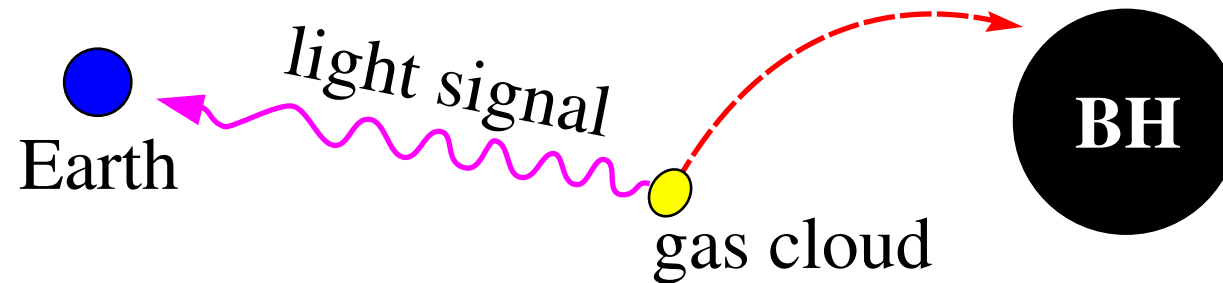


ブラックホール直接観測の原理、方法と問題

齊田 浩見（大同大学） / saida@daido-it.ac.jp

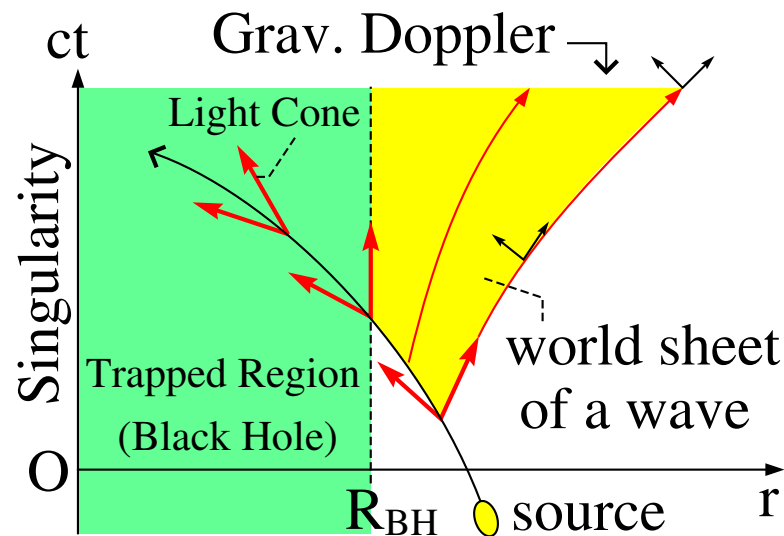
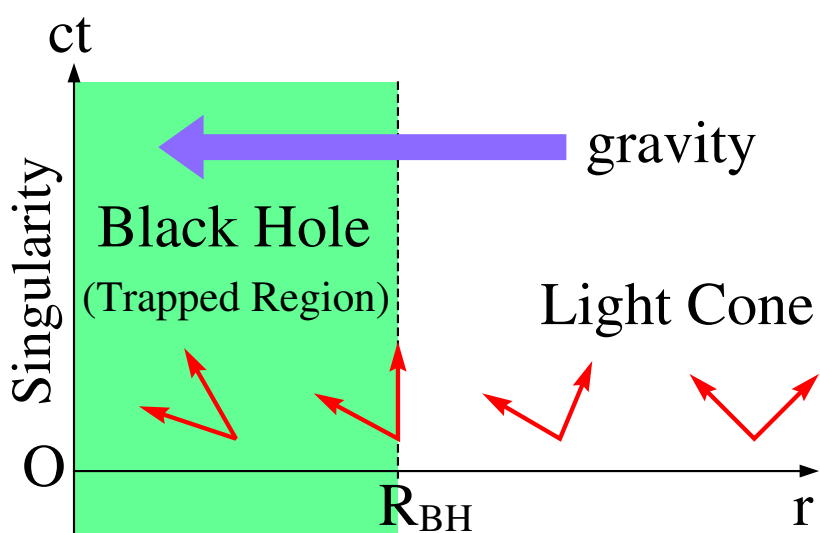


1. 光によるBHの直接観測

- これまでの「BH候補天体」: ニュートン重力に基づいて推定
→ 曲がった時空の効果を見ない限り「候補」のまま
- BHを見るとは …

定性的：
曲がった時空の効果の観測でBH地平面の存在を確認すること

定量的：
曲がった時空の効果から質量・角運動量（・電荷）を測ること

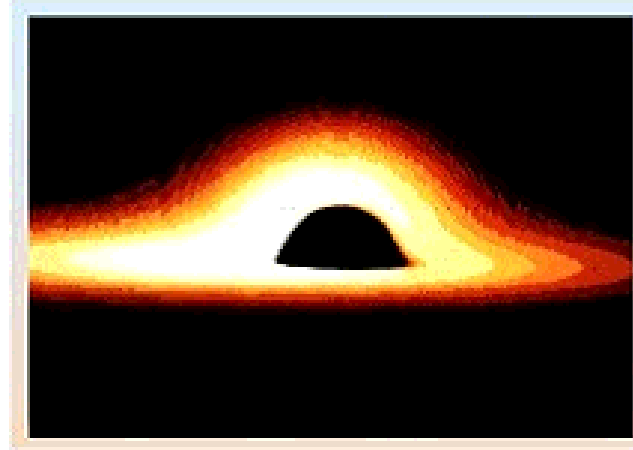


- どんな「曲がった時空の効果」を狙うか？

- 強い重力レンズ効果 **Strong Gravitational Lensing (SGL)** に注目

- ◇ SGLの空間的情報
(見た目の画像)

- BHシャドー
(右図は理論計算)



Fukue & Yokoyama
(1988)

幾何光学近似
← (光の測地線)
で描いた画像

- BHシャドーの「波動版」も計算されつつある (南部さん)

- ◇ SGLの時間的情報 (電波の時間的な振動パターン)

- 一つの電波望遠鏡で得る時系列データの中から

BHの質量と角運動量を読み出すことを考える。

今日の話はこの時間的情報の利用方法

◇ 補足：現在の天文観測技術では，

{ 電波による観測 → 光を 電場の振動 としてアンテナで捉える
それ以外の観測 → 光を フォトン としてCCDで捉える

→ 光を波動として捉える天文観測は，現在の技術では電波観測のみ。

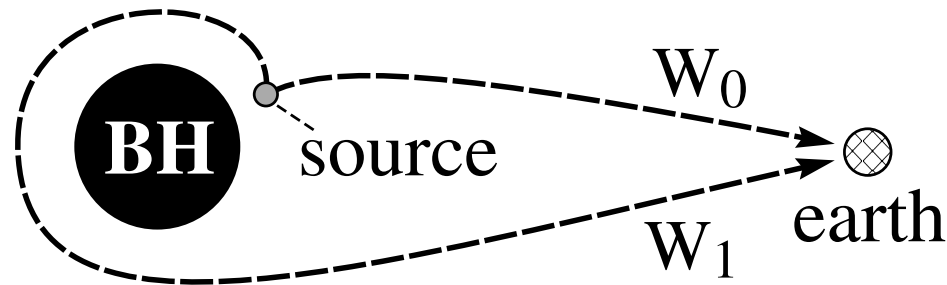
→ 今回の提案では光の波動性が重要になるので，

実際の応用は電波観測を想定。

2. 一つの望遠鏡によるBH直接測定の実験原理と方法

2.1 設定と基本原理

光源から同時に放射された2つの光線（瞬時的発光）に注目
光源からみて同じ強度とスペクトルをもち、可干渉な2つの光線



→ BHの強い重力レンズ効果による

最短距離を通る「0巡光 W_0 」とBHを巡る「1巡光 W_1 」の

{ 到達時間の差
強度の比 } で『BH直接観測 (M_{BH}, J_{BH} 測定)』を狙う

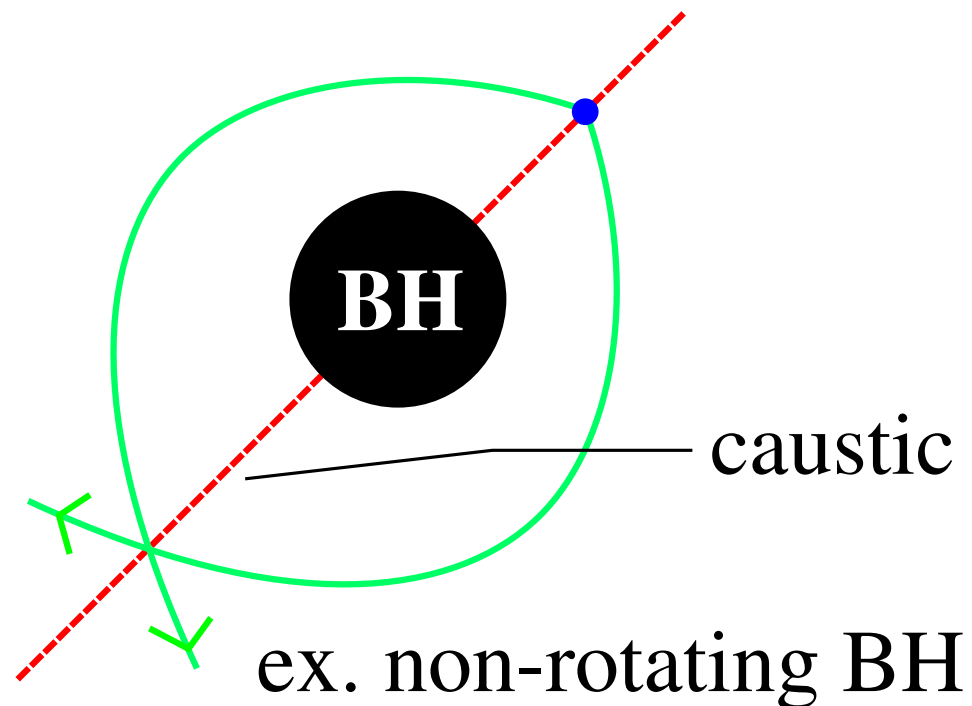
2.2 時系列データから0巡光と1巡光を探し出す方法

(Time Delay Self-interferometry , TDS \neq Tokyo Disney Sea)

- この話のキーワードの一つ : 火面 **caustic**

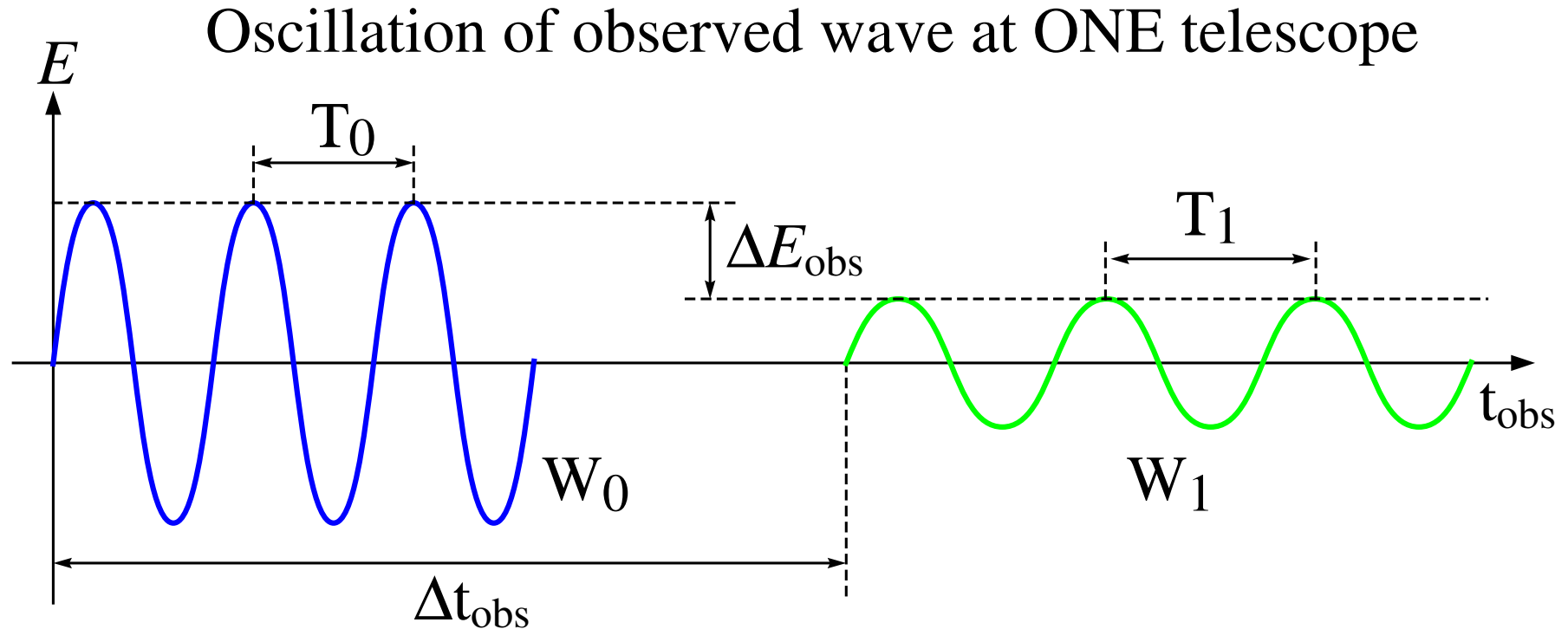
→ 光の「交差点」の集まり ... 独立した一点のときは「焦点」

幾何光学近似が破綻。波動性を考える必要あり。



- 0巡光 W_0 と 1巡光 W_1 が、一つの電波望遠鏡にどう表れるか？

◇ 考察1：正弦波の場合

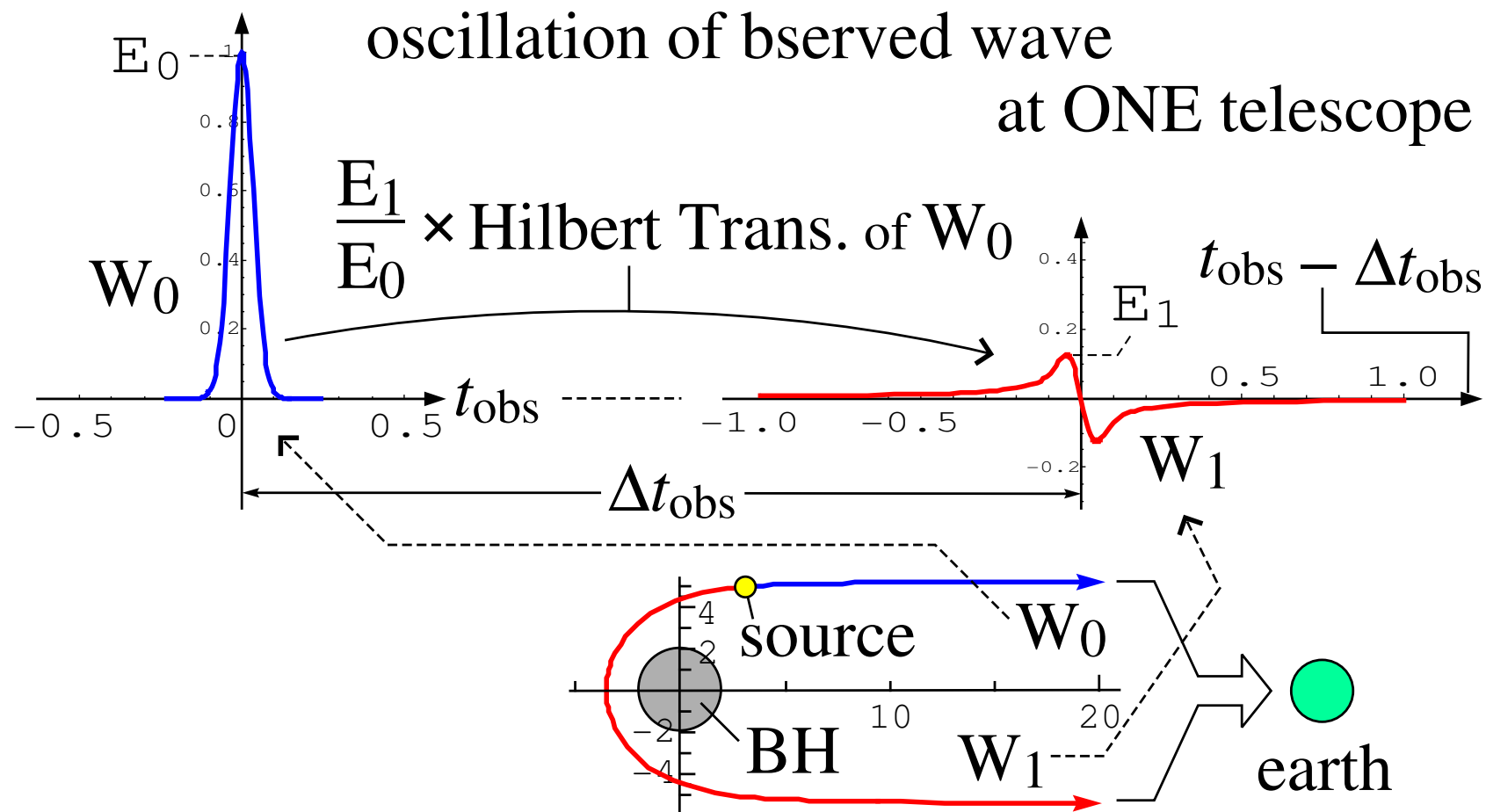


-
- Δt_{obs} : 主に、BHの強い重力レンズで決まる
 - ΔE_{obs} : 主に、BHの強い重力レンズで決まる
 - $T_0 \neq T_1$: 光源の速度による運動論的ドップラー効果

* 厳密には、 Δt_{obs} と ΔE_{obs} もBHだけでなく 光源運動 にも依存。

◇ 考察2：ガウス型発光の場合 (YouTube にシミュレーションを載せている人がいる)

→ 波形の変化に注意！



参考文献 (Zenginoglu and Galley PRD86(2012)064030) の波形だけ再現

→ 波動光学の Gouy Phase Shift による波形変化

火面では幾何光学近似が破たんするので、

火面近傍であることを尊重した近似で波動方程式を解き直す。

補足：任意の波動場 $f(x^\mu)$ （例えば、 $\square f = 0$ ）

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{波動のアイコナル表現} : f = A(x^\mu) \exp[i\Psi(x^\mu)] \\ \text{波数ベクトル} : k_\mu = \frac{d\Psi}{dx^\mu} \end{array} \right.$$

→ 幾何光学近似： $\Psi \simeq k_\mu x^\mu + \text{const.} \dots$ 火面ではダメ

→ 火面近傍での評価： $\Psi \simeq w x^\mu x_\mu + k_\mu x^\mu + \text{const.}$ $\left(w = \begin{array}{l} \text{波面の形で} \\ \text{決まる係数} \end{array} \right)$

→ 2次の項を火面を通過する前と後で比べると...

（火面での focusing による重ね合わせを評価）

○ 光線が火面 caustic を1回通過する毎に，

$$\begin{cases} \text{正の周波数成分} : \text{位相が } -\frac{\pi}{2} \text{ ずれる} \\ \text{負の周波数成分} : \text{位相が } +\frac{\pi}{2} \text{ ずれる} \end{cases}$$

→ 数学的には，Hilbert 変換で表現することも可能。

○ $\begin{cases} f(t) & : \text{火面通過前} \text{ の時間変動} \\ H[f](t) & : \text{火面通過後} \text{ の時間変動} \end{cases}$ とすると，

Hilbert 変換： $H[f](t) \propto \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{f(z)}{t-z}$... 次頁に例

... $\begin{cases} \text{数学的には } f(t) \text{ を解析接続して複素積分で計算し，実部をとる。} \\ \text{実際の時系列データを Hilbert 変換する技術・装置があるらしい。} \end{cases}$

○ Hilbert 変換の計算例

* $f(t) = \cos(\omega t)$ の場合 ($\epsilon = \text{sign}(\omega)$)

$$H[f](t) = \pi \cos\left(\omega t - \epsilon \frac{\pi}{2}\right) = \sin(|\omega| t)$$

* $f(t) = \sin(\omega t)$ の場合

$$H[f](t) = \pi \sin\left(\omega t - \epsilon \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sign}(\omega) \cos(|\omega| t)$$

* $f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)$ の場合

$$H[f](t) = \pi \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right) \text{erfi}\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$\text{ここで, } \text{erfi}(x) = -i \text{erf}(ix) = -i \int_0^{ix} dz \exp(-z^2)$$

○ 注意点 : **Gouy phase shift (Hilbert 変換) でスペクトルは不変**

- 一つの電波望遠鏡で取得する時系列データの中で，
0巡光 W_0 と1巡光 W_1 を如何にして同定するか？

→ 次の3ステップのデータ解析方法で同定できるのでは !?

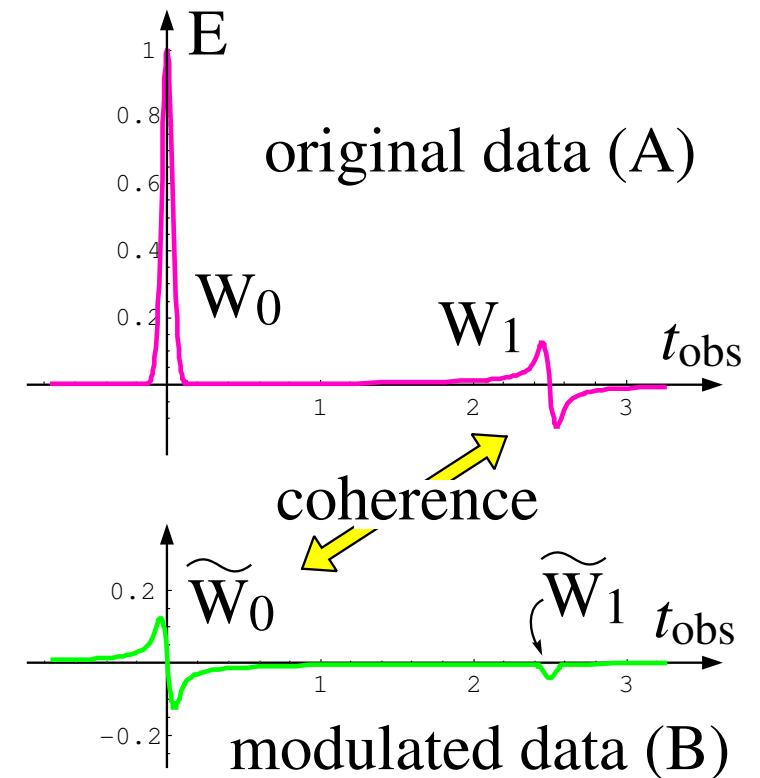
一人時間差干渉 (Time Delay Self-interferometry , TDS)

手順 (1) : 観測データを2つコピー (A, B)

手順 (2) : データ B にヒルベルト変換，
定数倍 (E_1/E_0 に相当) ，
光源運動のドップラー効果の矯正
を施す

手順 (3) : 元データ A と変調データ B の
干渉部分を探す

→ W_0 と W_1 が分かり， Δt_{obs} ， E_1/E_0 ， T_1/T_0 を得る。



● お試し計算：Gouy phase shift の偏光への影響は？

◇ 火面通過の前の電場： $\vec{E}^{(\text{in})} = (E_x^{(\text{in})}, E_y^{(\text{in})})$

→ 火面通過で偏光が変わるか？

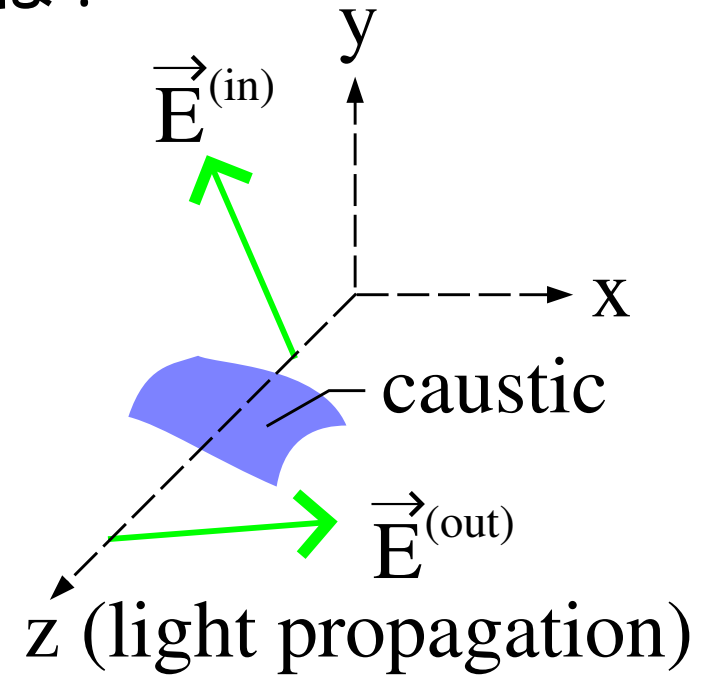
◇ 考察1：正弦波（単色波）発光の場合

$$\text{例えば円偏光} \begin{cases} E_x^{(\text{in})} = f \cos(\omega t) \\ E_y^{(\text{in})} = f \sin(\omega t) \end{cases}$$

→ Gouy Phase shift で位相が $-\frac{\pi}{2}$ だけずれる。（ $\omega > 0$ ）

$$\text{火面通過の後の電場} \begin{cases} E_x^{(\text{out})} = f \sin(\omega t) \\ E_y^{(\text{out})} = -f \cos(\omega t) \end{cases}$$

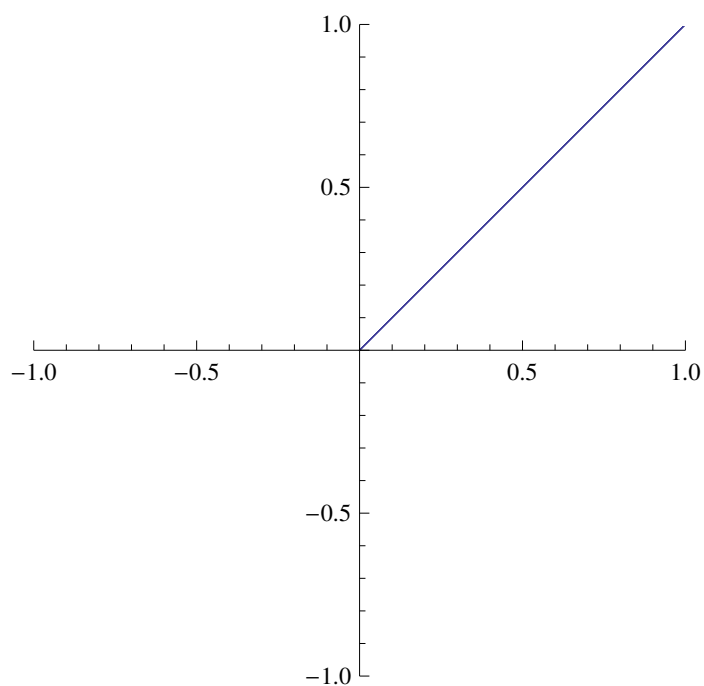
→ 円偏光に変化なし（左回りは左回りのまま）



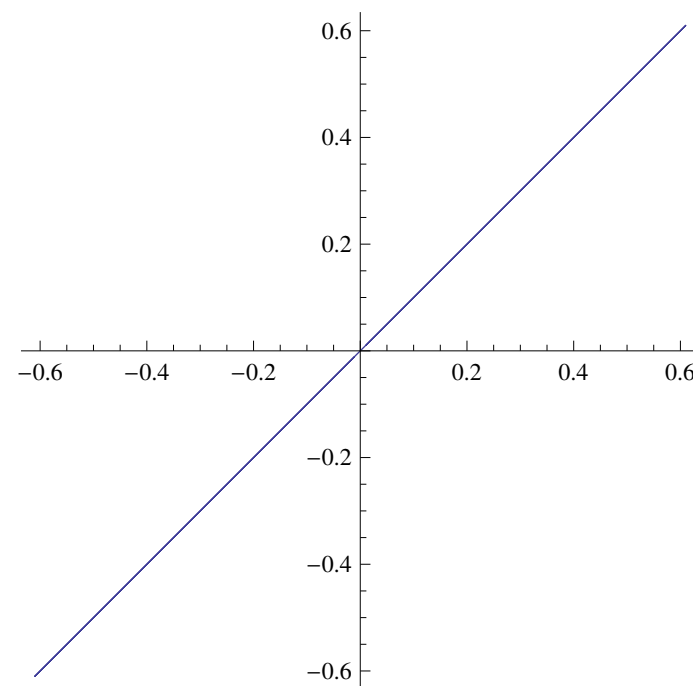
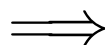
◇ 考察2：ガウス型発光の場合（その1）

$$E_x^{(\text{in})} = E_y^{(\text{in})} = \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)$$

→ 火面通過の前後の“リサージュ図”を書くと



$\vec{E}^{(\text{in})}$



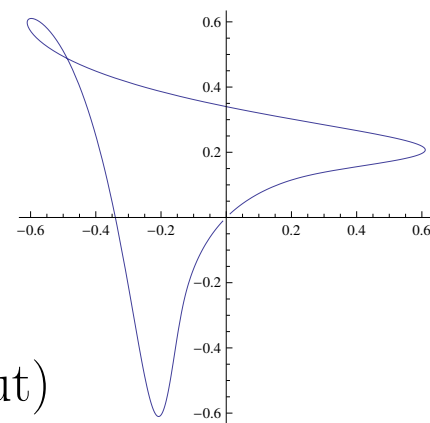
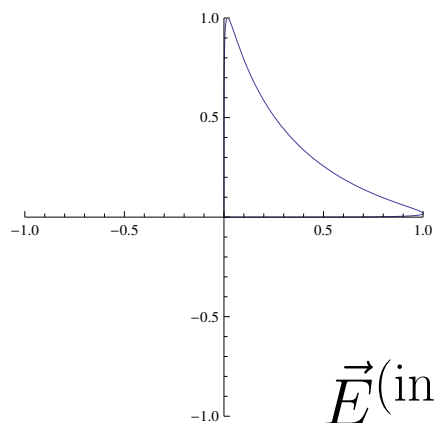
$\vec{E}^{(\text{out})}$

◇ 考察3：ガウス型発光の場合（その2）

こんな発光の仕方はいり得ないかもしれないけど...

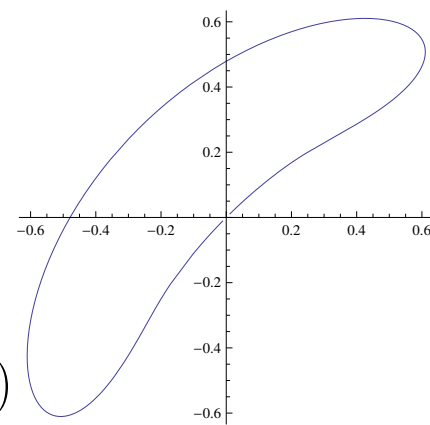
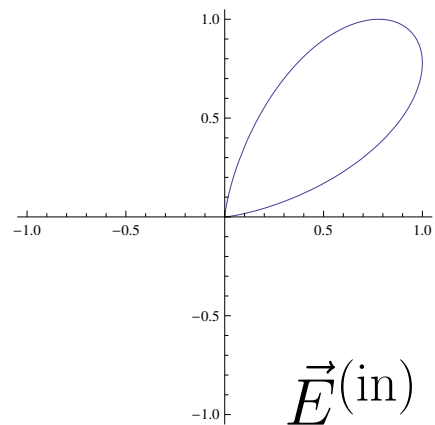
$$E_x^{(\text{in})} = \exp\left[-\frac{(t - k\sigma)^2}{\sigma^2}\right], \quad E_y^{(\text{in})} = \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)$$

$k = 2$ での“リサーチユ図”



$$\vec{E}^{(\text{in})} \implies \vec{E}^{(\text{out})}$$

$k = \frac{1}{2}$ での“リサーチユ図”



$$\vec{E}^{(\text{in})} \implies \vec{E}^{(\text{out})}$$

◇ 単色波でなければ，

観測の時系列データから0巡光と1巡光を探す上で，

Hilbert変換を用いた $\left\{ \begin{array}{l} \text{波形の一人時間差干渉（メインの方法）} \\ \text{偏光の一人時間差干渉（上の結果のチェック）} \end{array} \right.$

の2つが考えられる。

* 電波望遠鏡の受信機にも受信周波数に幅がある（ $\Delta f_{\text{rec}} \sim$ 数 GHz）

→ 電波望遠鏡で受信される電波の波形は，

バンド幅 Δf_{rec} の範囲の重ね合わせ波形

→ 「偏光の一人時間差干渉」で「波形の一人時間差干渉」の

結果をチェックできるかも？

2.3 「振幅比」と「時間差」の計算式

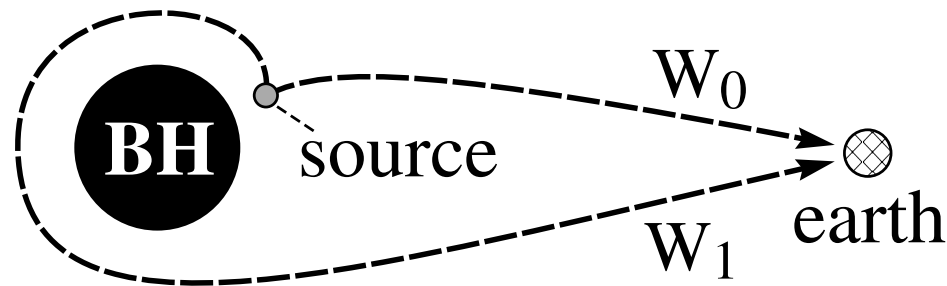
- 状況設定の確認

光源から同時に放射された2つの光線（瞬時的発光）に注目
光源からみて同じ強度とスペクトルをもち，可干渉な2つの光線

→ 時系列データから「振幅比」と「時間差」を

一人時間差干渉の解析方法で読み取り，

BHの質量 M_{BH} と角運動量 J_{BH} を得たい。



◇ 以後，背景時空は Kerr 計量を仮定：Boyer-Lindquist 座標 (t, r, θ, φ)

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

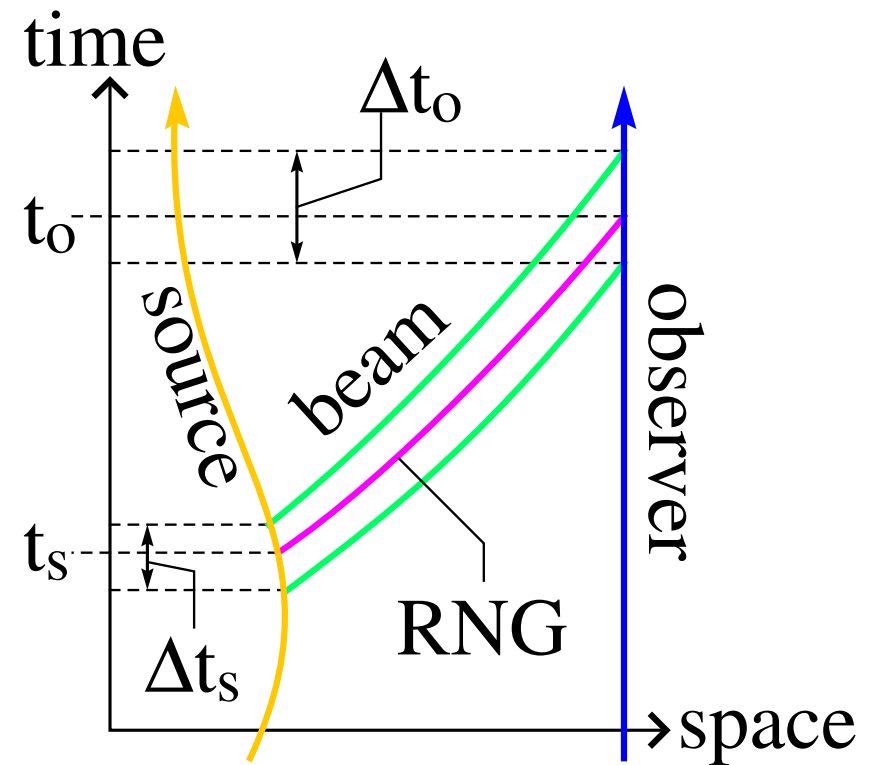
- 一本の光線（0巡光 W_0 や1巡光 W_1 ）をどう扱うか？

{ 瞬時的な発光（継続的発光の場合は1周期）： $\Delta t_s, \Delta t_o \ll GM_{\text{BH}}/c$
 { 十分小さな光源（大きい場合はある一部分）： [光源サイズ] $\ll GM_{\text{BH}}/c^2$

→ 適当な代表的ヌル測地線 **RNG** (Representative Null Geodesic) に注目



- ◇ 伝播時間は RNG で評価 $t_o - t_s$
 - … 測地線方程式を解けばよい。
(W_0 と W_1 で t_s は同時刻とする。)
- ◇ 強度は RNG からの「摂動」で評価
 - … 強度は Specific Flux [$\text{J}/\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Hz}$] を採用する。計算は工夫が必要。



◇ 又ル測地線の運動方程式： $k^\alpha \nabla_\alpha k^\mu = 0$ with $k^2 = 0$

→ 放射事象 $(t_s, r_s, \theta_s, \varphi_s)$ と観測事象 $(t_o, r_o, \theta_o, \varphi_o)$ を繋ぐ積分形：

$$\int_{r_s}^{r_o} dr \frac{\varepsilon_r}{\sqrt{R(r)}} = \int_{\theta_s}^{\theta_o} d\theta \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \text{sign}(k^r) \\ \varepsilon_\theta = \text{sign}(k^\theta) \end{cases}$$

$$ct_o - ct_s = \int_{r_s}^{r_o} dr \frac{\varepsilon_r a X(r)}{\sqrt{R(r)}} - \int_{\theta_s}^{\theta_o} d\theta \frac{\varepsilon_\theta Y(\theta)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta(\theta)}} \quad \left(a = \frac{J_{\text{BH}}}{cM_{\text{BH}}} \right)$$

$$\varphi_o - \varphi_s = \int_{r_s}^{r_o} dr \frac{\varepsilon_r (r^2 + a^2) X(r)}{\sqrt{R(r)}} - \int_{\theta_s}^{\theta_o} d\theta \frac{\varepsilon_\theta a Y(\theta)}{\sqrt{\Theta(\theta)}}$$

$$\lambda_o - \lambda_s = \int_{r_s}^{r_o} dr \frac{\varepsilon_r r^2 X(r)}{\sqrt{R(r)}} + \int_{\theta_s}^{\theta_o} d\theta \frac{\varepsilon_\theta a^2 \sin^2 \theta Y(\theta)}{\sqrt{\Theta(\theta)}} \quad \left(k^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

ここで， $R(r)$ ， $X(r)$ ， $Y(\theta)$ ， $\Theta(\theta)$ ：衝突因子と r や θ の関数

● 0巡光 W_0 と1巡光 W_1 の到達時間の差

→ 放射事象 x_s^μ と観測位置 $(r_o, \theta_o, \varphi_o)$ は共通，観測時間のみ異なる

$$ct_o^{(W1)} - ct_o^{(W0)} = \int_{r_s}^{r_o} dr \left[\frac{\varepsilon_r a X(r)}{\sqrt{R(r)}} \Big|_{W1} - \frac{\varepsilon_r a X(r)}{\sqrt{R(r)}} \Big|_{W0} \right] \\ - \int_{\theta_s}^{\theta_o} d\theta \left[\frac{\varepsilon_\theta Y(\theta)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta(\theta)}} \Big|_{W1} - \frac{\varepsilon_\theta Y(\theta)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta(\theta)}} \Big|_{W0} \right]$$

補足1：被積分関数は，**衝突因子が異なる項の差**

補足2：[r -積分の上限] $\rightarrow O\left(\frac{1}{r_o}\right)$ as $r_o \rightarrow \infty$ (遠方の観測者)

● 一本の光線の Specific Flux

複数のヌル測地線が RNG と同時刻 t_0 に

望遠鏡上の一点 \vec{x}_0 に入射：

(図の Φ_W は巻付き角 winding angle)

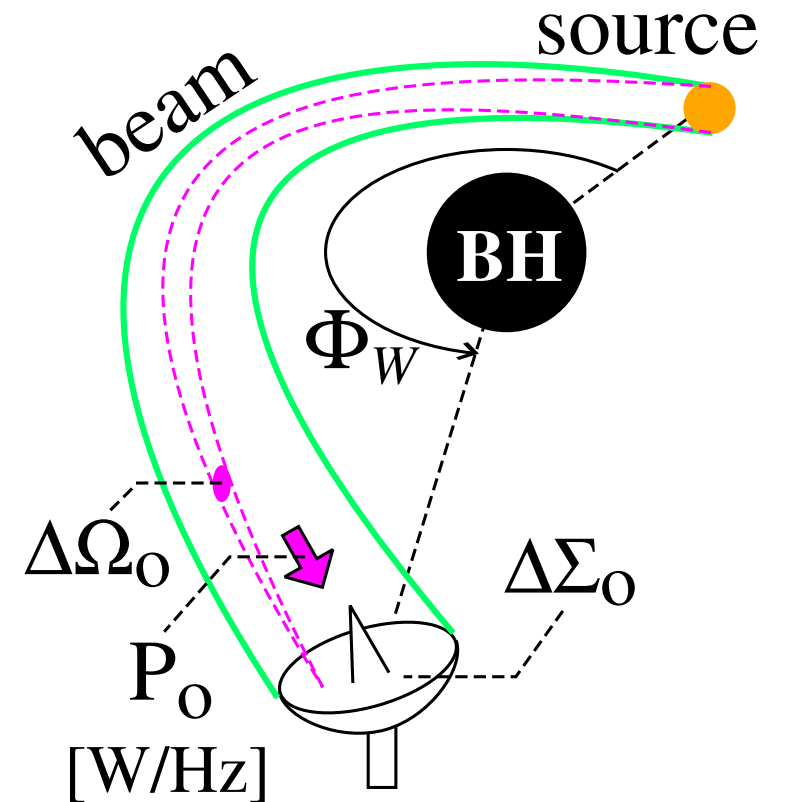
→ 位置 \vec{x}_0 で受ける Specific Flux は ,

$$F_0(\nu_0) = \int_{\Delta\Omega_0} d^2n_0 I_0(\nu_0, \vec{n}_0) \text{ [J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Hz]}$$

$\nu_0 = \frac{c}{\lambda}$ [Hz] : 観測者が計る RNG の振動数

$\Delta\Omega_0$ [sr] : 望遠鏡上の点 \vec{x}_0 から
見た光源の立体角

$I_0(\nu_0, \vec{n}_0)$ [J/s \cdot m² \cdot Hz \cdot sr] : 望遠鏡面上の一点 \vec{x}_0 から見た
 $\vec{n}_0 (\in \Delta\Omega_0)$ 方向の Specific Intensity



$$\left(\text{power: } P_0 = \int_{\Delta\Sigma_0} d^2x_0 F_0 \right)$$

→ [光源サイズ] $\ll GM_{\text{BH}}/c^2$ より (\vec{n}_0 依存性は無視できる)

$$F_0(\nu_0) \simeq \left(\frac{\nu_0}{\nu_s(\nu_0)} \right)^3 I_s(\nu_s(\nu_0)) \Delta\Omega_0 \quad [\text{J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Hz}]$$

(ν_s [Hz] : 光源の共動系で計る RNG の振動数)

注意1 : **ヌル測地線束が占める4次元領域の中で $\frac{I(\nu)}{\nu^3}$ はスカラー量**

注意2 : RNG の4元運動量 k^μ

$$\rightarrow \nu_0 = -k_\mu u_0^\mu, \quad \nu_s = -k_\mu u_s^\mu$$

→ $\nu_s(\nu_0)$ の関数形を得る。

→ 重力的ドップラー, 運動論的ドップラー (ビーミング含む)
など全てを含む。

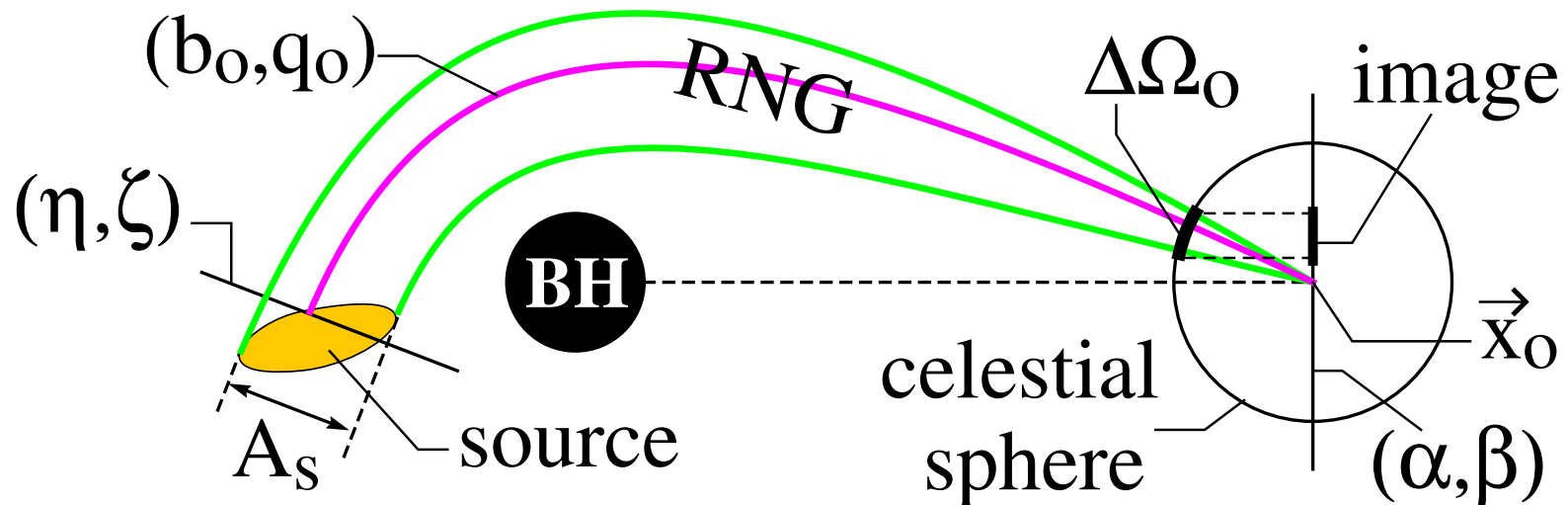
→ 立体角 $\Delta\Omega_0$ の積分変数を (1) → (2) → (3) と変換：

(1) 天球 (celestial sphere) 内のスクリーン上の座標 (α, β)

(2) 光の測地線の衝突因子 $(b, q) \dots$ "Toroidal" 成分と "Poloidal" 成分

(3) 光の運動量に垂直な断面 $(\eta, \zeta) \dots$ 光源の断面積 A_s [m²]

$$\Delta\Omega_0 = \int_{\text{image}} d\alpha d\beta = \int_{\text{image}} d\eta d\zeta \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(b, q)} \frac{\partial(b, q)}{\partial(\eta, \zeta)} \right| \simeq \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(b, q)} \frac{\partial(b, q)}{\partial(\eta, \zeta)} \right| A_s$$



→ まとめて , 一本の光線の Specific Flux は ,

$$F_o(\nu_o) \simeq \left(\frac{\nu_o}{\nu_s(\nu_o)} \right)^3 \left| \frac{q_o}{r_o^2 \sin^2 \theta_o \sqrt{\Theta_o}} \frac{\partial(b, q)}{\partial(\eta, \zeta)} \right| I_s(\nu_s(\nu_o)) A_s \quad [\text{J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Hz}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_o = (r_o, \theta_o, \varphi_o) : \text{望遠鏡上の一点} \\ \Theta_o = q_o^2 - \left(a \sin \theta_o - \frac{b_o}{\sin \theta_o} \right)^2 \\ \frac{\partial(b, q)}{\partial(\eta, \zeta)} = \text{ごちゃごちゃした積分で書ける} \\ a = \frac{J_{\text{BH}}}{M_{\text{BH}} c} \quad [\text{m}] : \text{Kerr BH の回転パラメータ} \\ b = \frac{k_\varphi}{-k_t} \quad [\text{m}] \quad , \quad q = \frac{\sqrt{\xi_{\mu\nu} k^\mu k^\nu}}{-k_t} \quad [\text{m}] \quad (\xi^{\mu\nu} : \text{Killing tensor}) \end{array} \right.$$

- 0巡光 W_0 と1巡光 W_1 (の電場) の ”specific” な振幅比 (の観測値)

$$\varepsilon_o = \frac{E_o^{(W1)}(\nu_o)}{E_o^{(W0)}(\nu_o)} \propto \sqrt{\frac{F_o^{(W1)}(\nu_o)}{F_o^{(W0)}(\nu_o)}}$$

振幅比 $\sqrt{\frac{F_o^{(W1)}}{F_o^{(W0)}}}$ と時間差 $t_o^{(W1)} - t_o^{(W0)}$ は

↓

$\left\{ \begin{array}{l} \text{BHのパラメータ} : M_{\text{BH}}, J_{\text{BH}} \\ \text{光源の位置・運動} : x_S^\mu, u_S^\mu \end{array} \right.$ の依存性を持つ。

→ TDS で $M_{\text{BH}}, J_{\text{BH}}$ を精度よく得るには, 光源運動の情報が不可欠。

… 正確に $M_{\text{BH}}, J_{\text{BH}}$ を決めるには,

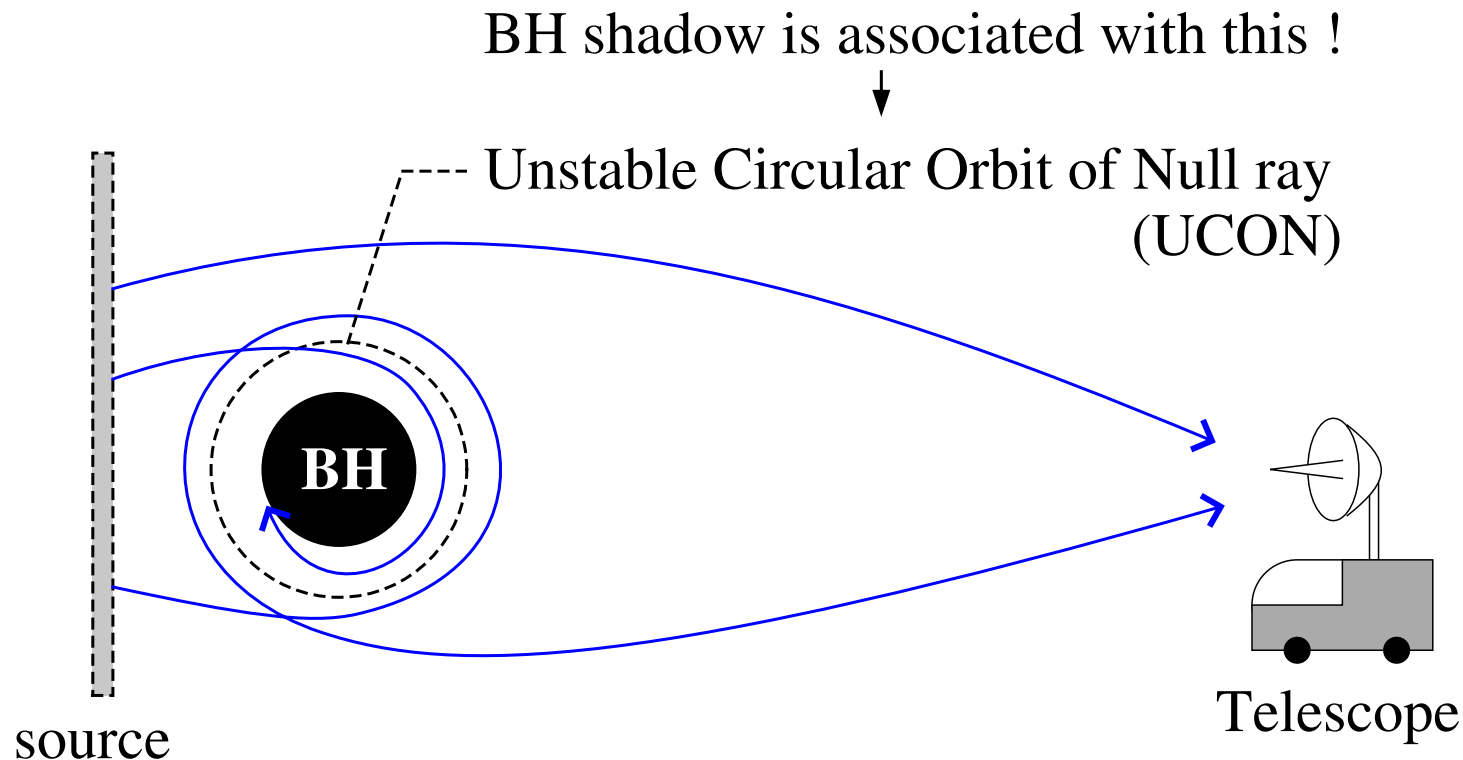
0, 1巡光だけでなく高次巡光の振幅比と時間差も必要か?

3. 強い重力レンズに関する根本的な問題点

- 厳密には $\begin{cases} \text{BH シャドウ} & \rightarrow \text{光の不安定円軌道の影} \\ \text{TDSの光} & \rightarrow \text{光の不安定円軌道に巻きつく効果} \end{cases}$

→ これらの強い重力レンズ効果 $\stackrel{?}{=} \text{BH 地平面の存在} \dots ???$

→ **BH 地平面が存在すれば光の不安定円軌道も必ず存在するか？**



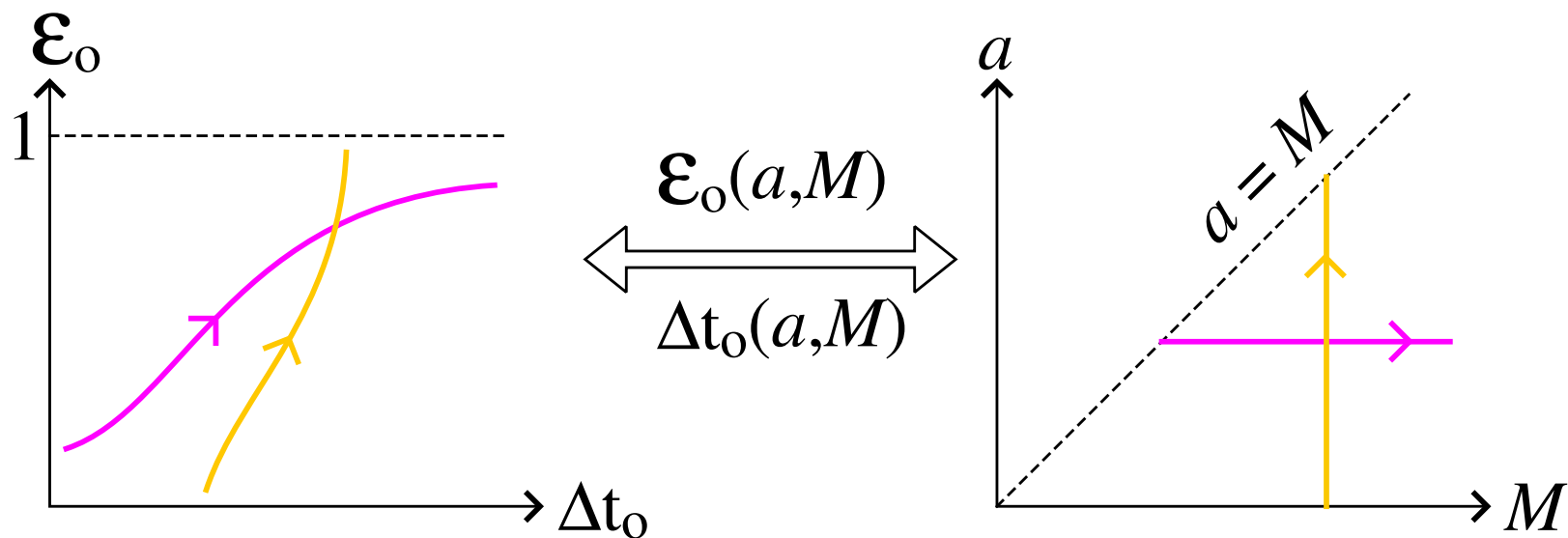
4. まとめ・次にやること

- BHを「見る」とは「曲がった時空の効果」を捉えること
→ 強い重力レンズ効果に注目 $\left\{ \begin{array}{l} \text{見た目の画像} : \text{BHシャドウ} \\ \text{電波の時間変動} : \text{一人時間差干渉 TDS} \end{array} \right.$
- TDS測定量（振幅比、時間差）とBHパラメータ（ M_{BH} , J_{BH} ）の『対応表』を作る。（これから数値計算をする。）→ 次ページ
- Gouy phase shift による電波の波形変化の計算。
→ Kerr時空上の Caustic の把握と, Caustic を通過する回数の計算式。
- 重力理論の問題
光の不安定円軌道が存在すればBH地平面も必ず存在するか？
→ 肯定的な解決の見通しが立ったところ。

補足：これから計算するもの

前提 { 光源の位置 $(t_s, r_s, \theta_s, \varphi_s)$, 4元速度 $(u_s^t, u_s^r, u_s^\theta, u_s^\varphi)$
光源のスペクトル $I_s(\nu_s)$
観測者からBHの見込み角 θ_{obs} , 観測周波数 ν_{obs}

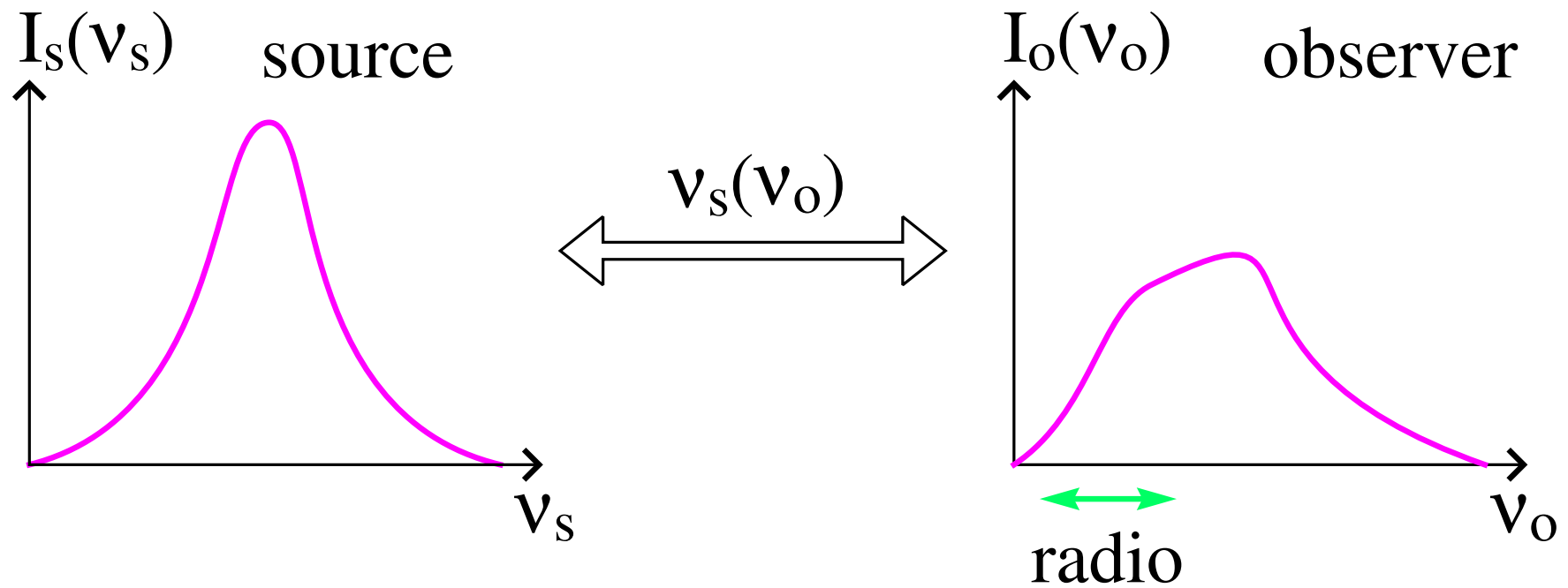
を適当に与えて...



by definition : $\epsilon_0 < 1$, $0 < \Delta t_0$, $a < M$

さらに...

前提条件から観測者の位置でのスペクトルが計算できる：



→ これも何かの役に立つかな？