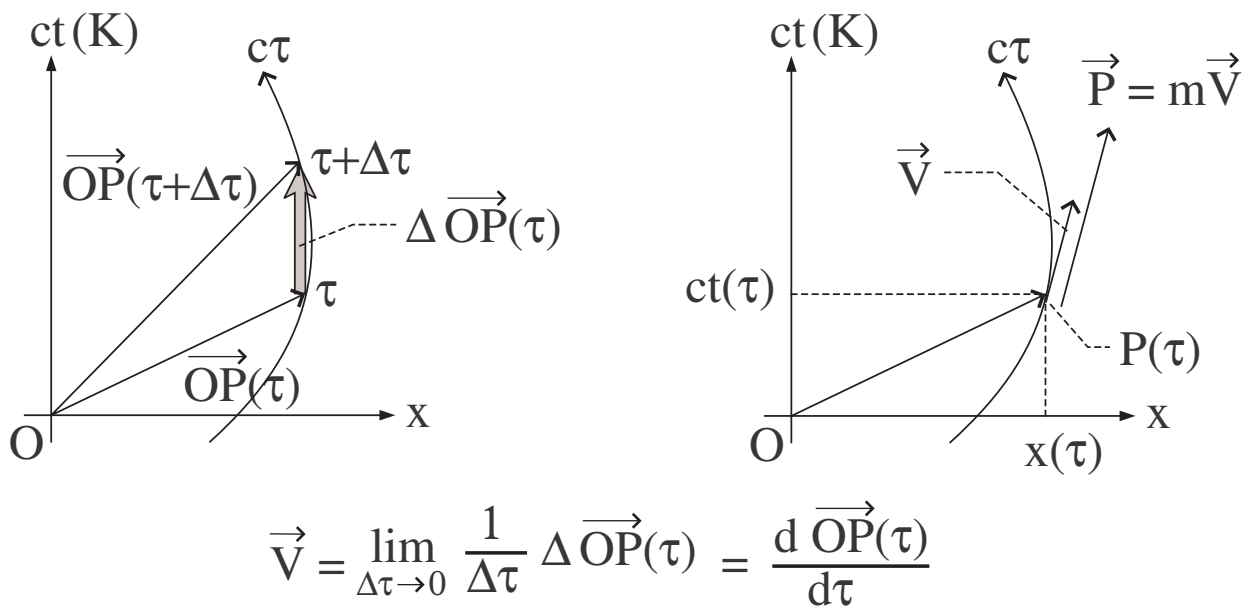


図 7.8 : 相対論的速度は固有時間の微分で定義する, 世界線の接ベクトルである。

§8. 運動論的ドップラー効果と相対論的ビーミング効果

§8.1 運動論的ドップラー効果：波源と波の進行方向が同じ場合 (図 8.1, 8.2)

状況設定 – 図 8.1, 8.2 –

- ◇ 慣性系 K の x 軸方向に波源 S が速度 v で慣性運動。(y, z 座標は省略)
- ◇ 観測者 K も波源 S も x 軸上。
- ◇ 波源 S が x 軸の正方向にいる観測者 K に向かって単色波を放出。

$$\diamond \text{慣性系 K で測る} \begin{cases} \text{位相速度} : u (\leq c) & (\text{波のほうが波源 S より速い } u > v \text{ とする}) \\ \text{周期} & : T \\ \text{波長} & : \lambda = uT \end{cases}$$

$$\diamond \text{波源 S の慣性系で測る} \begin{cases} \text{位相速度} : u' (\leq c) \\ \text{周期} & : T' \\ \text{波長} & : \lambda' = u'T' \end{cases}$$

- ◇ 波源 S の世界線の上で、原点 O から (波源と共に運動する観測者が計る時間で) 一周期だけ時間が経過した後の事象を P とする。
 - 波源は、原点 O から事象 P に運動する間に一周期分の波を放出。
 - 図 8.2 の灰色領域がこの「一周期分の波」が掃く世界面になる。

問題：観測者 K が測る量と波源 S で測る量の間の変換則 (変換則) を導け。

→ 速度 u と u' の変観測は §6.3 の速度合成則で与えられる。よって、波長や周期の変換則が問題となる。

運動論的ドップラー効果 (波源と波の進行方向が同じ場合)

$$\diamond \text{図 8.2 より,} \begin{cases} \text{慣性系 K で測る波長} : \lambda = \overline{PA} \\ \text{波源 S で測る波長} : \lambda' = \overline{PB} \end{cases}$$

→ 事象 P, A の座標が分かれば 波長の ドップラー効果が得られそう。

$$\diamond \text{事象 P の} \begin{cases} \text{慣性系 K に見る座標} : (ct_p, x_p) \\ \text{波源 S から見る座標} : (cT', 0) \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \text{一周期分の波動を考えている} \\ \text{事象 P は波源 S の世界線上} \end{cases} \text{に注意}$$

$$\rightarrow \text{ローレンツ変換の逆 (式 (5.2)) より:} \begin{cases} ct_p = \gamma cT' \\ x_p = \gamma vT' \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

→ 図 8.2 より、慣性系 K に見る事象 A の座標 (ct_a, x_a) に対して

$$\begin{cases} ct_a = ct_p \\ ct_a = (c/u)x_a \quad (\text{K から見て位相速度 } u \text{ の世界線上}) \end{cases} \implies \begin{cases} ct_a = \gamma cT' \\ x_a = \gamma uT' \end{cases}$$

$$\diamond \text{以上より, 慣性系 K で測る波長: } \lambda = x_a - x_p = \gamma(u - v)T' = \gamma(u - v) \frac{\lambda'}{u'}$$

→ §6.3 の速度合成則 (式 (6.4)) から $u' = \frac{u - v}{1 - (uv/c^2)}$ なので (波源 S から見た K の速度は $-v$ に注意)

$$\underline{\text{波長のドップラー効果: } \lambda = \gamma(u - v)T' = \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \lambda'} \quad \text{—— (8.1)}$$

→ この左辺を周期に読み換えて ($\lambda = uT$)

$$\text{周期のドップラー効果: } T = \gamma \frac{u-v}{u} T' \quad \text{———— (8.2)}$$

→ 逆数をとって周波数で表して ($f = 1/T, f' = 1/T'$)

$$\text{周波数のドップラー効果: } f = \frac{1}{\gamma} \frac{u}{u-v} f' \quad \text{———— (8.3)}$$

補足: 図 8.2 での周期の読み取り方:

$$\begin{cases} T: \text{慣性系 K で測る 事象 R の時間座標 } ct_r = cT \\ T': \text{波源 S で測る 事象 P の時間座標 } ct'_p = cT' \end{cases}$$

◇ 以上の計算は光速の波動でも成立 → $u = c$ とすればよい。

§8.2 運動論的ドップラー効果: 波源と波の進行方向が異なる場合 (図 8.3)

状況設定 – 図 8.3 –

◇ 慣性系 K から見た波源 S の 3 次元速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

◇ 「波動を放出した瞬間の波源 S の位置」と「観測者 K の位置」を結ぶ方向に x 軸をとる。

→ 観測者 K で測定する波動は x 軸に沿って伝搬してくる。

→ 測定する波の位相速度の 3 次元ベクトル $(u, 0, 0)$

◇ 波動の量 ($u, T, \lambda = uT, u', T', \lambda' = u'T'$) は §8.1 と同じ。

問題: 波源 S の速度の向きを任意にした場合の, ドップラー効果 (8.1), (8.2), (8.3) への修正を求めよ。

運動論的ドップラー効果 (波源と波の進行方向が異なる場合)

◇ 波源 S と観測者 K の相対速度の x 成分 (S から K に向かう方向の成分) でドップラー効果は決まる。

→ v_x がドップラー効果 (8.1) のどこに現れるべきか, が分かれば良い。

◇ ローレンツ変換 (5.1) を 4 次元 (ct, x, y, z) に戻して, 空間座標の回転変換を考えると …

式 (5.1) の係数 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ は回転変換に対して変化しないことが分かる。

(\because 回転行列の作用は, 式 (5.1) のカッコ内の部分で, 空間座標 (x, y, z) の項だけに作用。)

よって, ドップラー効果 (8.1) の中の $\begin{cases} \gamma \text{ に含まれる速度は大きさ } |\vec{v}| \\ \gamma \text{ の中以外に現れる } v \text{ は波源 S の速度の } x \text{ 成分} \end{cases}$ だと分かる。

→ 以上より, 波源と波の進行方向が異なる場合のドップラー効果は,

$$\begin{cases} \text{波長} & : \lambda = \gamma (u - v_x) T' = \gamma \frac{u - v_x}{|\vec{u}'|} \lambda' \\ \text{周期} & : T = \gamma \frac{u - v_x}{u} T' \\ \text{周波数} & : f = \frac{1}{\gamma} \frac{u}{u - v_x} f' \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} \quad \text{———— (8.4)}$$

波源 S の速度 \vec{v} と x 軸との間の角を α とすると, $v_x = v \cos \alpha$ である。

◇ 以上の計算は光速の波動でも成立 → $u = c$ とすればよい。

◇ 補足: 任意の向きの速度合成則を考えると, $|\vec{u}'| = c \sqrt{1 - \frac{1 - (u/c)^2}{\gamma^2 [1 - (u_x v/c^2)]^2}}$ となることが分かる。

§8.3 相対論的ビーミング効果：運動論的ドップラー効果の応用例（図 8.4, 8.5）

状況設定

◇ §8.2 と同じ設定 – 図 8.3 –

◇ さらに波源 S は、波源の慣性系で見て等方的に光を放射 $u = c$

◇ 光の放射強度：
$$\begin{cases} I_K \propto f^2 & : \text{慣性系 K で測る強度} \\ I_S \propto (f')^2 & : \text{波源 S の慣性系で測る強度} \end{cases}$$

放射強度から理解するビーミング効果 – 図 8.4 –

$$\text{式 (8.4) より, } I_K \propto f^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{v}{u} \cos \alpha\right)^{-2} (f')^2 \implies \frac{I_K}{I_S} \propto \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{v}{u} \cos \alpha\right)^{-2}$$

ここで、
$$\begin{cases} \text{波源の速度が光速に近い場合 (“超” 相対論的な場合)} & \gamma \gg 1 \\ \text{波源の速度は「ほぼ」観測者の方向} & \alpha \ll 1 \end{cases} \text{ を考えると,}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}, \quad \cos \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

なので,

$$\frac{I_K}{I_S} \sim \frac{1}{\gamma^2} \left[1 - \left\{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \alpha^2\right)\right\}\right]^{-2} = \frac{4}{\gamma^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \alpha^2\right)^{-2} = \frac{4\gamma^2}{1 + \alpha^2 \gamma^2}$$

これを $0 < \alpha < 1$ でプロットした概形は図 8.4 である。半値幅は、だいたい $\alpha \sim \frac{1}{\gamma}$ の角度にある。よって、

相対論的ビーミング効果：

光の放射エネルギーは、光源の進行方向からほぼ $\alpha < \frac{1}{\gamma}$ の角度の範囲内に集中する。

時空図による定性的理解 – 図 8.5 –

ビーミング効果は、定性的には図 8.5 で理解できる。

◇ 図 8.5a：光源 S から見て、等方的な放射を構成する光の世界線は「光円錐上で一様に分布」する。

→ 図 8.5a では、 z 軸を省略して、 $ct-x-y$ の 3 次元的な時空図に視覚化。

◇ 図 8.5b：光源 S から見た等方的な放射の世界線を、 $ct'-x'$ 面上に射影。

→ y, z 方向にも進行する光の世界線を $ct'-x'$ 時空図上に射影すると、その影は光円錐の内側に映る。

これら光源 S の慣性系で見た時空図は、ローレンツ変換（の逆 (5.2)）によって、慣性系 K で見る時空図に変換できる。

◇ 図 8.5c：光源 S からの等方的な放射を、慣性系 K で見た図。

→ ローレンツ変換によって光円錐は不変である。（光速不変の原理）しかし、光円錐上における光の世界線の分布はローレンツ変換で変わる。

◇ 図 8.5d：慣性系 K から見た放射を、 $ct-x$ 面上に射影。

→ 図 8.5b と比べると、光源 S から見て等方的な放射は、慣性系 K から見て光源 S の進行方向に集中することが分かる。

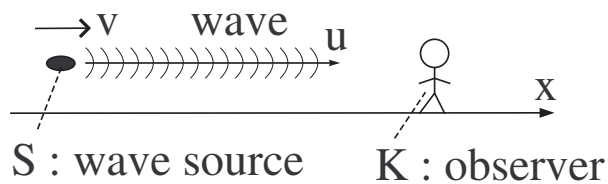


図 8.1 : 波源と波の進行方向が同じ場合

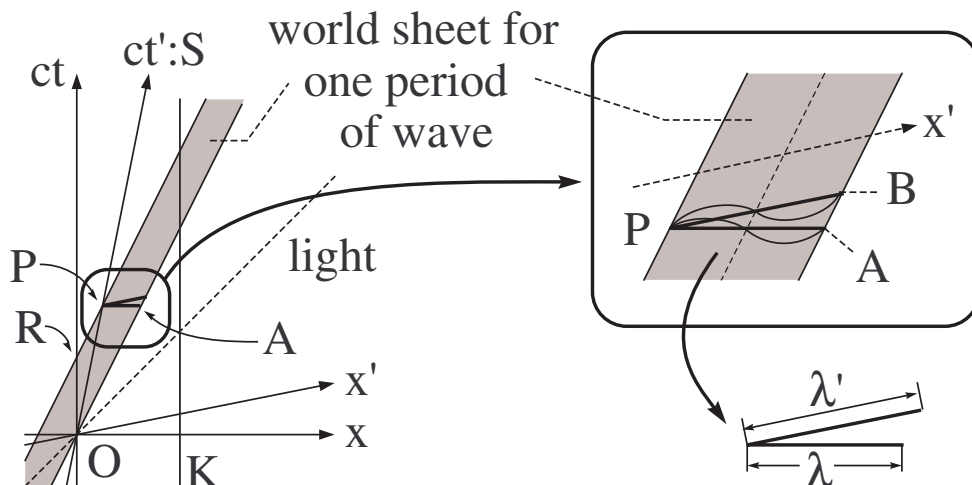


図 8.2 : 波源と波の進行方向が同じ場合で、時空図で理解する運動論的ドップラー効果

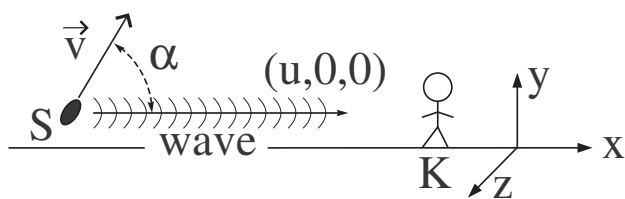


図 8.3 : 波源と波の進行方向が異なる場合

波源の速度の x 成分 v_x と、 x 軸上を伝わる波を考えると、図 8.2 と同様な時空図が描ける。

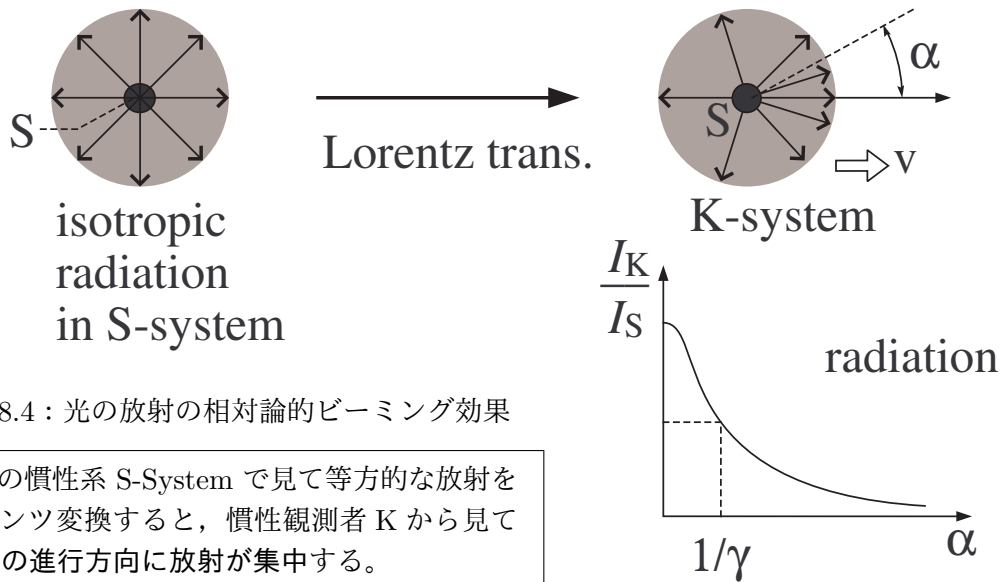


図 8.4 : 光の放射の相対論的ビーミング効果

光源 S の慣性系 S-System で見て等方的な放射をローレンツ変換すると、慣性観測者 K から見て光源 S の進行方向に放射が集中する。

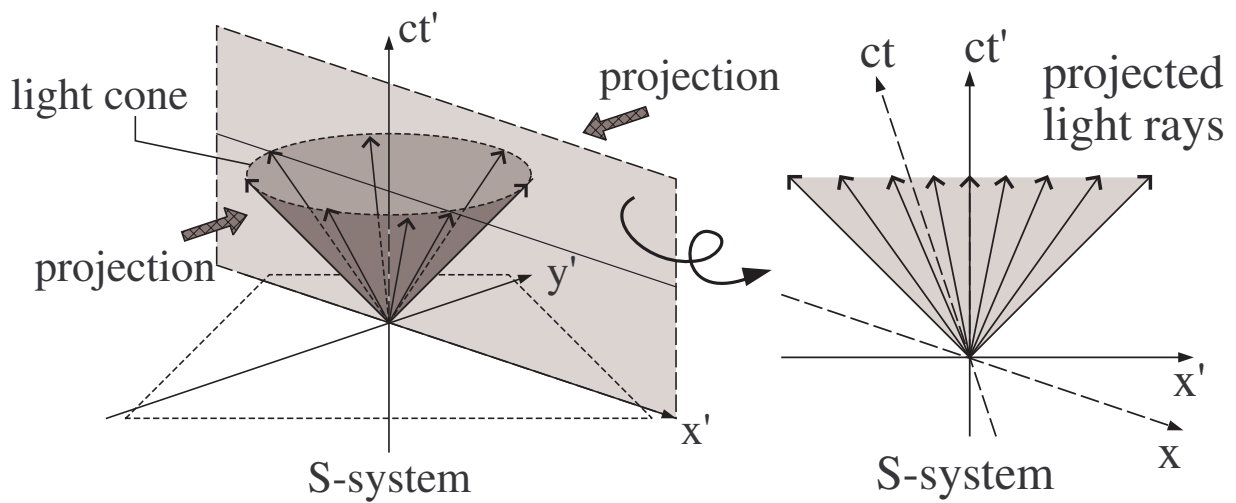


図 8.5a : 光源 S から見た等方的放射の時空図
 z 座標は省略し 3 次元的に視覚化

図 8.5b : 光の世界線を $ct'-x'$ 面上に射影

↓ 図 8.1a, 8.1b を、慣性系 K にローレンツ変換

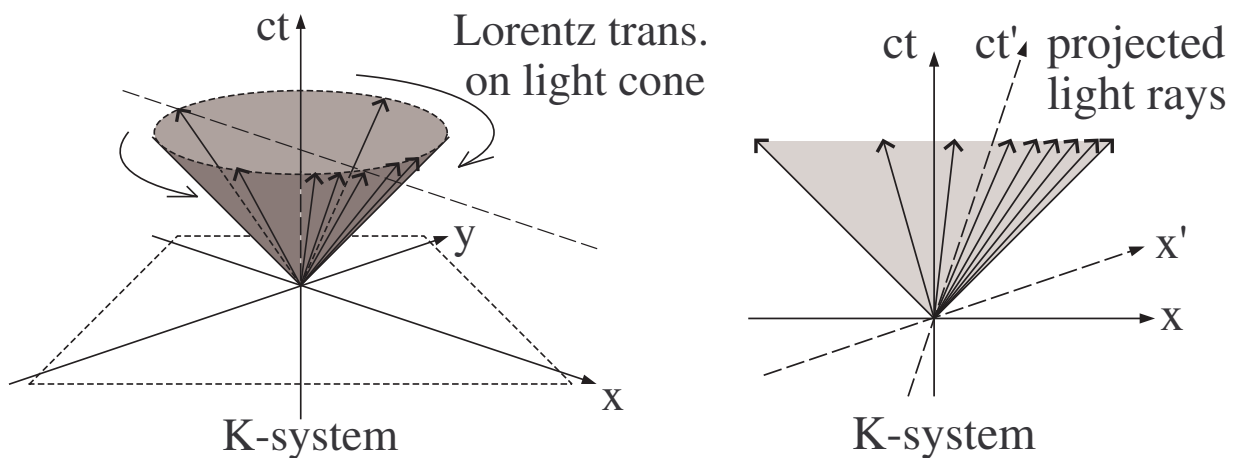


図 8.5c : 相対論的ビーミング効果の時空図

図 8.5d : 光の世界線を $ct-x$ 面上に射影

ローレンツ変換によって、光円錐は不変（光速不変の原理）だが、光円錐上での「光の世界線の分布」は変化する。光源 S から見て等方的だった光線分布は、慣性系 K から見て光源の速度方向に集中する。

§9. 特殊相対論の限界：双子のパラドックス

特殊相対論だけで考えると、以下のような矛盾が生じる。
この矛盾は『双子のパラドックス』と呼ばれる、特殊相対論だけで考えた場合に生じる問題である。一般相対論で解決される。

状況設定

◇ 慣性系 K の x 軸方向に、 K' が速度 v で運動

$$\dots \begin{cases} K \text{ が測る座標} : (ct, x) \\ K' \text{ が測る座標} : (ct', x') \end{cases} \quad (y, z \text{ は省略})$$

→ §5.2, §5.3: $\begin{cases} K \text{ から見た } K' \text{ の時計は, } K \text{ の時計より} \\ \text{遅く進んでいるように見える。} \\ K' \text{ から見た } K \text{ の時計は, } K' \text{ の時計より} \\ \text{遅く進んでいるように見える。} \end{cases}$

→ 互いに『相手の時計が遅れている』という観測結果

◇ 観測者 K' が途中で折り返して、 K から測った速度 $-v$ で、 K のところに戻ってくる。

問題：途中で K' が折り返して K の位置に戻ってきたとき、
どちらの時計が示す時刻のほうが進んでいるか？

→ この問題を特殊相対論だけで考えると、以下のように矛盾した答えになってしまう。

特殊相対論だけで答えてみる …

まず状況は： $\begin{cases} \diamond \text{ 観測者 } K' \text{ は, 出発する事象 } O \text{ では観測者 } K \text{ と同じ位置にいる。} \\ \diamond \text{ 観測者 } K' \text{ は事象 } O \text{ から出発し, 折り返して, 事象 } I \text{ で再び観測者 } K \text{ と再会する。} \\ \quad (\text{「行き」に要する時間と「帰り」に要する時間は等しい。}) \end{cases}$

[考察 A] 上図の上側：観測者 K から見た時空図

→ 観測者 K から見て、観測者 K' は事象 P で折り返して戻ってくる。

→ この時空図より $(ct_p =) \underline{\alpha < \beta} (= ct_r)$

→ 再会する事象 I において、観測者 K の時計 ($ct_i = 2\beta$) は K' の時計 ($ct'_i = 2\alpha$) より進んでいる。

[考察 B] 上図の下側：観測者 K' から見た時空図

→ 観測者 K' から見て、観測者 K は事象 Q で折り返して K' の所に戻ってくるように見える。

→ この時空図より $(ct_p =) \underline{\alpha > \delta} (= ct_q)$

→ 再会する事象 I において、観測者 K の時計 ($ct_i = 2\delta$) は K' の時計 ($ct'_i = 2\alpha$) より遅れている。

→ 考察 A と考察 B の結果が矛盾してしまう！（どちらも特殊相対論的には間違っていないが…）

本当はどうなの？

ポイント：観測者 K' が折り返すとき、 K' の速度は変化する。つまり K' は加速運動をする！

→ 加速運動している K' の時計が遅くなることが、一般相対性理論から分かる。

→ 上の問題には、特殊相対論では答えられず、一般相対論を使って初めて答えられる。

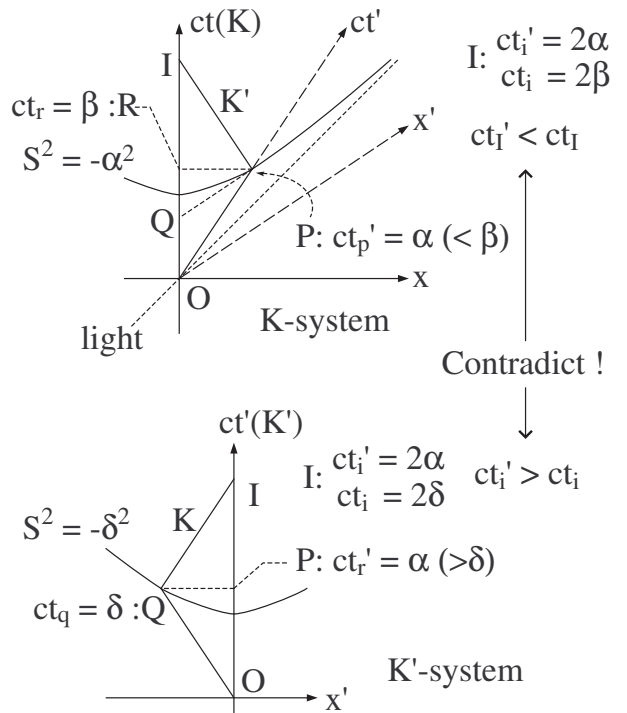


図 9.1：双子のパラドックスは特殊相対論では解決できない問題である。

§10. 重力がある場合 (一般相対論) への導入: 等価原理

- 一般相対論を把握する上で最も基本的な実験事実

実験事実: 2つの物体 A (m_a [kg]) と物体 B (m_b [kg]) を, 同じ強さの重力だけで加速する。(物体 A と B の質量は異なっても良い $m_a \neq m_b$ 。) このとき, 物体 A と B が得る加速度の大きさは等しい。

◇ この実験の例: - 図 10.1 -

球形の星から同じ距離に物体 A, B を止める。そして, 同時に A と B を (初速ゼロで) 自由落下させる。
→ このとき, 物体 A と B は同時に星の表面に到達する。(空気抵抗など, 重力の他の力は作用しない場合。)

- 上の実験事実が示すこと: 等価原理

状況設定: 観測者 K が物体 b を打ち出す - 図 10.2 -

◇ 観測者 K が「加速しない」場合

{ 図 10.2 (左): K が無重力空間にいるとき, K から見る物体 b の軌道は直線。
 { 図 10.2 (右): K が星から一定の距離で静止しているとき, K から見る物体 b の軌道は曲がる。

◇ 観測者 K が星に向かって自由落下している場合 - 図 10.3 -

→ 上の実験事実より, 観測者 K には 物体 b の軌道が 直線 に見える! - 図 10.3a -

→ ただし, 長く時間が経過して物体 b が観測者 K から十分離れると, K が見る b の軌道も曲がる。- 図 10.3b

↓ 以上が示すこと

等価原理: 観測者 K の周りの小さな空間領域で, かつ短い時間間隔の間なら (時空上で局所的には), 自由落下の加速度によって重力が打ち消される。つまり, 自由落下している観測者に対して局所的に特殊相対論が再現されるのである。

補足 1: 加速度と重力が同じ, ということで『等価原理』と呼ばれる。

補足 2: 等価原理は上の実験事実を言い換えたものである。そして, なぜこの『等価原理』(実験事実) が自然界で成立しているのか (という理由) は分からない。現状では, あくまでも実験事実 (正しいこと) として受入なければならない基本原理だと考える。

補足 3: 特殊相対論に等価原理による修正を加えると, 一般相対論になる。

補足 4: 『双子のパラドックス』はどう考えられるのか? (大雑把な解説)

ポイント: { 実際に加速している観測者 K' には, 等価原理より, 重力が作用しているとみなせる。
 { 加速していない観測者 K には, そのような (加速度が原因の余分な) 重力は作用していない。

→ 一般相対論を使って重力や加速度の影響を正確に計算すると,

実際に加速している (重力が作用している) 観測者の時計のほうが,
 加速していない (重力が作用していない) 観測者の時計より遅く進む

ということが分かる。

→ 出発時に K と K' は同じ年齢 (双子) であっても, 運動してから折り返して (このときに加速!) 戻ってきた K' の方が時間がゆっくり進んだ (K' のほうが歳をとらず若い) のである。

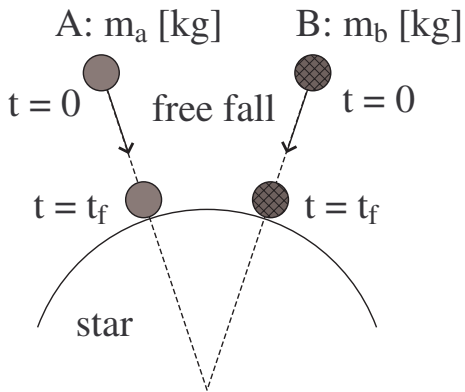


図 10.1 : 重力による加速の実験事実

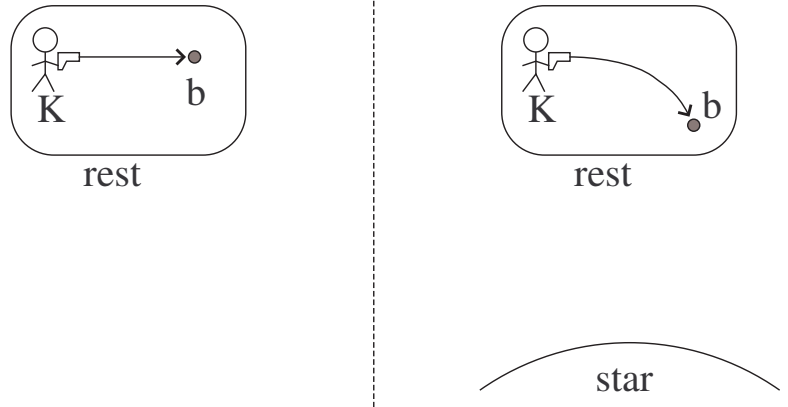


図 10.2 : 重力の有無による物体の運動の違い

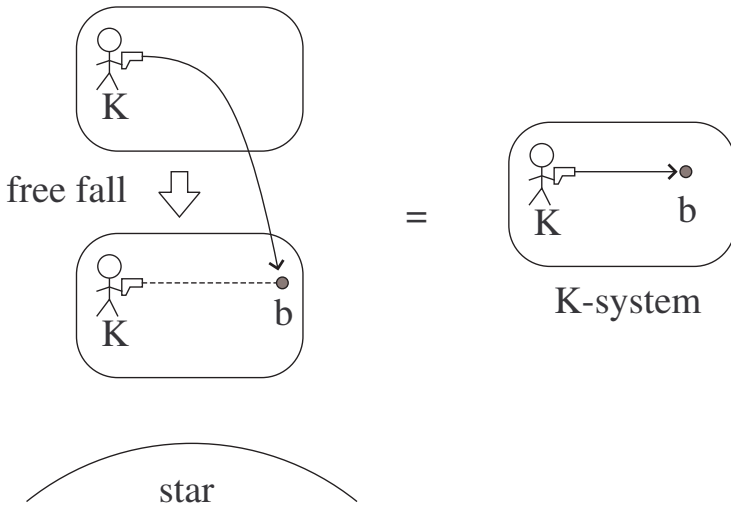


図 10.3a : 適切な加速で重力を打ち消すことができる

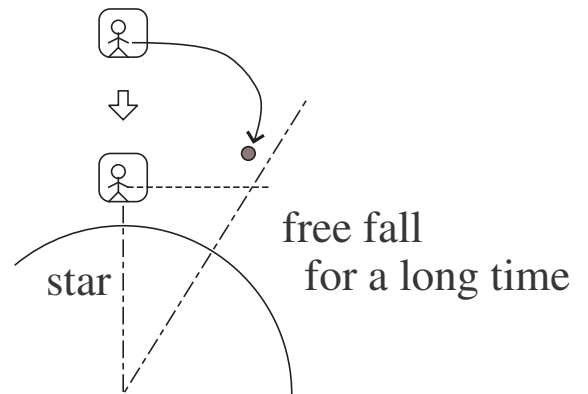


図 10.3b : 十分小さな4次元領域において自由落下で重力が打ち消せる

↓ 図 10.3a, 10.3b の実験事実より ...

等価原理：重力に逆らわない自由落下によって、4次元時空上で局所的に重力が打ち消され、自由落下している観測者に対して局所的に特殊相対論が再現される。

§11. 一般相対論の基本原則と重力

§11.1 一般相対論の基本原則 (図 11.1)

特殊相対論に、等価原理による修正を加えると、どうなるか？

↑ 重力を含まない (重力によって生じる現象を説明できない) 理論

◇ 等価原理：自由落下している観測者 (自由落下系) からみて 局所的に 重力が打ち消される。 - 図 11.1 -
 ↑
 (時空上の十分小さな領域において)

→ 自由落下系から見て、局所的に特殊相対論が成立している！

→ そこで、重力が存在するときには、特殊相対論の原理 (§1.3) を次のように修正する：

一般相対性原理：

任意の2つの観測者の間の相対速度は測れる。しかし、局所的には どんな観測者でも絶対速度 (空間に対する速度) は測れない。

局所的光速不変の原理：

どんな自由落下系で局所的に光の速さを測定しても、常に同じ値 $c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] である。

→ 重力理論の基本原則は「一般相対性原理」と「局所的光速不変の原理」の2つ。

→ 上の2つの原理は実験事実に基づく要請であるが、これらの原理だけでは重力を定量的に扱えない。そこで、一般相対論では (これらの原理に合致する形で) アインシュタイン方程式を仮定 する。→ §11.2 以降

補足1：局所的光速不変の原理で「光速」を述べているが、正確には光でなく「質量がゼロの粒子」である。

補足2：なぜこれらの原理が正しいのかは誰も知らない。理解して覚えるべき実験事実。

§11.2 重力を記述する一つのテクニックとしての「曲がった時空」という考え方 (図 11.2, 11.3, 11.4, 11.5)

● 重力が存在する時空上を、光はどのように進むか？

◇ まず、無重力の時空で考える。 - 図 11.2 -

{ 観測者 K : 加速して いない 観測者 (慣性系 inertia)
 { 観測者 A : 加速して いる 観測者 → 光が通過する間に A の速さ v_a が増加する

→ 観測者 K が光を出すと：

 { K から 見ると、光の軌道は直線

 { A から 見ると、光の軌道は曲がって見える

等価原理を考慮すると ...

◇ 次に、重力 (物質の質量) がある時空を考える。 - 図 11.3 -

等価原理より重力と (適切な) 加速度が同じなので、

重力があるときでも、光の軌道が曲がる (11.1)

と結論される。(次の例を参照)

例：星の重力の影響下で、光の軌道は曲がる！ - 図 11.3 (左側) -

等価原理は自由落下系 K で観測すると光の軌道は直線になると主張する。

従って、自由落下系でない観測者 A から見ると、光の軌道は曲がっていないなければならない。

つまり、星の重力の影響下で、光の軌道は曲がるのである。

● 『重力で光の軌道が曲がること』と『時空の形』

§11.1 節で確認したように、一般相対論では、自由落下系から見て 局所的に 特殊相対論が成立している。

(例：星の重力による自由落下系から見て、光の軌道は直線！ – 図 11.3 (右側) –)

→ しかし、結論 (11.1) あるいは等価原理より、時空上で広く見ると光の軌道は曲がる。

→ 平行に、あるいは別の方向に、出された 2 つの光がどこかで交わることもあり得る！

→ 一般相対論では、これを次のように理解している (重力を理解する上での基本戦略)：

重力があると (物質があると) 時空が曲がる！ (11.2)

この基本戦略 (11.2) を基に、重力を定量的に扱うことができるアインシュタイン方程式が 仮定 される。

◇ 図 11.4 の例：曲面 (曲がった 2 次元空間)

(§12 以降の内容)

⎧ 図 11.4 (上)：平行な 2 直線 (2 つの光線) が交わる ← 例：一部が切り取られたような形の面
⎩ 図 11.4 (下)：別方向の 2 直線 (2 つの光線) が交わる ← 例：球面

→ 一般相対論は、『物質によって時空の形が曲がる』ことを、数学的に正確に表す理論。

(… 必要な数学は、微分方程式、テンソル解析、微分幾何学)

→ この宇宙は、我々には、空間の形が時間的に変化していくように見える。 – 図 11.5 –

一般相対論の基本戦略：重力とは時空の曲がり具合 (曲率) である、と理解する。

補足 3：重力を理解するのに、曲がった時空という考え方しかない、と言っているのではない。他の理解の方法も可能かもしれない (Teleparallel 理論など)。曲がった時空という考え方を採用すると (微分幾何学という数学的ハードルが一つあるものの、結果的に) 物理的にシンプルに理解できる、ということである。

補足 4：§12 以降で導入されるアインシュタイン方程式は、基本戦略 (11.2) に基く「仮定」である。その仮定で問題ないこと (アインシュタイン方程式が正しいこと) は、太陽系の惑星空間や銀河間の重力場など、弱い重力場においては観測的に確かめられている (弱い重力レンズ、近日点移動など)。しかし、ブラックホールや中性子星の表面近傍などの強い重力場における観測・実験的な検証にアインシュタイン方程式 (一般相対性理論) が耐えられるかどうかは、未だ確かめられていない。この意味で、現状では、強い重力場におけるアインシュタイン方程式 (一般相対論) は「仮説」に過ぎない、といえる。

↓

強い重力場における一般相対論の検証には、強い重力場における「曲がった時空の効果」の直接観測が欠かせない。ブラックホールの強い重力場による「曲がった時空の効果」を如何に直接観測するか？ という研究課題は、いま非常に重要だと考えられる。

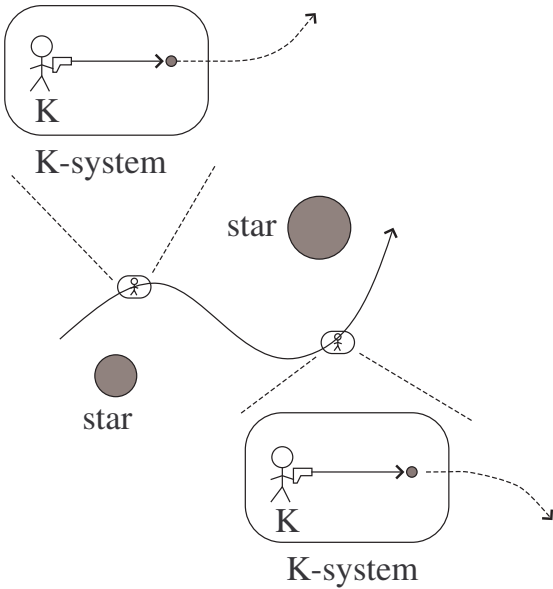


図 11.1 : 等価原理による特殊相対論の修正

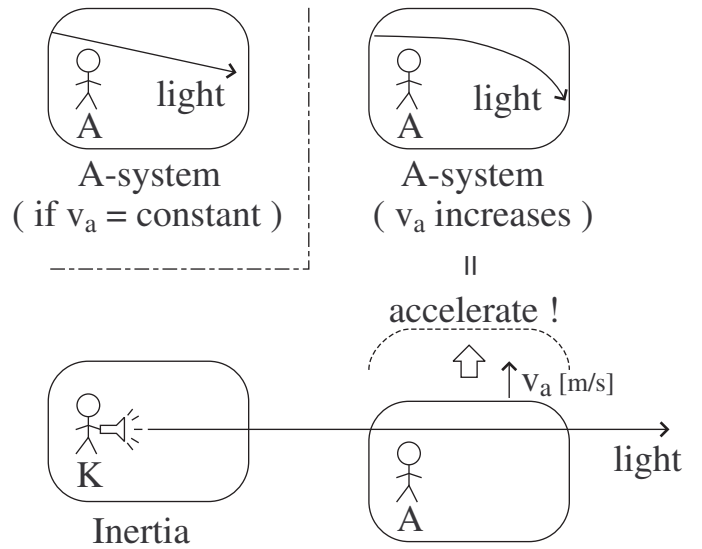


図 11.2 : 光の観測に対する加速度の効果

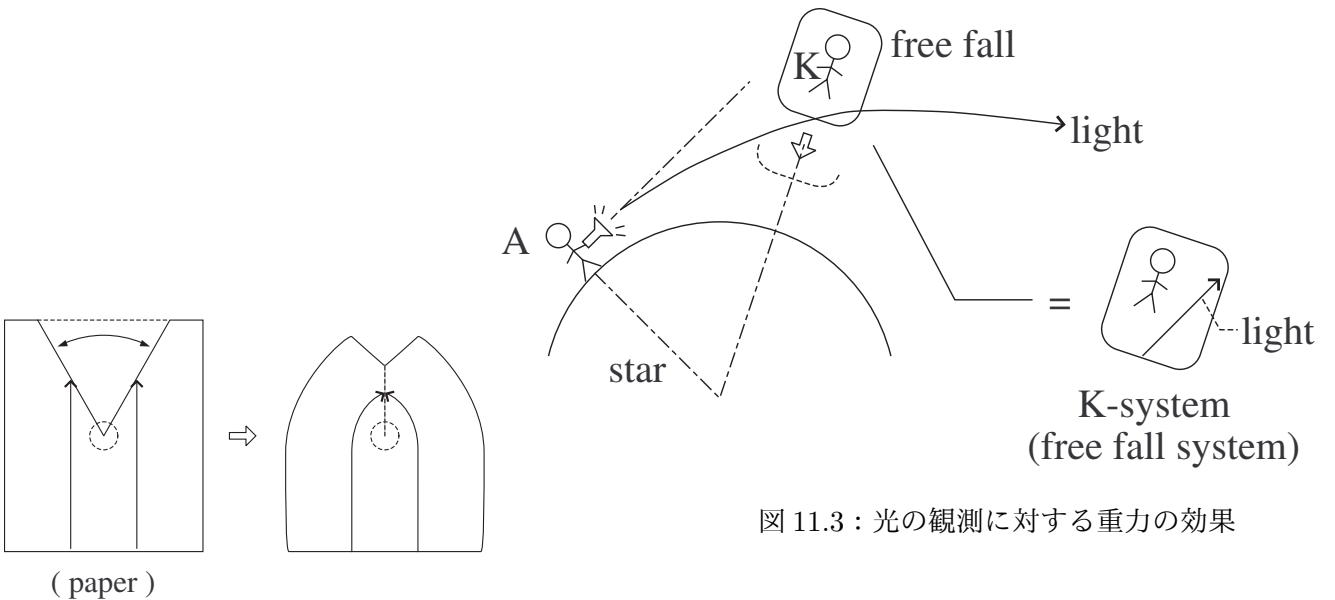


図 11.3 : 光の観測に対する重力の効果

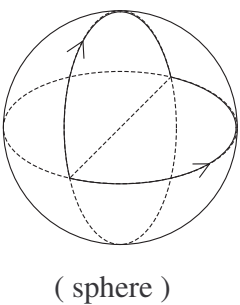


図 11.4 : 曲がった平面上の直線の振る舞い

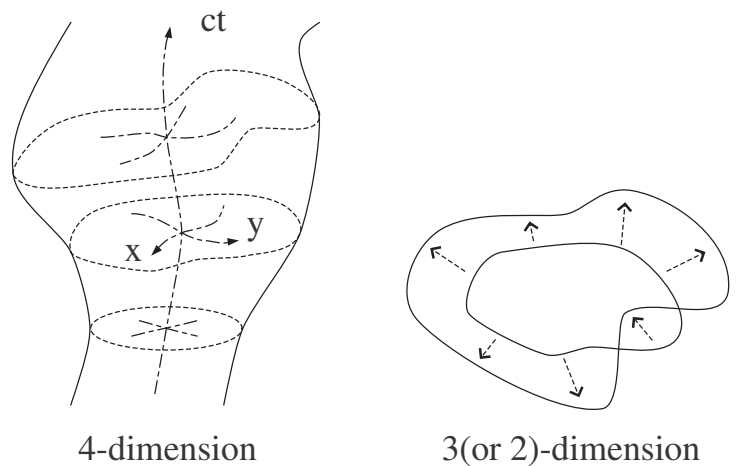


図 11.5 : 宇宙を表す時空をどう認識するか

§12. アインシュタイン方程式：定性的な解説

§12.1 アインシュタイン方程式の意味 (図 12.1)

- 重要な量：事象 P での時空の曲率， $R(P) \propto \frac{1}{L(P)^2}$ … 事象 P における時空の曲がり具合を表す量

ここで， $L(P)$ [m]：事象 P における時空の曲率半径

= 事象 P 周辺の微小な 4 次元的領域を 4 次元的球で近似したときの，その 4 次元球の半径

補足 1：曲率と曲率半径のイメージ - 図 12.1 -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{図 12.1a : 1 次元面 (つまり曲線) の曲率のイメージ図} \\ \text{図 12.1b : 1 次元曲面の曲率のイメージ図} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ 『曲率 } R(P) \text{ が大きい』} \iff \text{ 『時空がよく曲がっている (重力が強い)』} \\ \diamond \text{ 『曲率 } R(P) = 0 \text{』} \iff \text{ 『時空が平坦 (重力がない)』} \rightarrow \text{ 特殊相対論のミンコフスキー時空} \end{array} \right.$$

- アインシュタイン方程式の意味

一般相対論では，§11.2 の基本戦略 (11.2) から，次のアインシュタイン方程式を仮定する：

$$\underline{R(P) \propto \frac{G}{c^2} \rho(P)} \quad \text{ただし, } \left\{ \begin{array}{l} G \quad : \text{ ニュートン定数 } (G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ [m}^3/\text{s}^2 \text{ kg)}) \\ c \quad : \text{ 光速 } (c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m/s)}) \\ \rho(P) : \text{ 事象 P での物質の質量密度 [kg/m}^3] \end{array} \right. \quad \text{————— (12.1)}$$

→ アインシュタイン方程式は物質の分布と時空の形を関係つけている。

→ 質量密度が大きい場所ほど，重力が強くなり，時空がよく曲がる (曲率が大きい)。

補足 2：式 (12.1) は正確ではない。数学的に正しくは， $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ ，と表現する。 $G_{\mu\nu}$ は時空の曲率を表すアインシュタイン曲率テンソル， $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギーや運動量の時空上での分布を表すエネルギー運動量テンソルという量。テンソルとは，ベクトルをさらに数学的に拡張した概念であり，一般相対論を定量的に正確に扱う上で必修の微分幾何学の前提知識。

§12.2 曲がった時空の視覚化 (図 12.2)

§11.2 より，一般相対論は『重力が存在する時空を「曲がった時空」として認識する』という戦略を採用している。どうやって把握したらいいの？

⇓ これに注意！

一般相対論には，曲がった時空を $\left\{ \begin{array}{l} \text{数学的に認識する「微分幾何学」の計算テクニック} \\ \text{紙面上 (あるいは立体模型) で視覚化するテクニック} \end{array} \right.$ が必要。

→ 図 12.2 に視覚化の概要と注意点を示す。

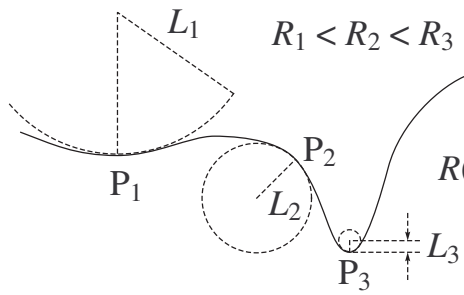


図 12.1a : 1次元曲線の曲率の概念図

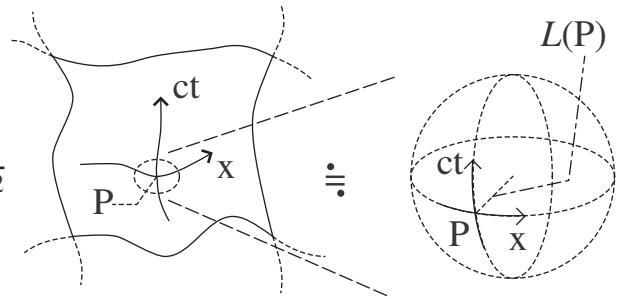


図 12.1b : 2次元曲面の曲率の概念図

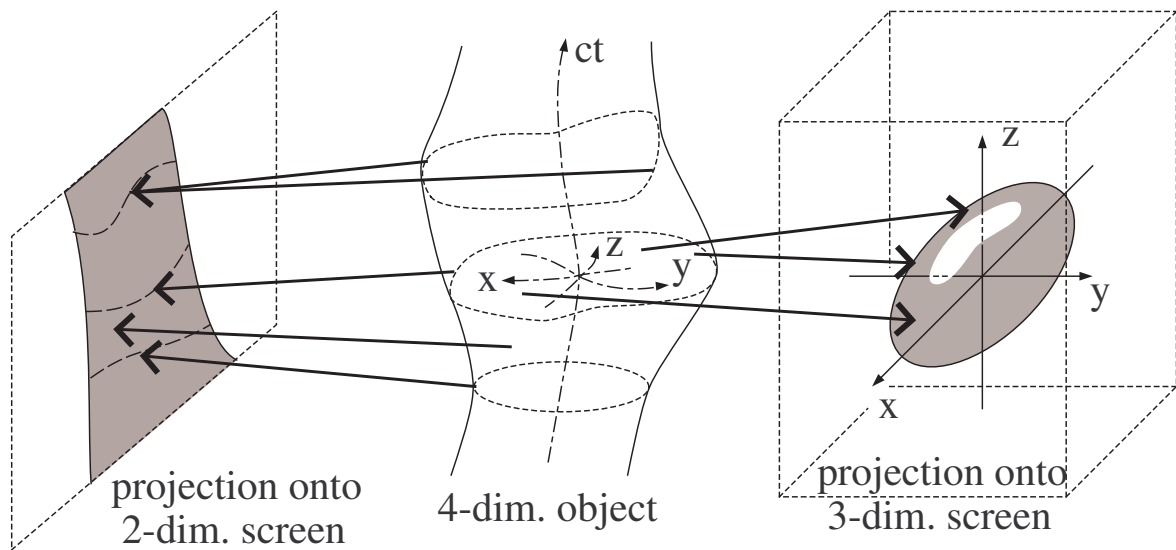


図 12.3 : 数式で表わされる 4次元時空 (の一部) を 2次元や 3次元のスクリーンに投影

視覚化の注意点 :

- ◇ 4次元時空は正確には微分幾何学の数式で把握するもの。その把握の補助的手段として視覚化をする。
- ◇ 4次元時空を 2次元や 3次元の「スクリーン」に投影するのが視覚化。
- ◇ 「スクリーン」への投影には

{	4次元時空の一部分だけを切り取って視覚化する	の 2通りがあり得る。
	4次元時空の全体を視覚化する (事象の縮退あり)	
- ◇ 視覚化することで、何らかの情報の欠落は覚悟が必要 :
 - 例えば,

{	一部を切り取る場合 : 切り落とされた部分の情報が欠落
	全体を投影する場合 : 4次元の複数の事象がスクリーン上で一点に縮退することで情報が欠落
- ◇ 4次元の事象と事象の間隔は、視覚化の方法が変われば「見かけ上」変化し得る。
- ◇ 視覚化の方法はいくつもある。同一の時空の視覚化は必ずしも一通りではない。

§13. 一般相対論の帰結と限界 1: ブラックホール時空の定性的な解説 (図 13.1)

- 大質量星が超新星爆発を起こした後の時空を考える。(この宇宙で可能なブラックホールの生成現象。)

→ 星の中心が自己重力で潰れていき、質量密度が大きくなっていく。- 図 13.1 -

→ アインシュタイン方程式 (12.1) より,

$$\text{『重力があまりにも強すぎて、光円錐が“中心に落ちる方向”にだけ向く領域』} \quad \text{———— (13.1)}$$

が出現する! この領域 (13.1) をブラックホール, その表面をブラックホール地平面という。

補足 1: ブラックホール表面を「事象の地平面」と言うことも多いだろう。しかし厳密には、ブラックホール表面が「事象の地平面」というものの数学的な定義に合致する場合は、ブラックホールに永遠に何も物質が落下せず (ブラックホールそのものが) 時間的に変化しない場合である。「永遠に」ということは、「事象の地平面」の数学的な定義は「無限の未来」の情報に依存しているということである。原理的に「無限の未来の情報」を「現在」に知ることは不可能である (因果律)。従って、観測的にブラックホールに迫ろうとする場合、ブラックホール表面のことを「事象の地平面」でなく「ブラックホール地平面」 (= Apparent horizon や Trapping horizon など無限の未来でなく現在の情報に依存して定義される「地平面」と言う方が理論的に適切である。

- ブラックホールの基本的な事実:

◇ ブラックホール内部で光円錐は「内向き」なので、物質は中心から半径一定の位置に留まることは不可能。

→ あらゆる物資はブラックホール中心に落下していく。ブラックホールは中身がカラッポ!

◇ ブラックホールの中心は質量密度が無限大 $\rho(r=0) = \infty$

→ アインシュタイン方程式 (12.1) が適用できない。

→ 中心は既知の物理理論が全て適用できないところ。(ブラックホール) 時空特異点という。

→ 現代物理学の限界!!!

◇ 回転していないブラックホールの半径: $L_{BH} = \frac{2GM}{c^2}$ (M : この半径の内側に “潰れ落ちた” 質量)

* 地球 $M \simeq 6 \times 10^{24}$ [kg] で, $L_{BH} \simeq 9$ [mm]

* 太陽 $M \simeq 2 \times 10^{30}$ [kg] で, $L_{BH} \simeq 2$ [km]

補足 2: 回転していないブラックホール (Schwarzschild BH) の半径の“擬”導出

ニュートン力学とニュートン重力において、星 (質量 M , 半径 L) からの脱出速度を v とすると、力学的エネルギーが丁度ゼロになるので、

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{L} = 0 \quad (m: \text{ある物体の質量}) \quad \implies \quad L = \frac{2GM}{v^2}$$

星の半径がちょうどブラックホール半径 L_{BH} になったときの脱出速度が光速 c だと考えれば、

$$L_{BH} = \frac{2GM}{c^2}$$

これは、偶然にも、一般相対論で正確に計算した Schwarzschild BH 半径と一致する。

→ ニュートン重力は「そこそこ良い」理論だということか? BH 降着円盤などの数値計算で、“擬” ニュートン

ポテンシャル $U_{\text{psudo}} := -\frac{GM}{r - L_{BH}}$ が使われることも多いようだが、上の「 L_{BH} の擬導出」は、 U_{psudo} がそこそこ良い近似だということを暗示するのかもしれない。

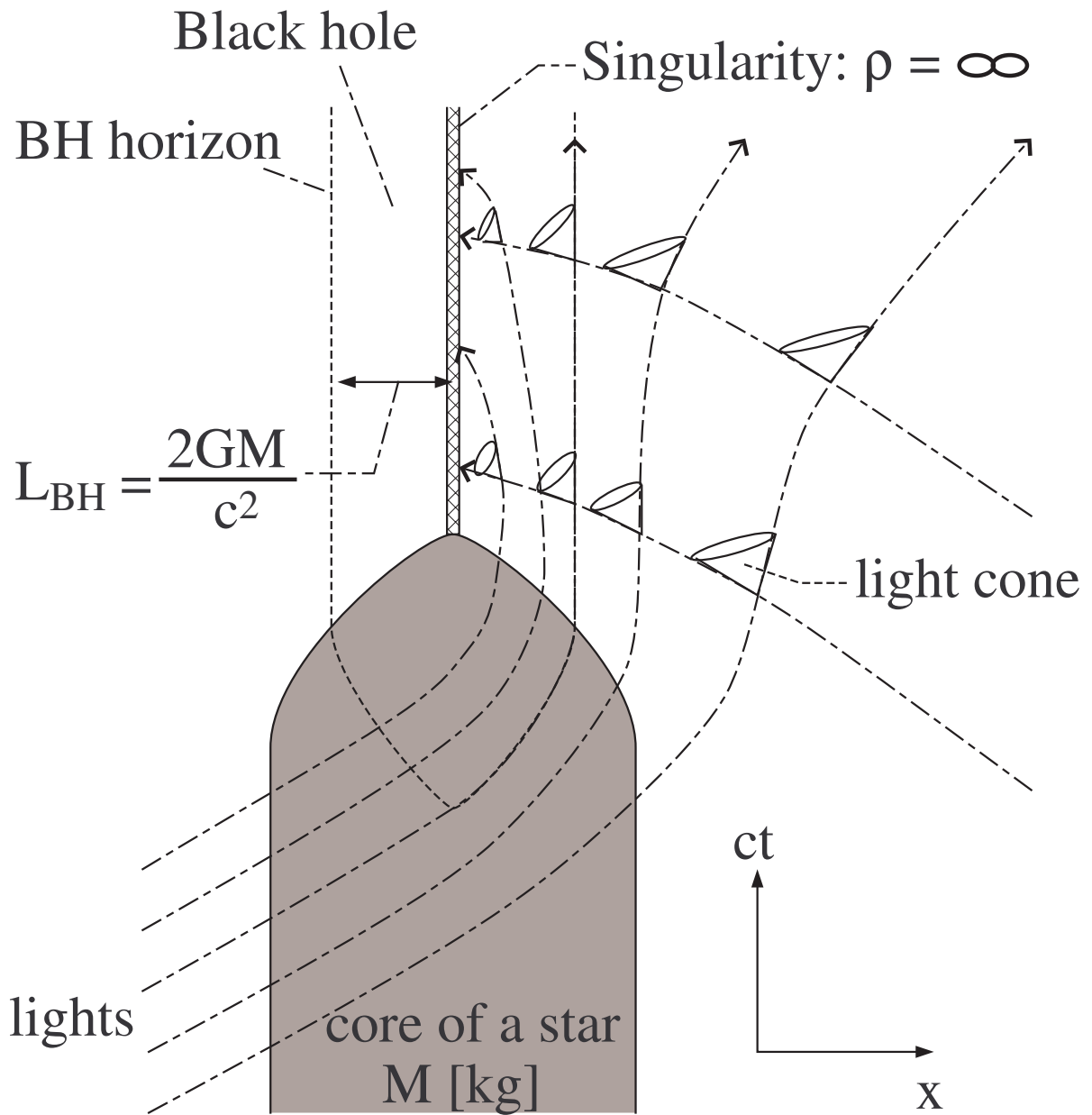


図 13.1 : 重力崩壊によるブラックホール生成の概念図

y, z 座標は省略し, $ct-x$ の 2 次元部分だけ描いてある。図中の半径 L_{BH} の値は, 自転しないブラックホールの場合の半径。

§14. 一般相対論の帰結と限界 2 : 膨張する宇宙を表す時空の定性的な解説 (図 14.1, 14.2, 14.3)

- われわれの宇宙の基本的な観測事実 :

観測事実 : どの方向を見ても、遠くの銀河ほど速いスピードで、我々の銀河から遠ざかっている。

→ 『我々の銀河が宇宙で唯一の特別な中心でない』とすれば、どの銀河から見ても上の事実と同じ観測結果を得るはず。

→ 宇宙の (3次元) 空間自身が膨張していると考えられる。… 膨張宇宙の時空 (2次元) の例は図 14.1

↓ これはどういうこと?

- この宇宙に『銀河がどの方向にも一様に (等間隔に) 散らばっている』とすると、§12 のアインシュタイン方程式 (12.1) より、次の結果が得られることが分かっている :

◇ ある銀河に留まっている観測者が測る時間を ct として、

$$\begin{cases} l_{ab} \text{ [m]} & : \text{時刻 } ct = 1 \text{ での, 銀河 A と B の間の空間的距離} \\ L_{AB}(ct) = a(ct)l_{ab} \text{ [m]} & : \text{時刻 } ct \text{ での, 銀河 A と B の間の空間的距離} \end{cases} \quad \text{とすると,}$$

$$a(ct) \propto \begin{cases} (ct)^{1/2} & : 0 < ct < ct_r \\ (ct - ct_r)^{2/3} + \text{定数} & : ct_r < ct \end{cases} \quad \rightarrow \text{図 14.2, 14.3}$$

($t_r \doteq$ 「宇宙に水素原子が作られる時間」 $\doteq 10^5$ 年)

- 以上より、十分過去 ($t = 0$) に戻れば、『宇宙が一点から始まった (生まれた)』ことが結論される!

◇ 現在の時刻 $t \doteq 150$ 億年 と考えられている。

→ 宇宙誕生の瞬間 ($t = 0$) では、宇宙の全質量が一点に集まるのだから、質量密度が無限大 $\rho = \infty$ である。

→ 宇宙の誕生の瞬間は、(初期) 特異点 である。

→ 初期特異点もブラックホール特異点と同様に、現代物理学が適用できないところ。

現代物理学の限界の一つ !!!

- * ブラックホール特異点で起きる現象や、宇宙の初期特異点 (宇宙誕生の瞬間) を知るためには、全く新しい物理学理論を作る必要がある。アインシュタインを始め、多くの物理学者が、その新理論を作ろうという研究に 100 年近くチャレンジしてきた。しかし、その新理論がどんなものか、まだ人類には分かっていない。

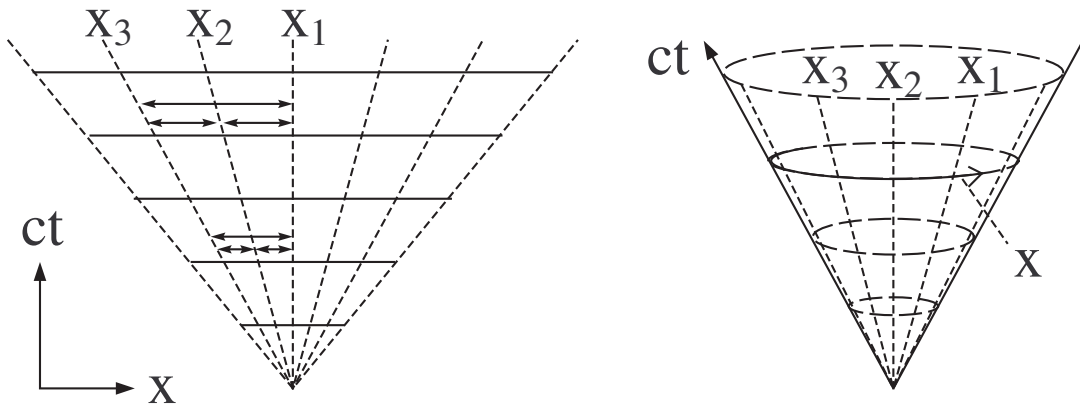


図 14.1 : 2次元の膨張宇宙の例。左側は空間方向に無限に広がる場合 (の一部分だけ表示), あるいは, 空間方向に端 (空間の終わり) がある場合。右側は空間が「閉じて」いる場合。点線は, x 軸の目盛りが描く世界線を表す。一つの点線の世界線に沿って $x = \text{一定}$ (ある銀河の世界線) である。

銀河 x_1 から近くの銀河 x_2 と遠くの銀河 x_3 を見る場合を考える。一定の時間の間での距離の変化を考えると, 遠くの銀河 x_3 のほうが近くの銀河 x_2 よりも速く (銀河 x_1 から) 遠ざかっていくことが分かる。

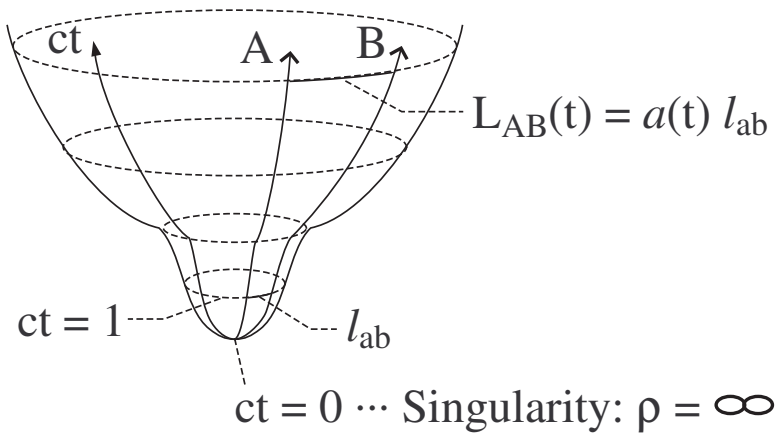


図 14.2 : 我々の膨張宇宙の大雑把な姿。

宇宙の初期特異点は, 現代物理学が未だ解明できていないところ。

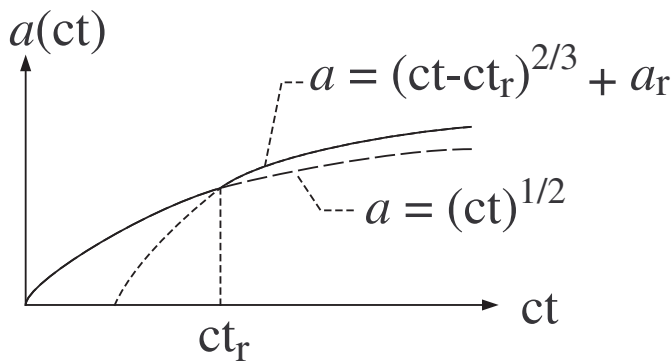


図 14.3 : 上図の $a(ct)$ のグラフ。 ($a_r = a(ct_r)$)
このグラフは宇宙の膨張の仕方を端的に表す。