

ブラックホールシャドウと Kerrパラメータ

大阪市立大学

高田 真聡

共同研究者： 伊形 尚久 石原 秀樹

第14回BH地平面勉強会(2013年6月29日)

Introduction

BH観測の決定版は何か？

BHの特徴

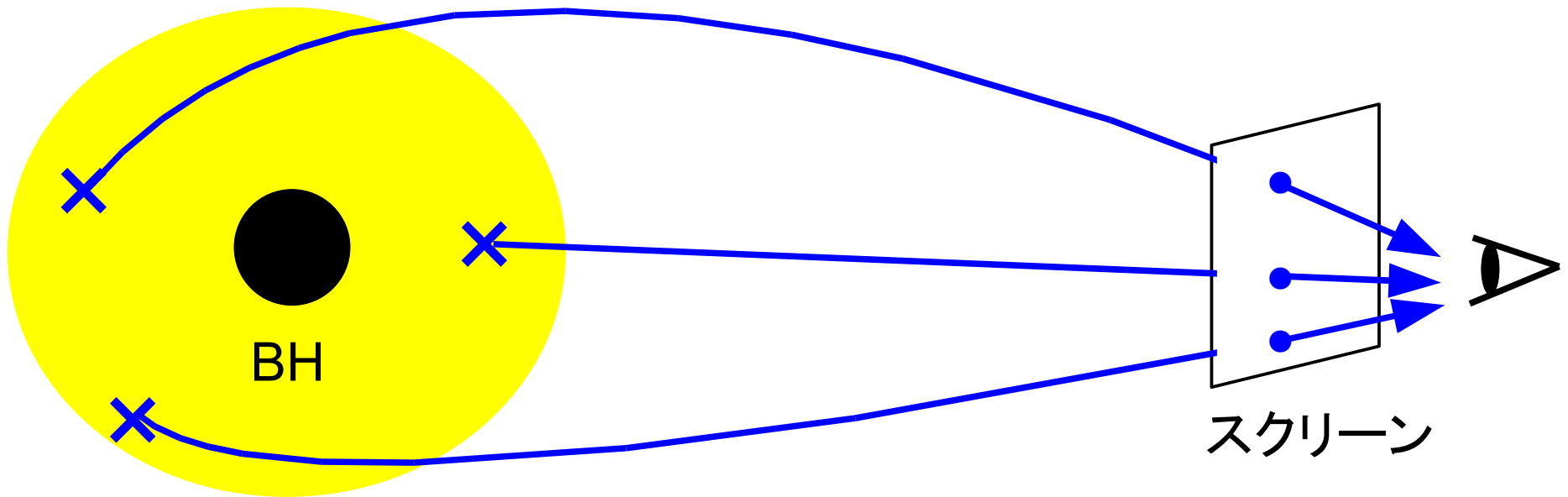
- | | |
|---------------|----------|
| 1. BH Horizon | r_g |
| 2. 光の不安定円軌道 | $1.5r_g$ |
| 3. 粒子の安定円軌道 | $3r_g$ |

BH Shadow

BH 周囲の光源分布を仮定し、
それがどう見えるかを考える

= 明るさの分布を考える

状況設定

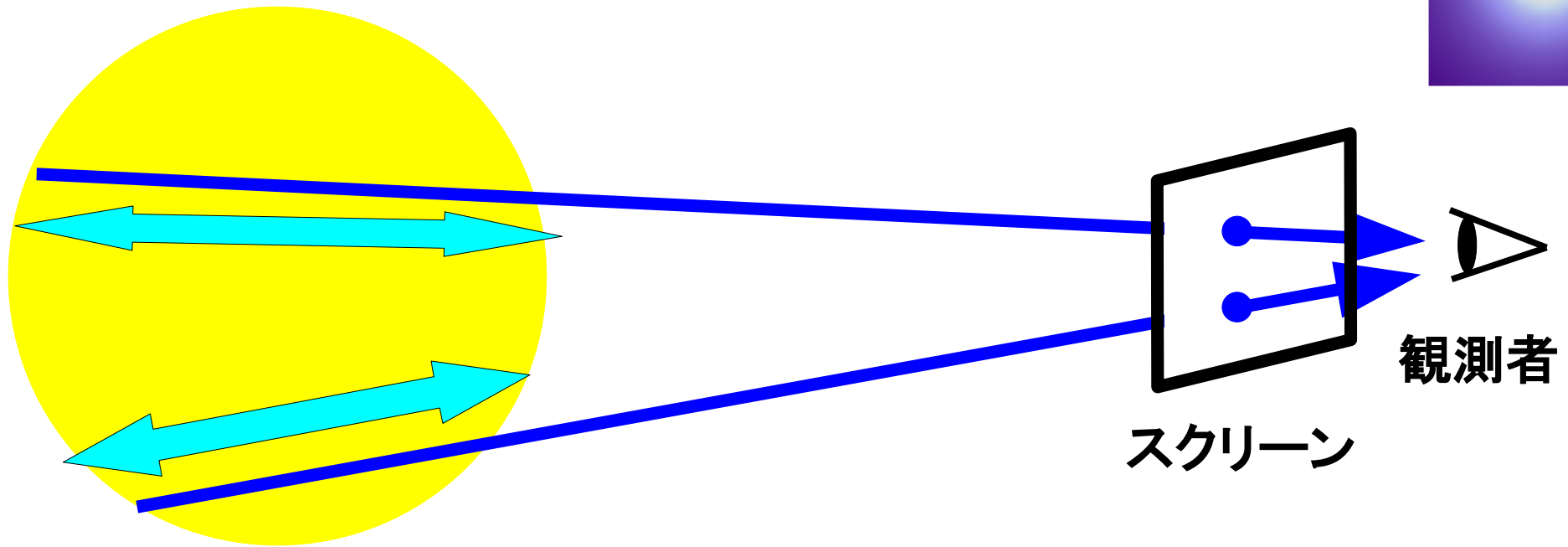
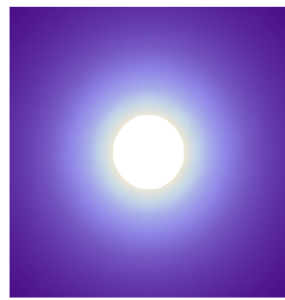


- 光源は一様、広く球対称分布
- 光源は光学的に薄く、吸収は無し
- 光源は無くなる(静止)

- 幾何光学近似が有効

スクリーン上に観測される
明るさの分布を考える

photon数の見積もり



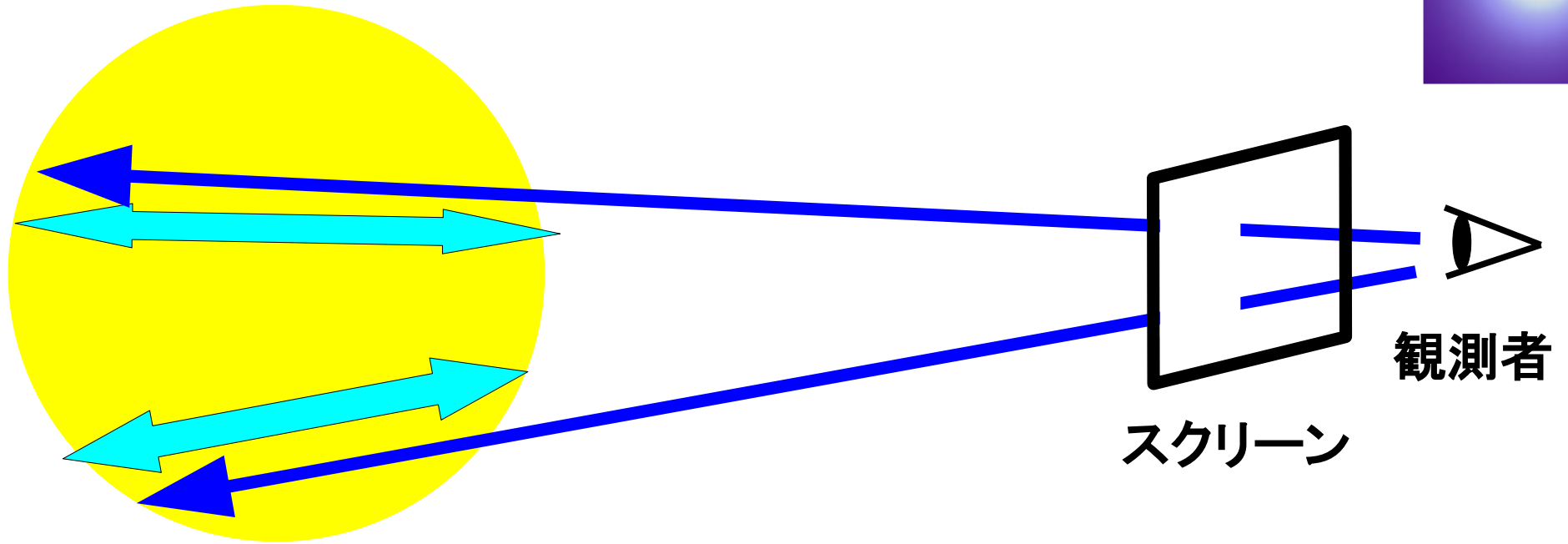
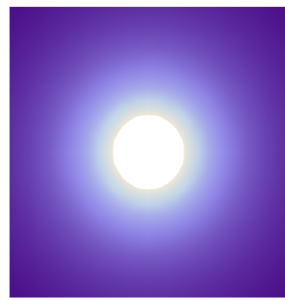
スクリーン上の各点の明るさ = エネルギー / 時間

\propto 振動数 \times photon数 / 時間

photon数 \propto 光が光源領域を通った距離

スクリーン上の各点は impact parameter と対応

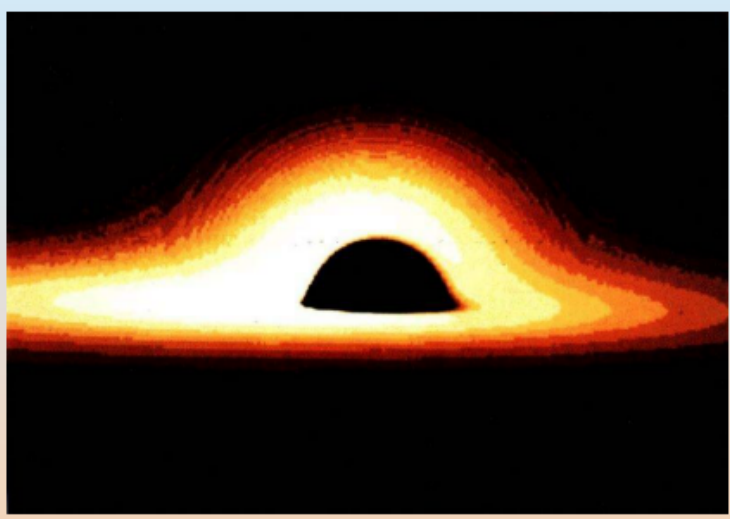
photon数の見積もり



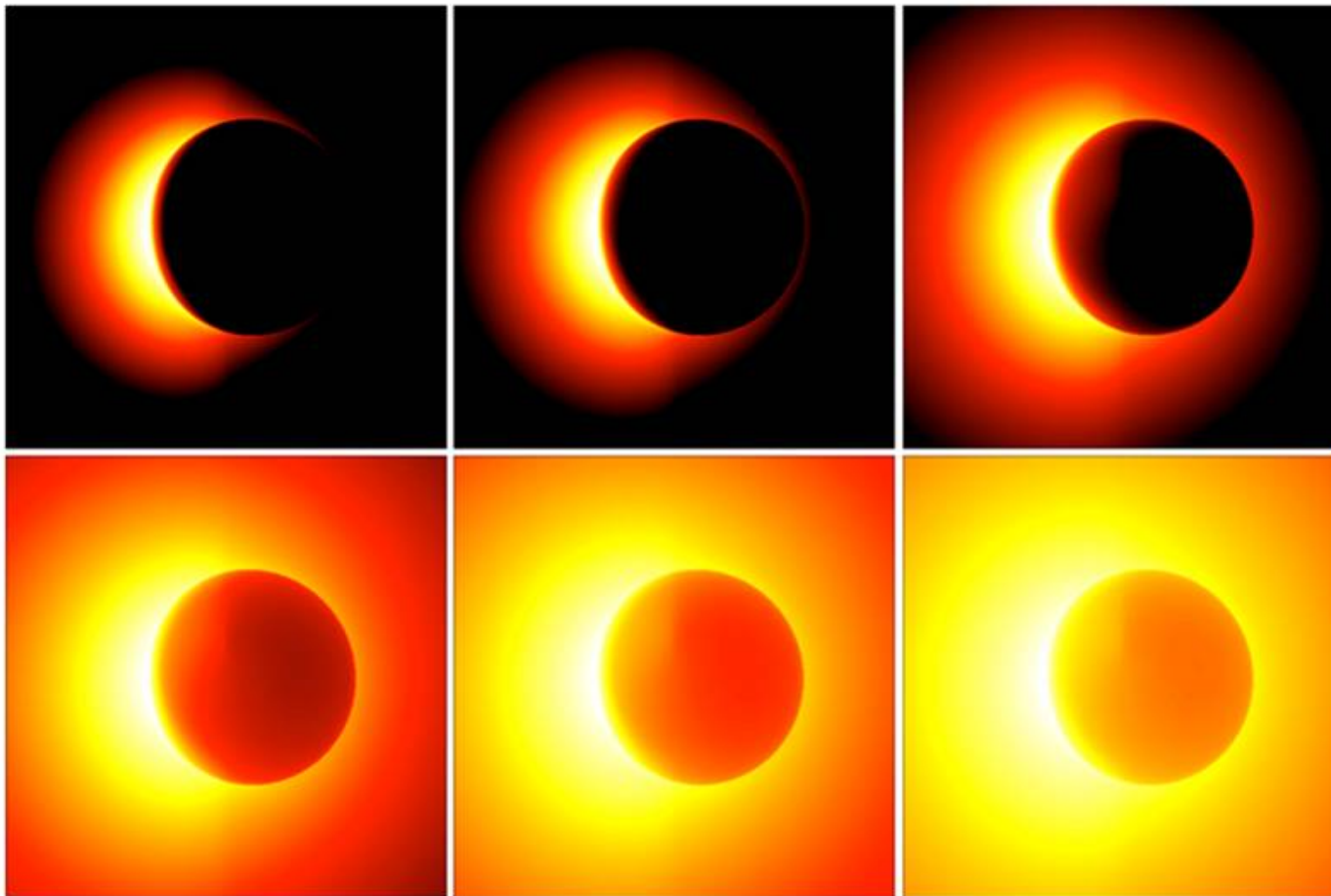
観測者 \rightarrow 光源 の光を考える。

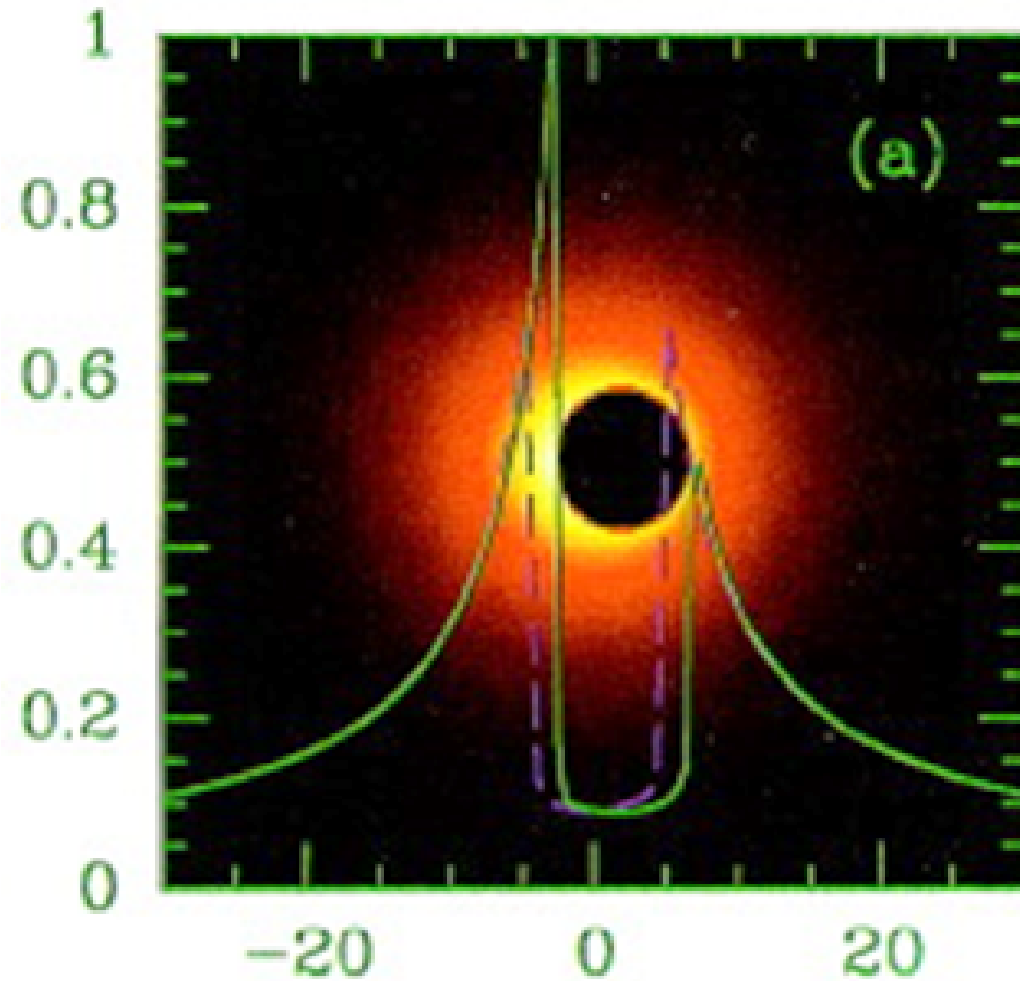
測地線を逆に解く

Fukue & Yokoyama 1988



R. Takahashi 's homepage





*H. FALCKE , F. MELIA, and E. AGOL,
ASTROPHYSICAL JOURNAL, 528:L13-L16, 2000*

null geodesic in Kerr geometry

metric

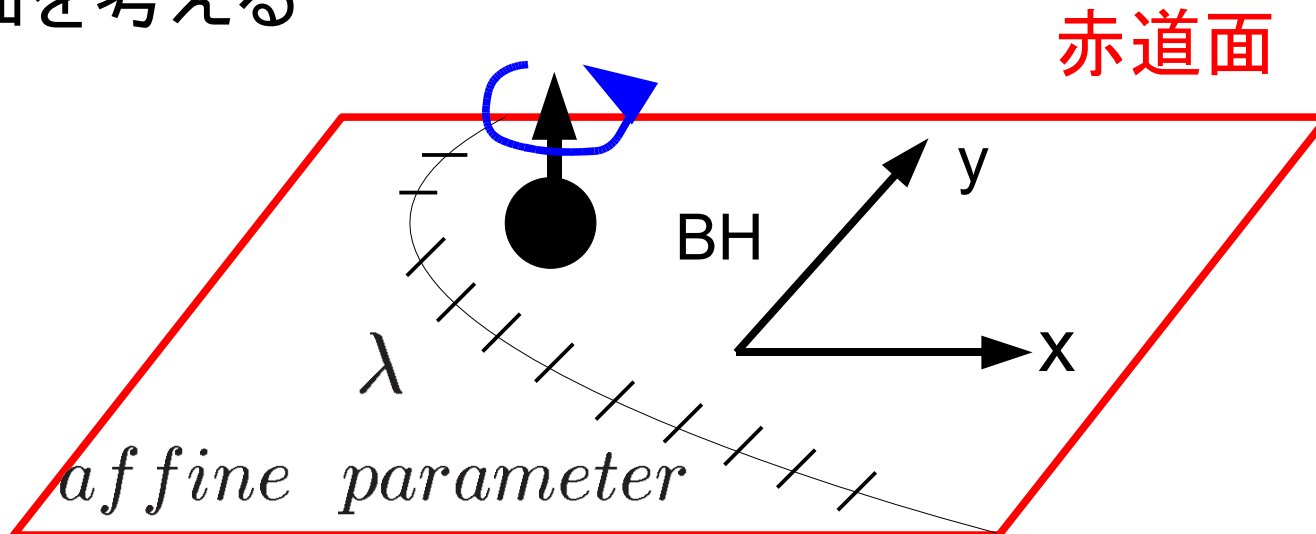
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma^2} \right) dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 + \left[\Delta + \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\Sigma^2} \right] d\phi^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma^2} dt d\phi$$

$G = c = 1$
 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ BH horizon
 $\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

Hamilton-equation

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0 \quad \frac{dp_\mu}{d\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}$$

赤道面を考える



有効ポテンシャル

$$p_t = -E \quad p_\phi = L \quad \text{保存量}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(r^2 - 2Mr + a^2)}{r^2} p_r^2 + U = 0 \quad \left(\theta = \frac{1}{2}\pi \right)$$

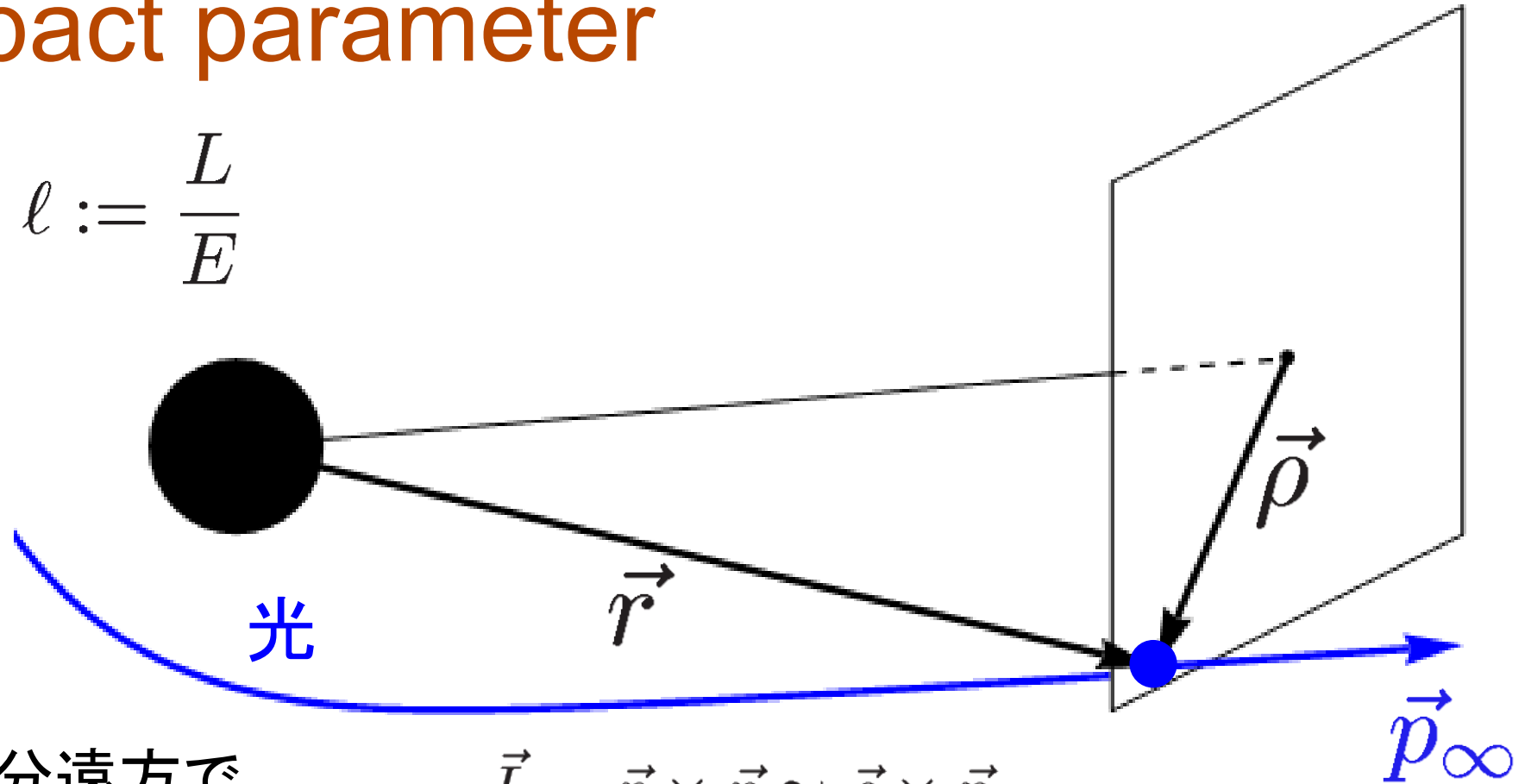
$$U = -\frac{4r^3 + 2(a^2 - \ell^2)r + 2M(a - \ell)^2}{2\ell^2 r^2 (r^2 - 2Mr + a^2)} E^2$$

: 有効ポテンシャル

$$\ell = \frac{L}{E}$$

Impact parameter

$$l := \frac{L}{E}$$



十分遠方で

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \simeq \vec{\rho} \times \vec{p}_\infty$$

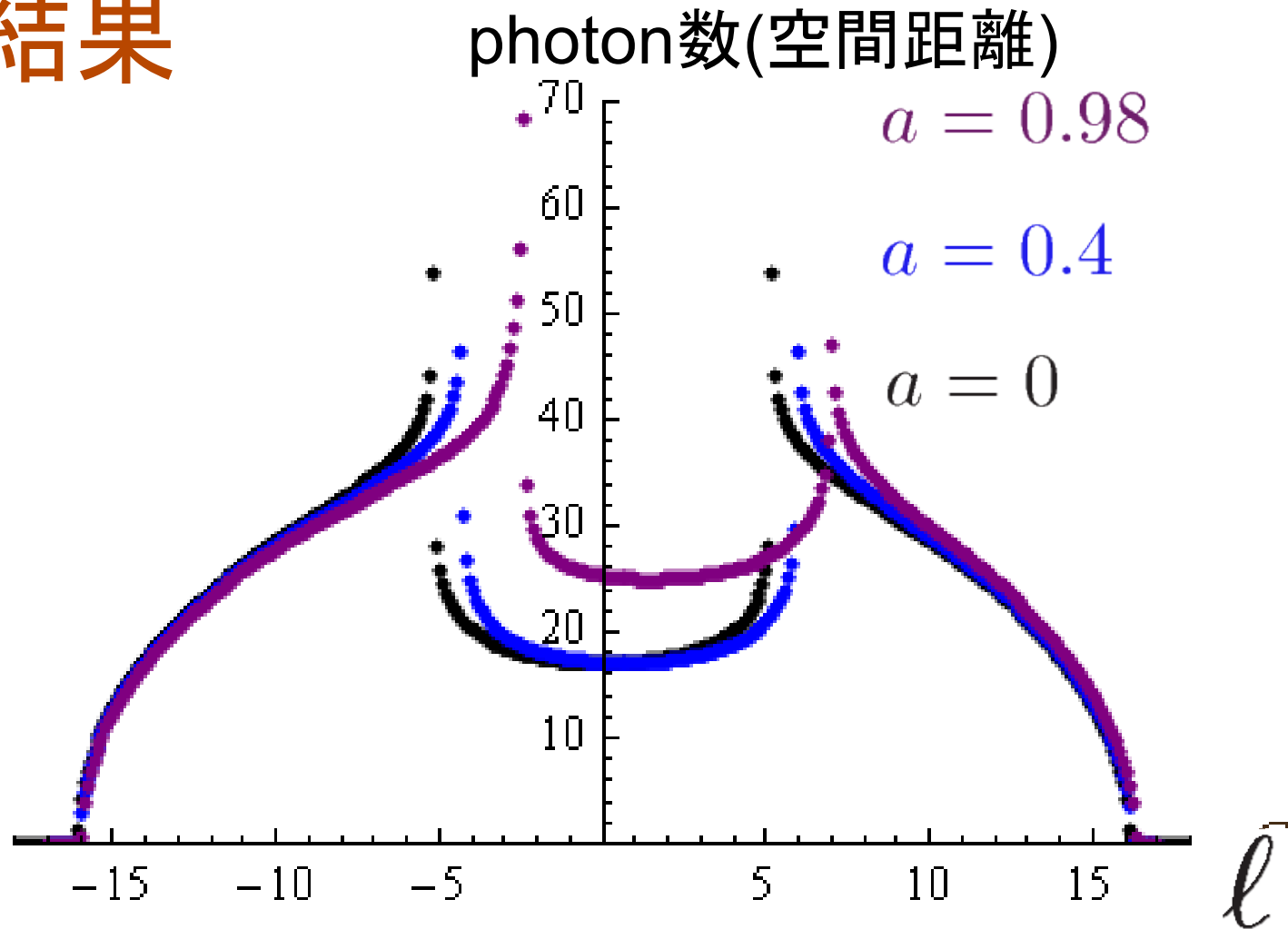
$$\Rightarrow |\vec{\rho}| = \frac{|\vec{L}|}{|\vec{p}_\infty|} = \pm \frac{L}{E} = \pm l$$

impact parameter

= スクリーン上の中心からの距離

= l

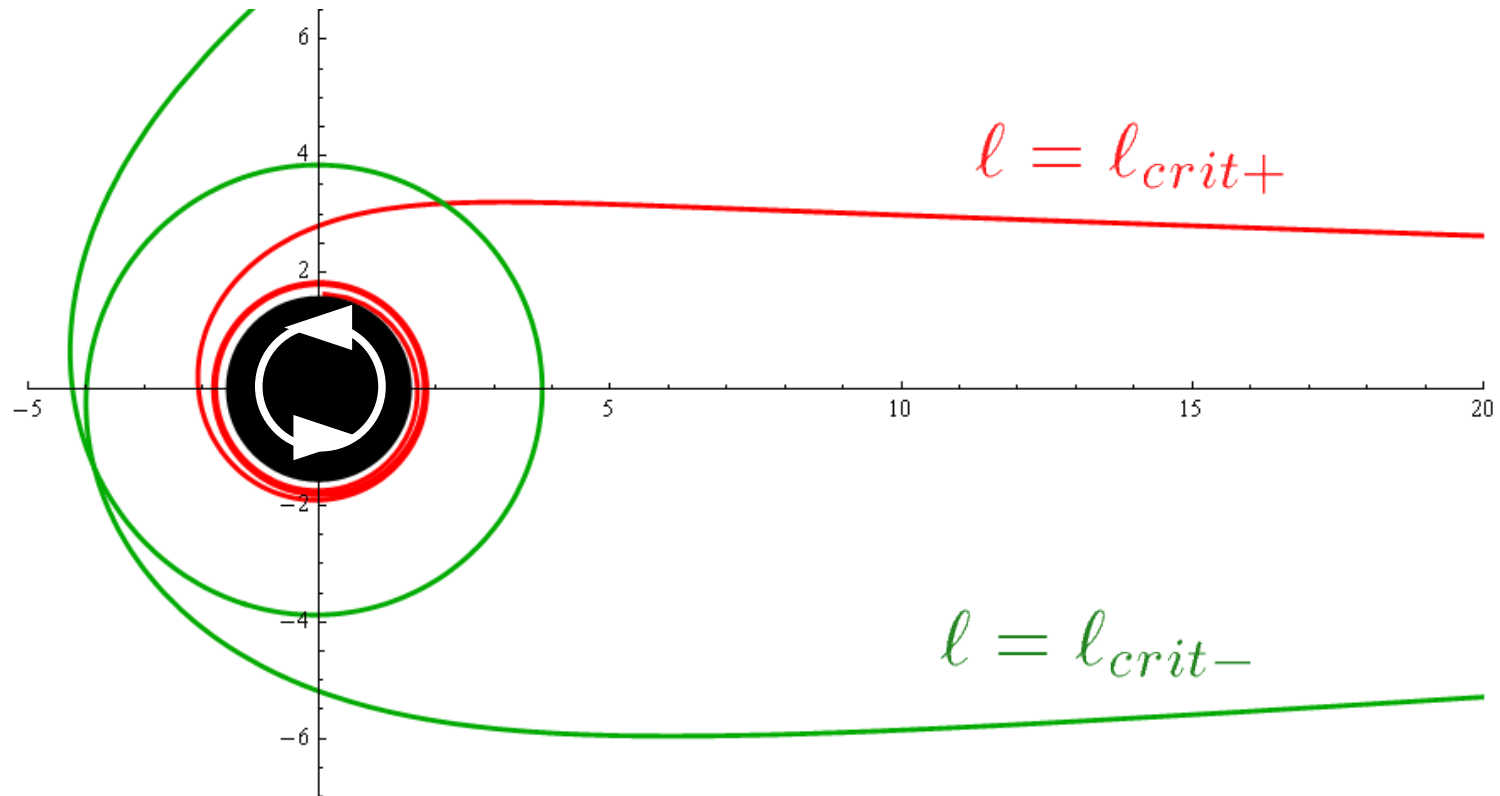
計算結果



2つの impact parameter で発散が生じる

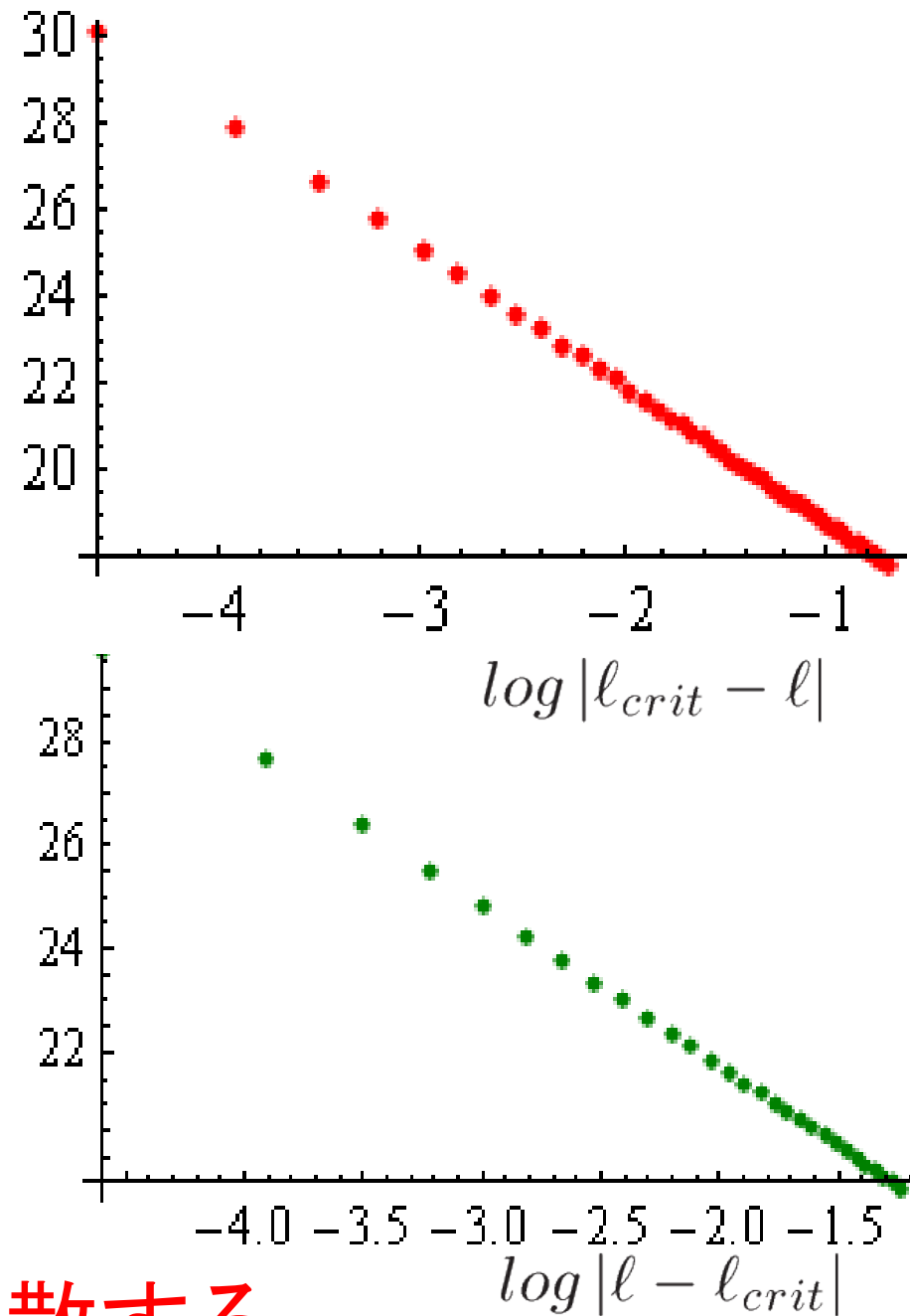
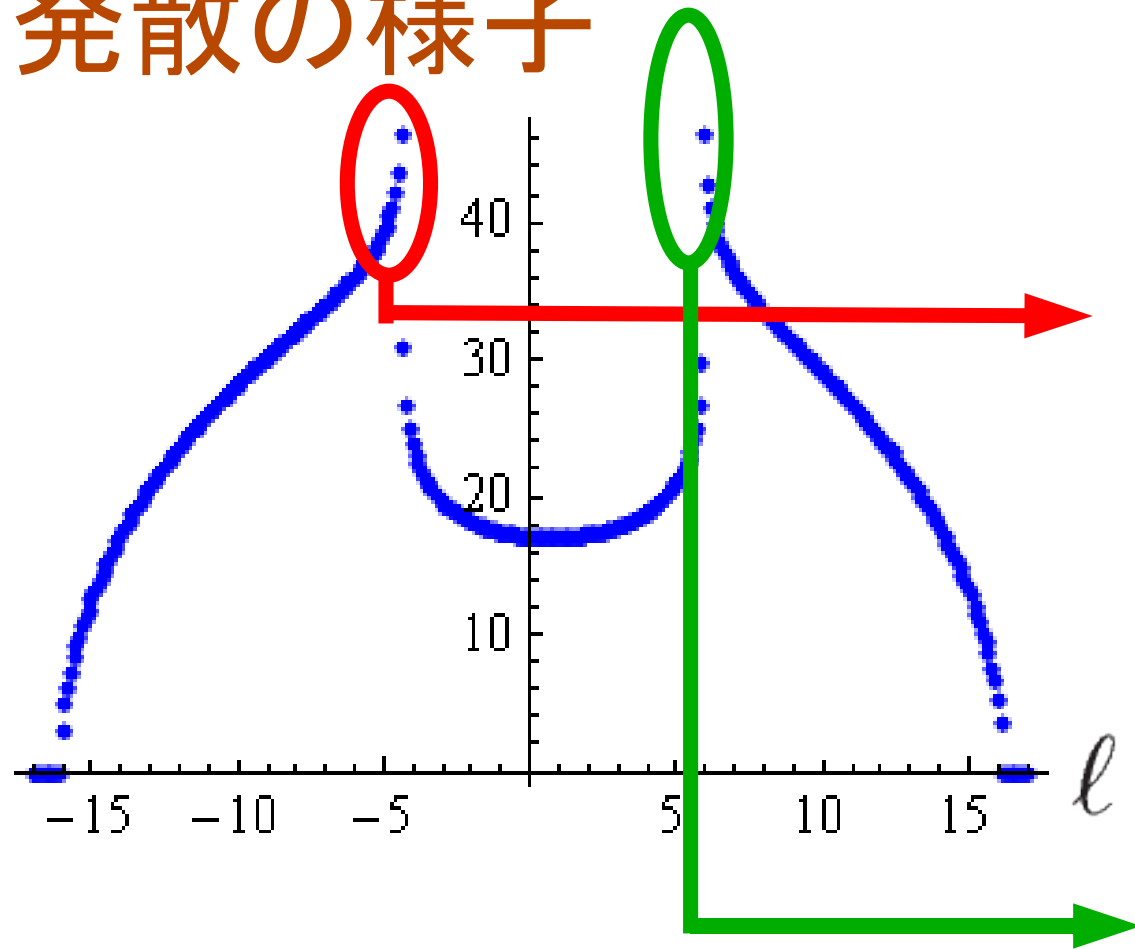
発散が生じる場所はa によって異なる

発散の理由 = 不安定円軌道



半径の異なる2つの円軌道が存在する。

発散の様子



明るさは \log 発散する

不安定円軌道の近傍の 軌道を詳細に調べる

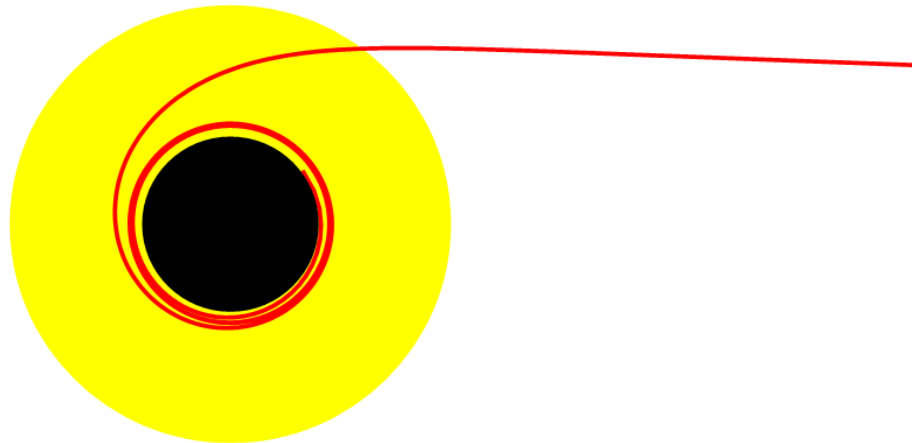
光は何週回るか

$$I = \int_{\infty}^{r_h} \frac{d\phi}{dr} dr = \int_{\infty}^{r_0+\delta} \frac{d\phi}{dr} dr + \boxed{\int_{r_0+\delta}^{r_0-\delta} \frac{d\phi}{dr} dr} + \int_{r_0-\delta}^{r_h} \frac{d\phi}{dr} dr$$

支配的

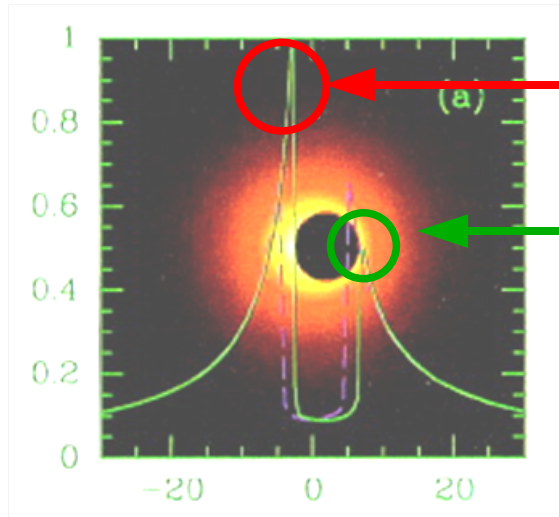
$$H = 0 \quad p_t = -E \quad p_\phi = L \quad \ell = \ell_{crit} - \epsilon$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\sqrt{r} [2aM + (r - 2M)\ell_{crit}]}{\Delta(3M - r_0)\sqrt{(r - r_0)^2(r + 2r_0) + 2\epsilon(2aM + (r - 2M)\ell_{crit})}}$$



光は何週回るか

$$I = \int_{\infty}^{r_h} \frac{d\phi}{dr} dr = \int_{\infty}^{r_0+\delta} \frac{d\phi}{dr} dr + \boxed{\int_{r_0+\delta}^{r_0-\delta} \frac{d\phi}{dr} dr} + \int_{r_0-\delta}^{r_h} \frac{d\phi}{dr} dr$$

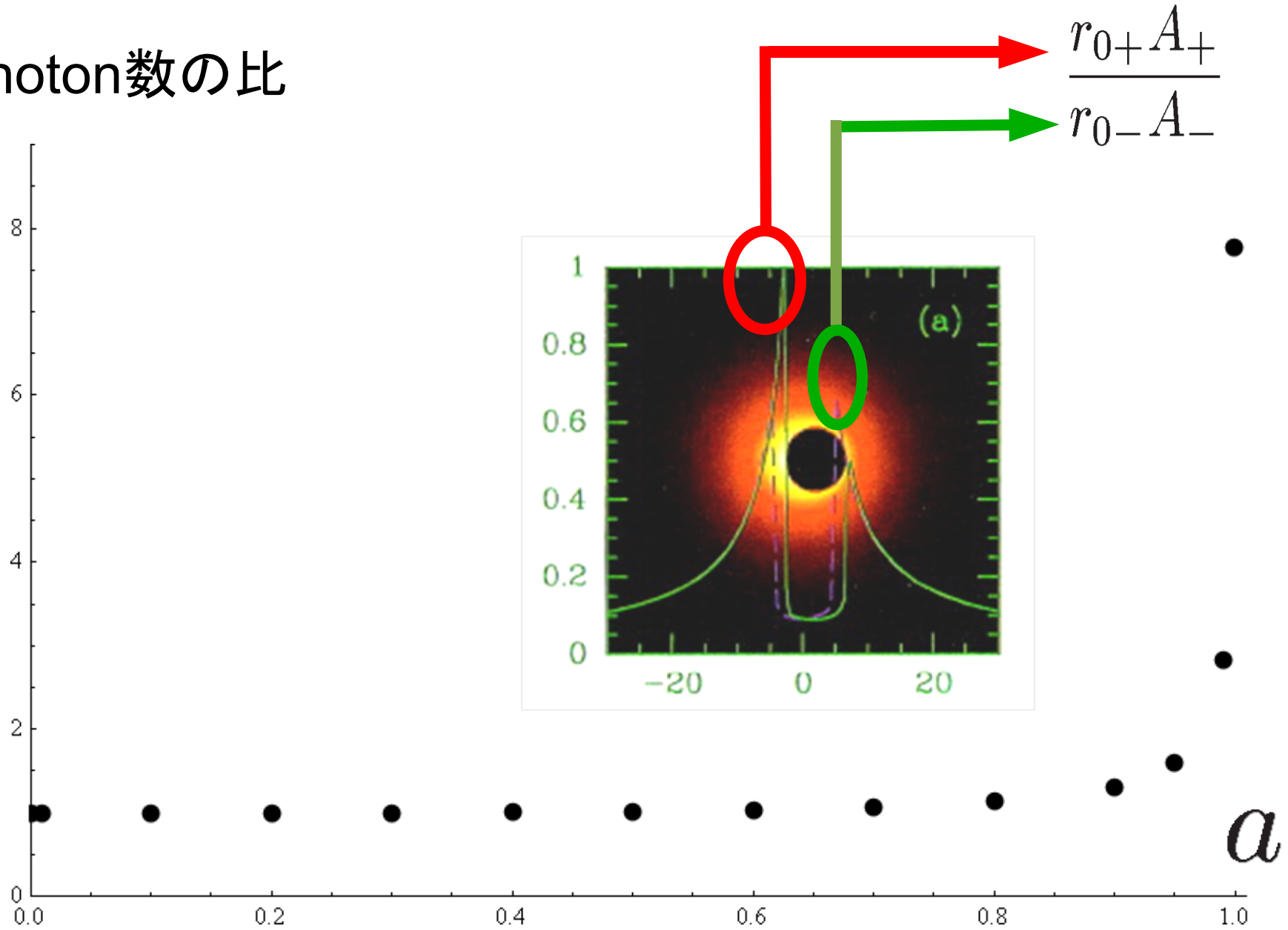


$$I \propto A_+ \log |\ell_{crit+} - \ell|$$

$$A_- \log |\ell - \ell_{crit-}|$$

$$A_{\pm} = - \frac{2aM + (r_{0\pm} - 2M)\ell_{crit\pm}}{\sqrt{3}(r_{0\pm}^2 - 2Mr_{0\pm} + a^2)}$$

photon数の比

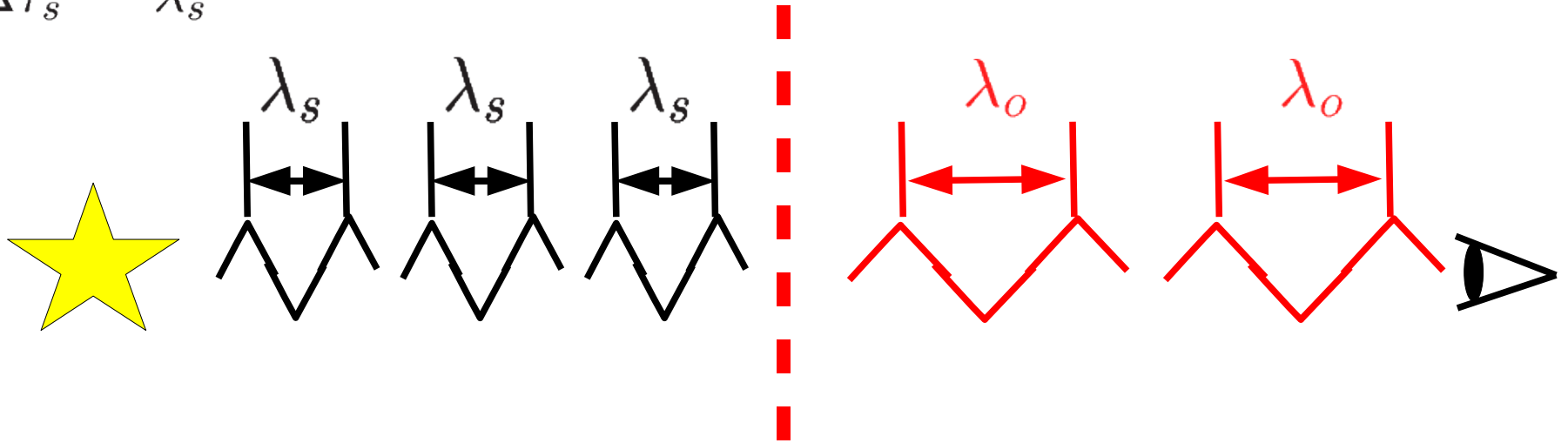


明るさの比と spin parameter は関係がある

重力赤方偏移と ドップラー効果

Red Shift

$$z = \frac{\Delta\tau_o}{\Delta\tau_s} = \frac{\lambda_o}{\lambda_s}$$



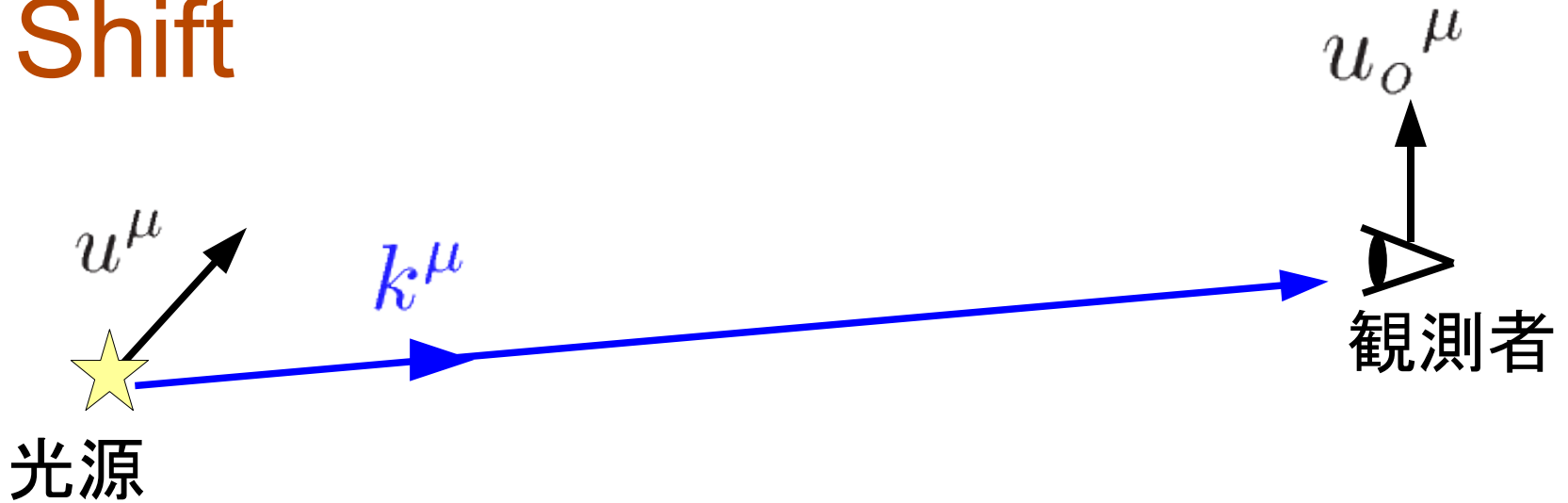
赤方偏移後

単位時間当たりに観測者に届くphotonの数も減る

時間 $\Delta\tau_s$ の間に放ったphoton を 時間 $\Delta\tau_o$ で観測する
単位時間当たりに観測者に届くエネルギーは

$$\begin{aligned} \hbar\omega_o \times n_o &= \hbar \left(\omega_s \times \frac{1}{z} \right) \times \left(\frac{n_s \Delta\tau_s}{\Delta\tau_o} \right) \\ &= (\hbar\omega_s \times n_s) \times \left(\frac{1}{z} \right)^2 \end{aligned}$$

Red Shift



光源が放つ光の振動数

$$\omega_s = -k_\mu u^\mu$$

光源の4元速度

$$u^\mu = (u^t, u^r, 0, u^\phi)$$

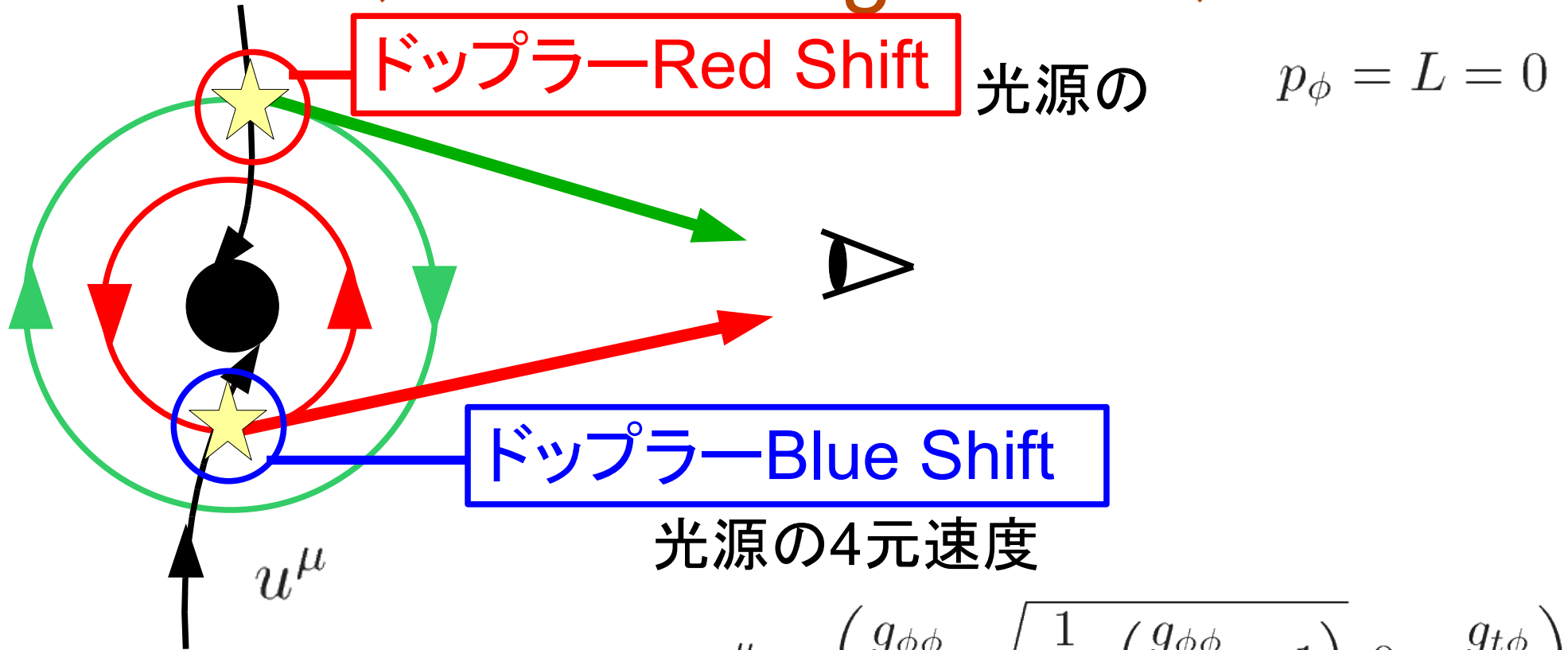
観測者が受け取る光の振動数

$$\omega_o = -k_\mu u_o^\mu$$

観測者の4元速度

$$u_o^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

Red Shift (Free-Falling ZAMO)

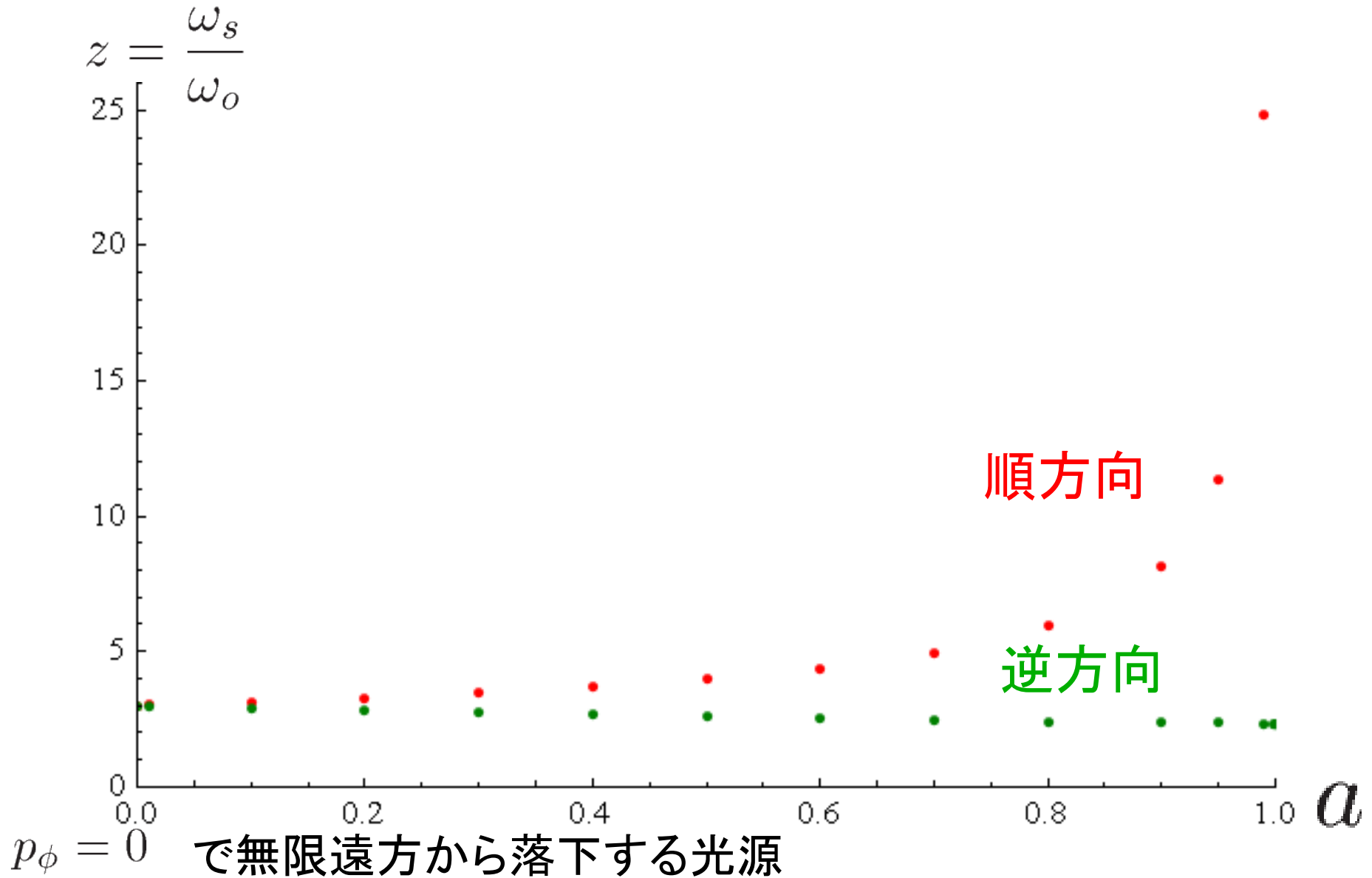


$$u^\mu = \left(\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta}, \sqrt{\frac{1}{g_{rr}} \left(\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta} - 1 \right)}, 0, -\frac{g_{t\phi}}{\Delta} \right)$$

$$u^\phi = -\frac{g_{t\phi}}{\Delta} > 0$$

$$z = \frac{\omega_s}{\omega_o} = u^t - l u^\phi \Big|_{r=r_o, l=l_{crit}}$$

Red Shift (Free-Falling ZAMO)

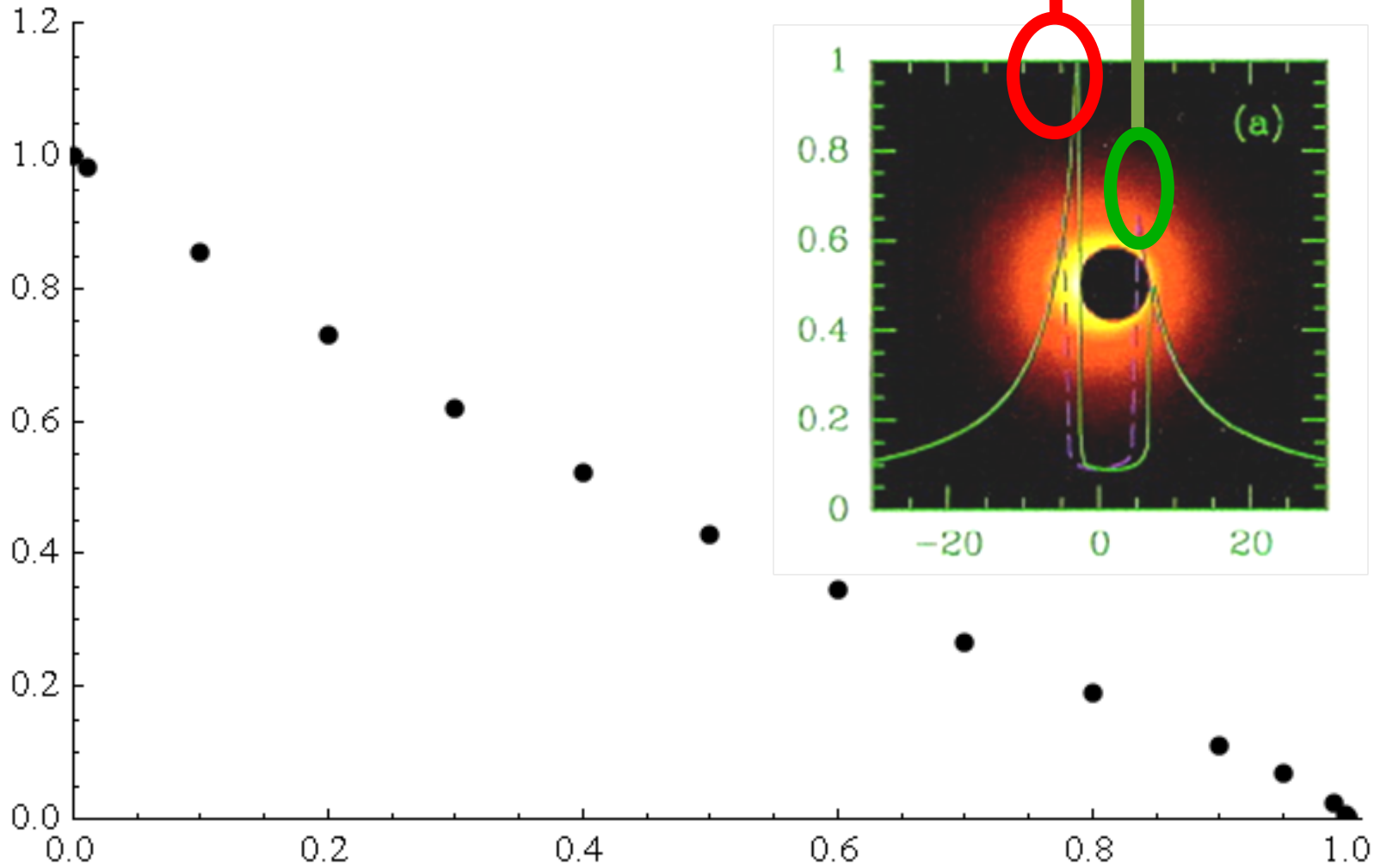


$a \rightarrow 1$ で順方向の光が無限に赤方偏移

Red Shift (Free-Falling ZAMO)

明るさの比

$$\frac{r_{0+} A_+}{r_{0-} A_-}$$



a

Summary

1.
BH Shadow の周縁部では明るさが \log 発散している。これは、不安定円軌道が存在する証拠
2.
赤道面上の左右の明るさの比からブラックホールの角運動量が分かる。これは、ブラックホールの回転に対して順方向と逆方向の不安定円軌道の不安定性の程度の差があるために起こる。