

# Sgr.A\* の基礎的な相対論 2 : 特殊相対論

斉田浩見 saida@daido-it.ac.jp

## 概要

Sgr.A\* が本当にブラックホールだとすると、その理解には一般相対論が必要である。今回は、一般相対論の前に、相対論的な考え方にポイントを置いて特殊相対論を復習する。解説は、初等幾何的な方法を重視する。

## 目次

1	特殊相対論の基本原則と同時刻の概念	3
1.1	基本原則は2つ	3
1.2	光速不変の原理から得られる同時刻の概念	4
2	特殊相対論の時空 1 : 距離の概念の重要性	6
2.1	復習 : ニュートン力学での空間と距離	6
2.2	特殊相対論での距離に対する要請	7
3	特殊相対論の時空 2 : ミンコフスキー時空	8
3.1	特殊相対論の4次元距離	8
3.2	ミンコフスキー時空が特殊相対論の時空として適切であること, の証明	9
4	特殊相対論の帰結 1 : 時間の遅れ・ローレンツ収縮 (初等幾何的な理解)	10
4.1	座標軸の目盛りつけ	10
4.2	時間の遅れ	12
4.3	ローレンツ収縮	13
5	特殊相対論の帰結 2 : ローレンツ変換 (ミンコフスキー時空での慣性系の変換)	14
5.1	ローレンツ変換 (単純な表現 : 相対速度と $x$ 軸の向きを合わせる)	14
5.2	ローレンツ変換の証明 : 初等幾何的アプローチ	14
5.3	ローレンツ変換で導く「時間の遅れ」	16
5.4	ローレンツ変換で導く「ローレンツ収縮」	16
5.5	Rapidity	17
5.6	ローレンツ変換の一般的表現 (任意の向きの相対速度)	17
6	特殊相対論の帰結 3 : 速度合成則と因果律	19
6.1	問題設定 (単純な設定)	19
6.2	速度合成の初等幾何的理解	20
6.3	ローレンツ変換で導く速度合成則	21
6.4	『光速を超えられない』定理と『光源の運動に寄らず光速の値は一定』定理	22
6.5	一般的な場合の速度合成則	22
6.6	因果律と光円錐	24

7	特殊相対論の帰結 4 : 質量エネルギー	25
7.1	固有時間, 4 元速度, 4 元運動量	25
7.2	質量エネルギー	26
8	特殊相対論の帰結 5 : 運動論的ドップラー効果	27
8.1	波源と波の進行方向が同じ場合	27
8.2	波源と波の進行方向が異なる場合	28
9	特殊相対論の帰結 6 : 超光速移動とタイムマシーン	29
10	特殊相対論の限界 : 双子のパラドックス	30
11	相対論の基礎的な数学テクニック : ベクトルとテンソル	31
11.1	ベクトルと座標 : 座標不変性という概念	31
11.2	ベクトルの「見かけの変化」: 座標変換に伴うベクトル成分の変換則	33
11.3	ミンコフスキー時空の座標変換としてのローレンツ変換 (速度合成則とドップラー効果の再導出)	35
11.4	テンソルの定義と基本性質	35
11.5	テンソルの例 : 計量テンソル, エネルギー運動量テンソル	35
11.6	テンソルの成分と変換則を扱う上での便利な書き方 : 「添え字」と「アインシュタインの縮約」	35
A	ローレンツ変換の補足	36
A.1	ローレンツ変換の別証明 : 代数的な方法	36
A.2	虚時間と Imaginary Rapidity で表すローレンツ変換	37

# 1 特殊相対論の基本原則と同時刻の概念

## 1.1 基本原則は2つ

特殊相対性原理：全ての慣性系に対して物理法則（運動方程式）は同じ形で表される。

補足1：この原理は、ニュートン力学の「ガリレイの相対性原理」の拡張である。ここで、ガリレイの相対性原理は、『ガリレイ変換によって物理法則は不変である』と表せる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 } K \text{ から見る, 物体 } A \text{ の位置ベクトル: } \vec{r}_a(t) \\ \text{慣性系 } K \text{ から見る, 別の慣性系 } K' \text{ の位置ベクトル: } \vec{q}(t) \rightarrow \text{速度 } \vec{v} = \frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \text{一定 (慣性系)} \\ \text{慣性系 } K' \text{ から見る, 物体 } A \text{ の位置ベクトル: } \vec{r}'_a(t) \end{array} \right.$$

→ ガリレイ変換 ( $K'$  の測定値を  $K$  の測定値だけで表す):  $\vec{r}'_a(t) = \vec{r}_a(t) - \vec{q}(t)$

例：ニュートンの運動方程式がガリレイ変換で不変なことはすぐに分かる：

$$K' \text{ が測る加速度 } \vec{a}'_a(t) = \frac{d^2\vec{r}'_a(t)}{dt^2} = \vec{a}_a(t) - \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_a(t) \quad (\vec{v} \text{ は一定速度})$$

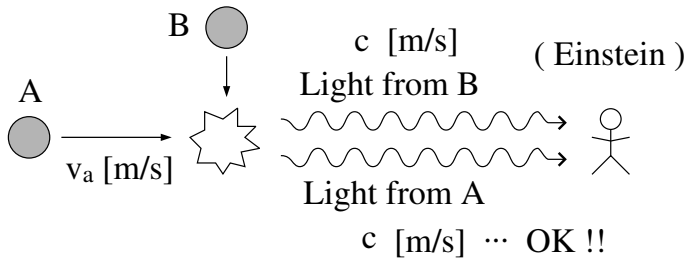
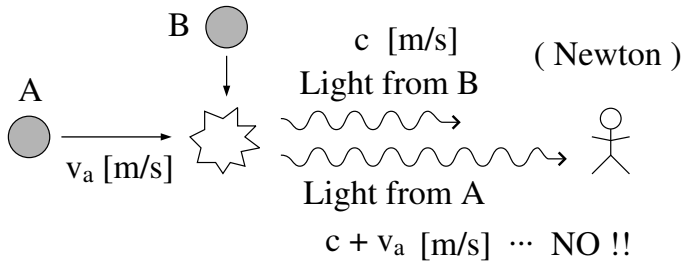
よって、加速度が不変なので、運動方程式  $\vec{F} = m\vec{a}$  も不変。

以上の「ガリレイ変換」という条件を「(適切な)慣性系の変換」に拡張したのが特殊相対性原理。不変に保たれるべき物理法則が(ニュートン力学と比べて)どんな修正を受けるかは、次の光速不変の原理も一緒に考え合わせて導かれる。(それを、このノートにまとめていく。)

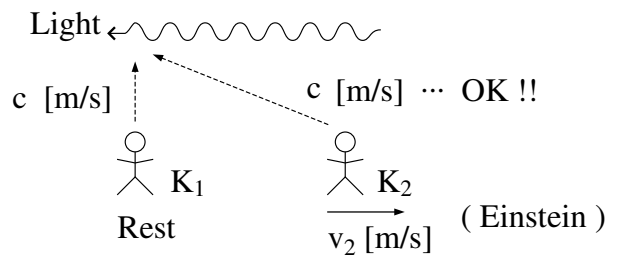
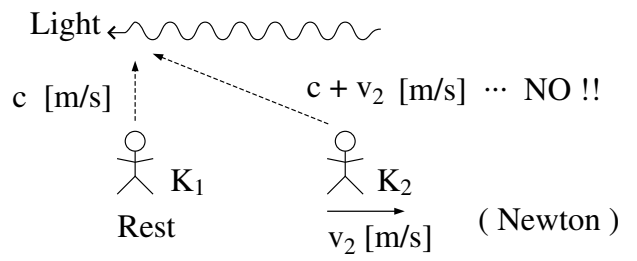
光速不変の原理：どんな慣性系で光の速さを測定しても、同じ値  $c$  である。(  $c = 2.99792485 \times 10^8$  [m/s] )

補足2：この2つの原理に出てくる「慣性系」は、大域的な慣性系である。これを「局所慣性系」にすると、一般相対論になる。このような変更をする根拠は、等価原理から得られる。

補足3：§6.4で、光源の運動によらず光速は常に  $c$  であることも導かれる。



光源の運動によらない  $c$  の不変性  
( §6.4 で得る特殊相対論の帰結 )



観測者の選び方によらない  $c$  の不変性  
( 光速不変の原理 )

## 1.2 光速不変の原理から得られる同時刻の概念

状況設定

◇ 慣性系 K の x 軸方向 に別の慣性系 K' が速度  $v$  で進んでいる。 →  $\begin{cases} \text{K の座標系} : (ct, x, y, z) \\ \text{K' の座標系} : (ct', x', y', z') \end{cases}$

◇ 速度  $v$  の方向に進み、原点 O を通る光を考える。

◇ K と K' の座標系は共にデカルト座標で、原点 O は共通。

◇ 確認： $ct$  軸は観測者 K の世界線、 $ct'$  軸は観測者 K' の世界線。

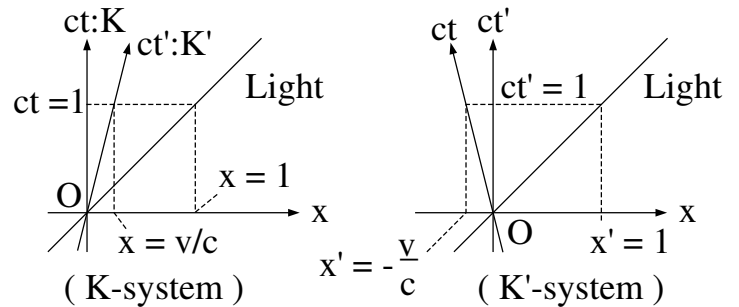
$$\begin{cases} \text{K の } ct\text{-}x \text{ 時空図の中での K' の世界線 (} ct' \text{ 軸)} : ct = \frac{c}{v} x \\ \text{K' の } ct'\text{-}x' \text{ 時空図の中での K の世界線 (} ct \text{ 軸)} : ct' = -\frac{c}{v} x' \end{cases}$$

↓

光速不変の原理から分かること：

K と K' のどちらの時空図 ( $ct$ - $x$  図と  $ct'$ - $x'$  図) でみても、光の世界線と観測者の世界線の間の傾き是不変。

$$\text{光の世界線} : \begin{cases} \text{K で見て} : ct = x \\ \text{K' で見て} : ct' = x' \end{cases}$$



同時刻の定義 (あたり前だけど一応):

「同時刻な空間」 = 「時間座標が同じ値をとる事象の集合」 (事象：時空図の中の一点)

慣性系からみて同時刻な空間の構成方法

◇ 光速の不変性を使って同時刻の空間を構成する方法は、あらゆる慣性系に対して適用できるはず。

◇ 慣性系 K からみて原点の事象 O と同時刻な空間 ( $x$  軸) で考える。

右図から分かる特徴は、AO = BO

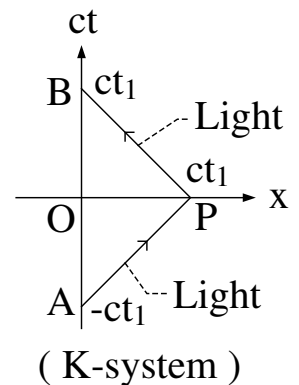
→ 物理的な意味：観測者 K が事象 A で光を出し、その光が事象 P で反射されて、事象 B で再び観測者 K に戻るとき、

「事象 A から P に光が進む間の (K が測る) 時間間隔」

= 「事象 P から B に光が進む間の (K が測る) 時間間隔」

であれば、事象 O と事象 P は同時刻である。

→ 光が反射点まで行く時間と、反射されて戻るまでの時間を等しくすることが、同時刻の構成方法の基礎。



慣性系によって同時刻の空間が異なる

◇ 慣性系 K' からみて原点 O と同時刻の空間 ( $x'$  軸) を、慣性系 K の  $ct$ - $x$  時空図の中に描く。

→ 次のような事象 R を求めるのが便利： $\begin{cases} \text{慣性系 K' から見て事象 O と同時刻である} \\ \text{事象 P から B に向かう光の世界線上にある} \end{cases}$

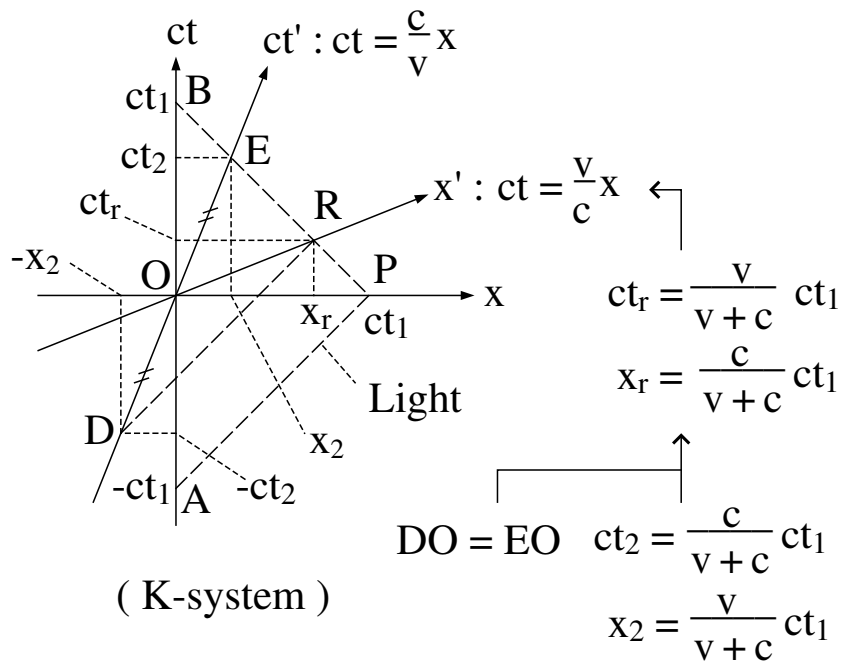
→ 事象 O と R を結ぶ直線が求める  $x'$  軸になる。… 次ページの図参照

→ 事象 R の，慣性系 K からみた座標  $(ct_r, x_r)$  を求める手順：

- (1) 事象 P と B を通る直線（光の世界線）の方程式： $ct = -x + ct_1$
- (2) (1) の直線と  $t'$  軸の交点：事象 E  $(ct_2, x_2) = (\frac{c}{v+c} ct_1, \frac{v}{v+c} ct_1)$
- (3)  $t'$  軸上で  $EO = DO$  となる事象 D  $(-ct_2, -x_2)$
- (4) 事象 D を通り，AP に平行な直線（光の世界線）の方程式： $ct = x + x_2 - ct_2$
- (5) (1) の直線と (4) の直線の交点が事象 R  $(ct_r, x_r) = (\frac{v}{v+c} ct_1, \frac{c}{v+c} ct_1)$

→ 慣性系 K の  $t$ - $x$  時空図中での  $x'$  軸の式： $ct = \frac{v}{c} x$  ( $ct'$  軸の式とは，傾きが逆数の関係。)

→  $x$  軸 (K でみた事象 O と同時刻の空間) と  $x'$  軸 (K' でみた事象 O と同時刻の空間) は異なる。



一つの理解

- ◇ 時間 [sec]，空間 [cm]，光速 [cm/sec] の関係に注目する。
- ◇ ニュートン力学では，あらゆる観測者で時間 [sec] は共通である。
  - 観測者の変換（ガリレイ変換）で空間 [cm] の見方を変えると，時間 [sec] が不変なために光速 [cm/sec] が変わる。
- ◇ 特殊相対論では，光速 [cm/sec] があらゆる観測者で共通である。
  - 観測者の変換で空間 [cm]（or 時間 [sec]）の見方を変えると，光速 [cm/sec] が不変なために時間 [sec]（or 空間 [cm]）が変わる。
  - （特殊相対論における観測者の変換をローレンツ変換と呼ぶ。詳しくは §5 にまとめる。）

## この後の内容

$ct'$  軸と  $x'$  軸に (例えば cm 単位の) 目盛を入れると, 観測者によって時間の進み方が異なること (時間の遅れ), 定規の長さが異なること (ローレンツ収縮), 光速を超えることはできないこと, などが初等幾何的に読み取れる。しかし, 座標軸に目盛を入れるためには, 距離の概念が必要である。そこで, 今後のプランは …

- §2: 距離の概念を如何に考えるべきか, の解説
- §3: §1.1 の基本原理に合致した距離 (ミンコフスキー時空) の導入
- §4: 初等幾何的に時空図を使って, 時間の遅れ, ローレンツ収縮を理解
- §5: 慣性観測者の変換 (ローレンツ変換) を導く
- §6: 速度合成則を導く (初等幾何的な定性的理解と, ローレンツ変換での定量的計算)
- §7: 質量エネルギー (4次元運動量の第0成分) の解説
- §8: 特殊相対論的なドップラー効果の解説
- §9: 光速を超えてしまったら, 特殊相対論的には何が起こり得るか? というトピック
- §10: 特殊相対論の限界 (双子のパラドックス) → 一般相対論の定性的な解説に続けたい
- §11: 一般相対論でもよく使う数学, テンソル, の基本性質のまとめ。

## 2 特殊相対論の時空 1: 距離の概念の重要性

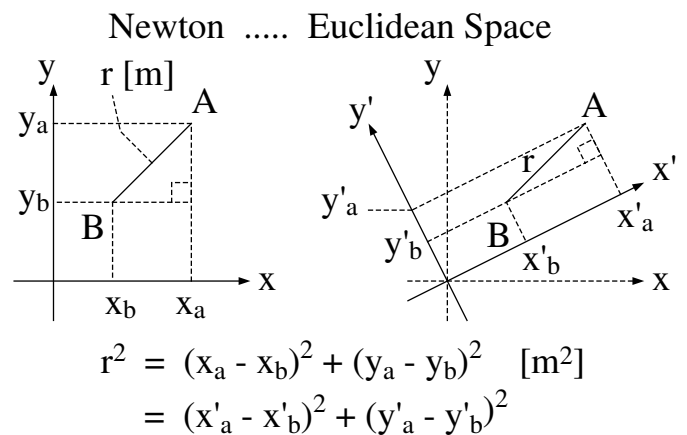
### 2.1 復習: ニュートン力学での空間と距離

ニュートン力学の枠組みでは, どの観測者からみても同時刻の空間は同じであり, 時間と空間を完全に区別して扱っている。ニュートン力学での同時刻の空間における距離がどういうものを, この §2.1 でまとめる。

- 例: 二次元の空間 (平面) で,  $x$ - $y$  座標と  $x'$ - $y'$  座標を考える。(共に “直交座標” で, 原点は共通) 任意の点 A, 点 B の位置を指定する座標成分:

$$\begin{aligned} \text{点 A の座標成分: } & \begin{cases} x\text{-}y \text{ 座標} : (x_a, y_a) \\ x'\text{-}y' \text{ 座標} : (x'_a, y'_a) \end{cases} \\ \text{点 B の座標成分: } & \begin{cases} x\text{-}y \text{ 座標} : (x_b, y_b) \\ x'\text{-}y' \text{ 座標} : (x'_b, y'_b) \end{cases} \end{aligned}$$

→  $x$ - $y$  座標と  $x'$ - $y'$  座標が, 右図のように描けて, 重要な性質が読み取れる:



ニュートン力学の空間における距離の性質: 2点 A, B の間の距離  $r$  [m] は,  $x$ - $y$  座標で測っても,  $x'$ - $y'$  座標で測っても, 等しい値になる。

- ニュートン力学の空間における距離  $r$  [m] の定義 (ピタゴラスの定理)

$$r^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = (x'_a - x'_b)^2 + (y'_a - y'_b)^2 \quad (2.1)$$

→ 距離がこのように (ピタゴラス定理で) 決まる空間を ユークリッド空間 と呼ぶ。  
(ニュートン力学で考えている同時刻な空間は 3次元ユークリッド空間である。)

- 問題：どうやって座標軸に目盛りを付けるか？

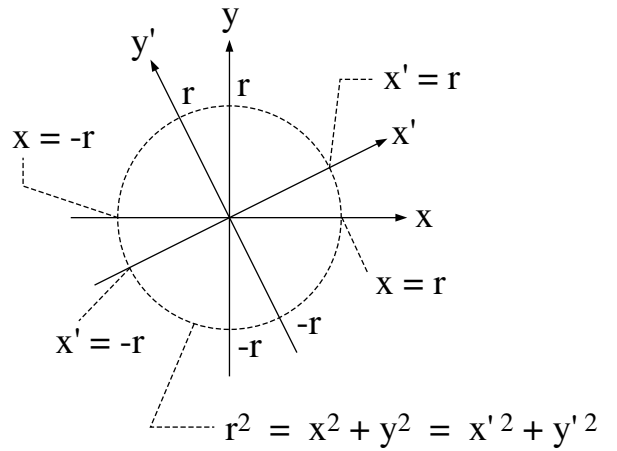
座標軸の目盛り付け：原点からの距離が一定な曲線（曲面）を考えれば，座標軸上に目盛りを付けられる。

- 例：上の例の2次元平面（2次元ユークリッド空間）で，それぞれの座標軸に目盛りを付ける。

距離の定義 (2.1) より，ユークリッド空間では円を考えればよいことが分かる（点Bを原点として）：

$$r^2 = \begin{cases} x^2 + y^2 & : x-y \text{ 座標で半径 } r \text{ の円} \\ x'^2 + y'^2 & : x'-y' \text{ 座標で半径 } r \text{ の円} \end{cases}$$

- 円と軸（ $x$  軸， $y$  軸， $x'$  軸， $y'$  軸）の交点が，その軸上での目盛り  $\pm r$  の位置を示す。



- ニュートン力学での同時刻な空間は，あらゆる観測者に対して共通である。つまり，時間と空間は完全に区別できる（時間と空間を別々に扱ってよい）。ニュートン力学での距離は，時間座標を含まず空間座標だけで決まる定義 (2.1) を考えれば十分である。

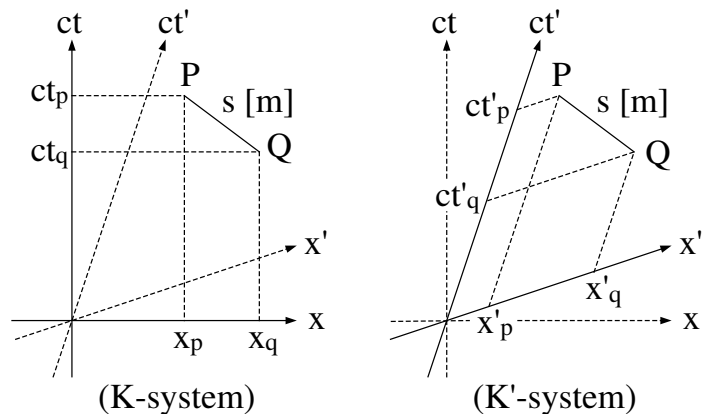
- では，同時刻の空間が観測者によって異なる特殊相対論での「距離」はどうか???

## 2.2 特殊相対論での距離に対する要請

- §1.2 で分かったように（特殊）相対論では観測者によって同時刻の空間が異なる。
- 時間と空間を完全には区別できない！
- 特殊相対論では，この宇宙は4つの座標軸（ $ct, x, y, z$  軸）を設定できる4次元時空である と考える
- 4次元時空の中での「距離」は，2つの事象（例えば事象 P, Q）の間の4次元距離であり，その4次元距離は次の性質を満たすことを要請する（「ニュートン力学における距離の性質」の拡張版）：

特殊相対論における4次元距離の性質：2つの事象 P, Q の間の距離  $s$  [m] は，どんな慣性観測者が測っても等しい値になる。

- 「特殊相対性原理」を「物理法則が普遍」だけでなく「時空の4次元距離という物理的性質も普遍」も含めるように拡張すれば，この4次元距離の性質は特殊相対性原理からの要請。
- 物理法則と（その法則が有効に働く）時空は，どの慣性観測者にとっても同じ，ということ。
- ◇ 4次元の「距離」を考えるためには，時間方向も距離の単位で計る必要がある。そのために，初めから時間座標を  $ct$  としてきた。



- 特殊相対論の4次元時空は，ユークリッド空間でない
- これを背理法で示す。
- 4次元時空もユークリッド空間であると仮定して，座標軸（ $ct$  軸， $x$  軸， $ct'$  軸， $x'$  軸）に目盛りをつけてみる。

式 (2.1) より, 4次元距離  $s$  の2乗は,

$$s^2 = \begin{cases} (ct)^2 + x^2 & : ct-x \text{ 時空図で半径 } s \text{ の円} \\ (ct')^2 + x'^2 & : ct'-x' \text{ 時空図で半径 } s \text{ の円} \end{cases}$$

→ 円と座標軸の交点が, 軸上の目盛り  $\pm s$  の位置を示す。(右図の左側)

次に, 右図のように, この円上の事象 D に注目する。

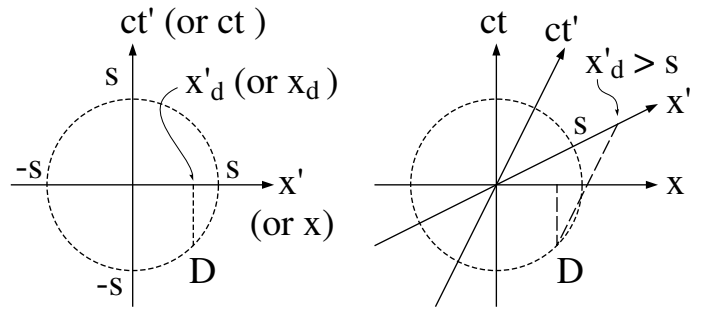
◇ 図 (左側) から分かる事実:

$$\begin{cases} ct-x \text{ 時空図で見た, 事象 D の } x \text{ 座標} & : x_d < s \\ ct'-x' \text{ 時空図で見た, 事象 D の } x \text{ 座標} & : \underline{x'_d < s} \end{cases}$$

◇ 図 (右側) から分かる事実:

$ct-x$  時空図の中に  $ct'$  軸と  $x'$  軸を描き, 事象 D の  $x$  座標を読み取ると  $\underline{x'_d > s}$

→ この2つの事実は矛盾。[証明終]



$$\text{If } s^2 = c^2 t'^2 + x'^2 = c^2 t^2 + x^2$$

↓

$$x_d < s, \quad x'_d < s \quad \Rightarrow \quad \text{Contradiction!}$$

In  $K'$ -system

$$x'_d > s$$

↓

Einstein ... Non-Euclidean Space-time !

● 生じる疑問: 特殊相対論の4次元時空の「距離」は, 式 (2.1) でなく, どんな式で計算すべきか?

→ 言い換えれば, 特殊相対論の時空はどんな時空か? ... 次節のテーマ

### 3 特殊相対論の時空2: ミンコフスキー時空

#### 3.1 特殊相対論の4次元距離

光の世界線から得る示唆

慣性系  $K'$  が, 慣性系  $K (ct, x, y, z)$  の  $x$  軸方向に速度  $v$  で慣性運動している。

$$\rightarrow \text{§1.2 より, } x \text{ 軸方向に進む光の世界線は } \begin{cases} K \text{ で見たとき} & : ct = \pm x \\ K' \text{ で見たとき} & : ct' = \pm x' \end{cases}$$

→ 光の世界線の特徴:  $-(ct)^2 + x^2 = -(ct')^2 + x'^2 = 0$

→ 任意の慣性系  $(ct, x, y, z)$  で見る光の世界線に対して, 『 $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ 』という量は不変で, かつその値はゼロ ( $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ) である。

→ 特殊相対論の時空において 『 $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ 』という量は, 慣性系に寄らない不変な意味がありそう。

ミンコフスキー時空

特殊相対論の4次元時空を記述するのに適切な「距離」を定理としてまとめる (証明は §3.2):

特殊相対論の4次元距離: 慣性系  $K (ct, x, y, z)$  から見て,

$$\text{事象 P の座標: } (ct_p, x_p, y_p, z_p) \quad , \quad \text{事象 Q の座標: } (ct_q, x_q, y_q, z_q)$$

とすると, 事象 P と Q の間の4次元距離  $s$  (の2乗) は,

$$s^2 = -c^2 (t_p - t_q)^2 + (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 \quad (3.1)$$

で与えられる。この式 (3.1) で距離  $s$  が与えられる時空をミンコフスキー時空 (or 双曲空間) と呼ぶ。特殊相対論に合致する時空はミンコフスキー時空である。



### 3.2 ミンコフスキー時空が特殊相対論の時空として適切であること，の証明

式 (3.1) の距離  $s$  が §2.2 の「特殊相対論における 4 次元距離の性質」を満たすことを示せば良い。

→ 以下，簡単化して，式 (3.1) の事象 Q を原点にする：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 } K' : K \text{ から見て 3 次元速度 } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ で慣性運動する慣性観測者} \\ \text{慣性系 } K \text{ からみた事象 } P \text{ の座標} : (ct_p, x_p, y_p, z_p) \\ \text{慣性系 } K' \text{ からみた事象 } P \text{ の座標} : (ct'_p, x'_p, y'_p, z'_p) \end{array} \right. \quad \text{とすると,}$$

$$K \text{ からみた } OP \text{ 間の 4 次元距離の 2 乗} : s_p^2 = -(ct_p)^2 + x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 \quad (3.2a)$$

$$K' \text{ からみた } OP \text{ 間の 4 次元距離の 2 乗} : s_p'^2 = -(ct'_p)^2 + x_p'^2 + y_p'^2 + z_p'^2 \quad (3.2b)$$

→ 等式  $s_p^2 = s_p'^2$  が成り立つことを示せばよい。

等式  $s_p^2 = s_p'^2$  を示す準備

速度  $\vec{v}$  と事象 P を一つ決めれば，次の 6 つの比の値が存在する：

$$w_1 = \frac{x_p}{ct_p} \quad w_2 = \frac{y_p}{ct_p} \quad w_3 = \frac{z_p}{ct_p} \quad (3.3a)$$

$$w'_1 = \frac{x'_p}{ct'_p} \quad w'_2 = \frac{y'_p}{ct'_p} \quad w'_3 = \frac{z'_p}{ct'_p} \quad (3.3b)$$

また，次の関係を満たす定数  $a_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) も存在する：

$$ct'_p = a_0 ct_p + a_1 x_p + a_2 y_p + a_3 z_p \quad (3.4)$$

以下では，式 (3.3)，(3.4) で決まる定数の値そのものではなく，その存在が重要。(これらの定数の値は，§5 でローレンツ変換として求める。)

等式  $s_p^2 = s_p'^2$  の証明

式 (3.3a)，(3.4) より，

$$ct'_p = (a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3) ct_p$$

これと式 (3.3b) を式 (3.2b) に代入して次を得る。

$$s_p'^2 = (w_1'^2 + w_2'^2 + w_3'^2 - 1) (ct'_p)^2 = (w_1'^2 + w_2'^2 + w_3'^2 - 1) (a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3)^2 (ct_p)^2$$

一方，式 (3.3a) より，式 (3.2a) は次のようになる。

$$s_p^2 = (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1) (ct_p)^2$$

よって，次の関係を得る：

$$s_p'^2 = f s_p^2, \quad \text{where } f = \frac{w_1'^2 + w_2'^2 + w_3'^2 - 1}{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1} (a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3)^2 \quad (3.5)$$

また，特殊相対性原理（を物理法則が有効に働く時空に対しても成り立つと拡張したもの）より，式 (3.5) は任意の 2 つの慣性系の間（任意の速度  $\vec{v}$ ）に対して成立しなければならない。これは  $f$  が  $\vec{v}$  の大きさだけに依存することを意味する， $f = f(|\vec{v}|)$ 。すると， $\vec{v}$  の向きを逆向きにしても式 (3.5) は成立しなければならないので：

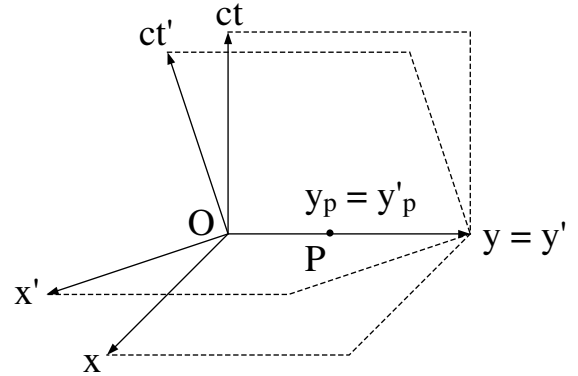
$$s_p^2 = f s_p'^2 \quad (3.6)$$

よって、式 (3.5), (3.6) より,  $s_p^2 = f s_p'^2 = f^2 s_p^2$  なので,  $f = 1$  or  $-1$  である。  $f$  は 3次元速度によらない定数であることが分かった。

$f$  は定数なので, 計算しやすい状況でその値を決めればよい:

- ◇ K が測る K' の 3次元速度  $\vec{v}$  が  $x$  軸方向を向く:
 
$$y'_p = y_p, \quad z'_p = z_p \quad (y \text{ (and } z) \text{ 軸と } y' \text{ (and } z') \text{ 軸は一致)}$$
- ◇ 事象 P が  $y$  軸上にある:
 
$$(ct_p, x_p, y_p, z_p) = (0, 0, y_p, 0)$$

$$(ct'_p, x'_p, y'_p, z'_p) = (0, 0, y'_p, 0)$$



このとき,  $s_p^2 = \begin{cases} f s_p'^2 & \text{(式 (3.6) より)} \\ y_p^2 = y_p'^2 = s_p'^2 & \text{(式 (3.2) より)} \end{cases}$  である。

よって,  $f s_p'^2 = s_p'^2$  なので,  $f = +1$  と定まる。  $s_p^2 = s_p'^2$  が証明できた。 [証明終]

## 4 特殊相対論の帰結 1: 時間の遅れ・ローレンツ収縮 (初等幾何的な理解)

### 4.1 座標軸の目盛りつけ

- 特殊相対論の時空 (ミンコフスキー時空) の座標軸の目盛りつけも, §2.1 (ユークリッド空間) と同じ方針:

座標軸の目盛り付け: 原点からの 4次元距離 (の 2乗) が一定な曲線 (曲面) を考えれば, 座標軸上に目盛りを付けられる。

→ 「距離一定の線を考える」という方針は, ユークリッド空間でもミンコフスキー時空でも同じ。しかし, 距離の定義が異なる。

→ ある事象  $(ct, x, y, z)$  と原点  $(0, 0, 0, 0)$  の間の 4次元距離を  $s$  とすると,  $s^2 = \text{const.}$  は, §3 より,

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} \quad \dots \text{双曲線 (超双曲面)}$$

→ ミンコフスキー時空では, 双曲線を使って慣性系の座標軸に目盛りつけができる。

- 以下, 異なる慣性系の座標軸の目盛りつけをする。

状況設定

- ◇ 慣性系 K に対して, 別の慣性系 K' が K の  $x$  軸方向に速度  $v$  [m/s] で慣性運動:

$$\rightarrow \begin{cases} \text{慣性系 K の座標} & : (ct, x) \\ \text{慣性系 K' の座標} & : (ct', x') \end{cases}$$

- ◇  $ct$  軸上の事象 T:

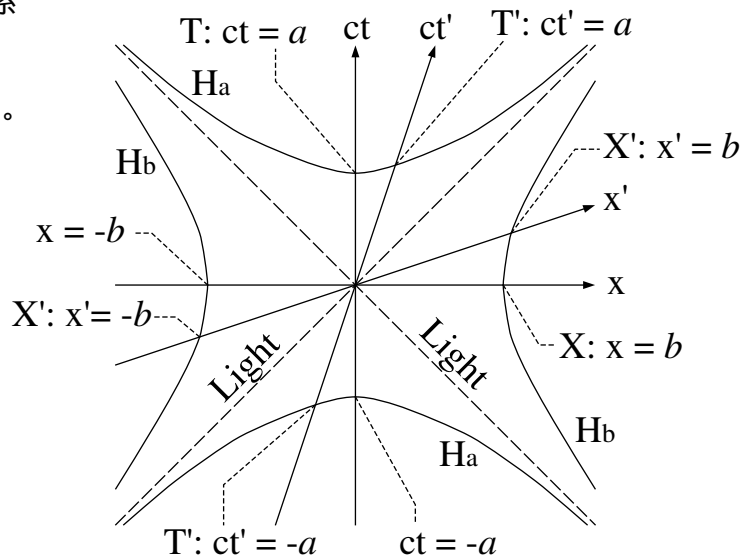
慣性系 K から見た座標  $(ct_T, x_T) = (a, 0)$

→ 事象 OT の 4次元距離:  $s_T^2 = -a^2$

- ◇  $x$  軸上の事象 X:

慣性系 K から見た座標  $(ct_X, x_X) = (0, b)$

→ 事象 OX の 4次元距離:  $s_X^2 = +b^2$



$$H_a : -(ct)^2 + x^2 = -a^2 \quad (= -(ct')^2 + x'^2)$$

$$H_b : -(ct)^2 + x^2 = b^2 \quad (= -(ct')^2 + x'^2)$$

目盛り付けの方針

以上の設定で、次の2つの事象を見つけることで、 $ct'$  軸と  $x'$  軸に目盛りつけする：

- ◇ 事象  $T'$  :  $ct'$  軸上にあり、かつ、事象  $OT'$  の4次元距離  $s_{T'}^2 = s_T^2 (= -a^2)$  であるような事象。
- ◇ 事象  $X'$  :  $x'$  軸上にあり、かつ、事象  $OX'$  の4次元距離  $s_{X'}^2 = s_X^2 (= +b^2)$  であるような事象。

→ この2つの事象を使って：  
 $\begin{cases} ct' \text{ 軸上で事象 } T' \text{ が居る位置に、} \underline{ct' = a} \text{ という目盛りがつく。} \\ x' \text{ 軸上で事象 } X' \text{ が居る位置に、} \underline{x' = b} \text{ という目盛りがつく。} \end{cases}$

$ct'$  軸の目盛りつけ (事象  $T'$  の位置の特定)

◇ 事象  $T'$  は次の2つの線の交点である。 $ct-x$  時空図での方程式で表して：

$$\text{事象 } T \text{ を通る双曲線 } H_a : -(ct)^2 + x^2 = -a^2 (= s_T^2) \quad , \quad ct' \text{ 軸} : ct = \frac{c}{v} x \quad (c : \text{光速})$$

→ 上図のように双曲線  $H_a$  が描けて、 $ct-x$  時空図での事象  $T'$  の位置が分かる。

◇ 一方、慣性系  $K'$  から見て：

$$\begin{cases} \text{事象 } T' \text{ の座標 } (ct'_{T'}, x'_{T'}) \text{ と } s_{T'}^2 = s_T^2 \text{ より、} -(ct'_{T'})^2 + x'_{T'}^2 = -a^2 & \rightarrow ct'_{T'} = a \text{ を得る。} \\ ct' \text{ 軸上の事象の、} x' \text{ 座標の値はゼロ：} x'_{T'} = 0 \end{cases}$$

◇ よって、上の方針の通り『事象  $T'$  の位置が、慣性系  $K'$  から見た  $ct' = a$  という目盛り』だと分かる。

→ これは、『慣性系  $K'$  から見て、事象  $T'$  の座標  $(ct'_{T'}, x'_{T'}) = (a, 0)$  である』も意味する。

$x'$  軸の目盛りつけ (事象  $X'$  の位置の特定)

◇ 事象  $X'$  は次の2つの線の交点である。 $ct-x$  時空図での方程式 ( $ct$  と  $x$  の関係式) で表して：

$$\text{事象 } X \text{ を通る双曲線 } H_b : -(ct)^2 + x^2 = +b^2 (= s_X^2) \quad , \quad x' \text{ 軸} : ct = \frac{v}{c} x \quad (c : \text{光速})$$

→ 上図のように双曲線  $H_b$  が描けて、 $ct-x$  時空図での事象  $X'$  の位置が分かる。

◇ 一方、慣性系  $K'$  から見て：

$$\begin{cases} \text{事象 } X' \text{ の座標} : (ct'_{X'}, x'_{X'}) \text{ と } s_{X'}^2 = s_X^2 \text{ より、} -(ct'_{X'})^2 + x'_{X'}^2 = b^2 & \rightarrow x'_{X'} = b \text{ を得る。} \\ x' \text{ 軸上の事象の、} ct' \text{ 座標の値はゼロ：} ct'_{X'} = 0 \end{cases}$$

◇ よって、上の方針の通り『事象  $X'$  の位置が、慣性系  $K'$  から見た  $x' = b$  という目盛り』だと分かる。

→ これは、『慣性系  $K'$  から見て、事象  $X'$  の座標  $(ct'_{X'}, x'_{X'}) = (0, b)$  である』も意味する。

双曲線の性質から分かる時空図の性質

◇ 事象  $T'$  での双曲線  $H_a$  の接線は、 $x'$  軸に平行な直線

→ 「この接線上の全ての事象での  $ct'$  座標の値」  
 = 「事象  $T'$  の  $ct'$  座標」 =  $a$

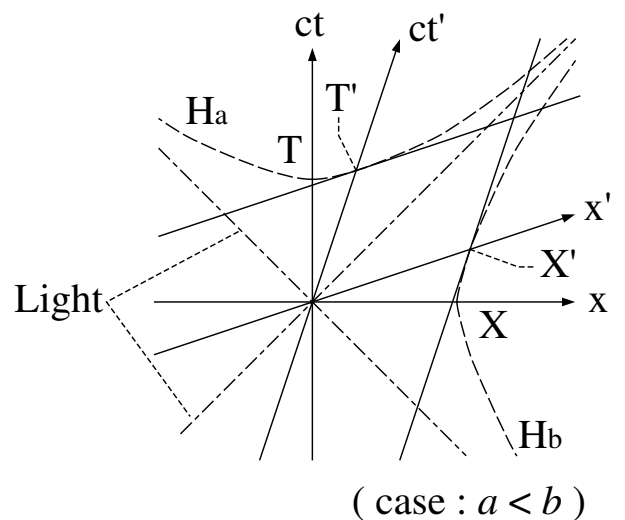
→ これは、慣性系  $K'$  から見て事象  $T'$  と同時刻の空間。

◇ 事象  $X'$  での双曲線  $H_b$  の接線は、 $ct'$  軸に平行な直線

→ 「この接線上の全ての事象での  $x'$  座標の値」  
 = 「事象  $X'$  の  $x'$  座標」 =  $b$

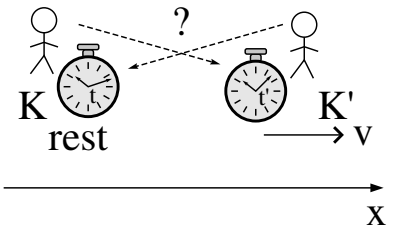
→ これは、慣性系  $K'$  から見て事象  $X'$  と同じ  $x'$  座標の位置に留まり続けている物体の世界線。

(慣性系  $K$  に対して、 $K'$  と同じ速度  $v$  で慣性運動している物体の世界線。)



## 4.2 時間の遅れ

問題設定： §4.1 節と同じ慣性観測者 K と K' がお互いに、お互いの時計を見ると、それぞれどう見えるか？



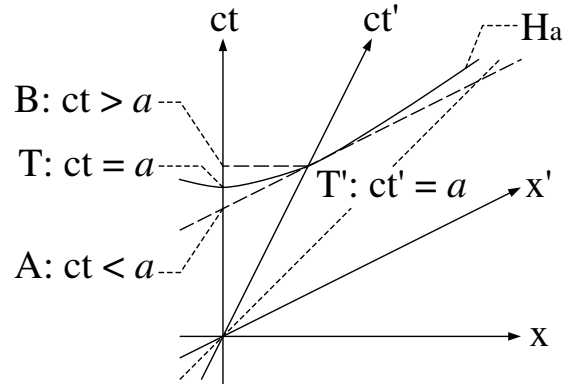
答：時間の遅れ（どちらも、相手の時計が遅れているように見える。）

∴ 右下図より、事象 T' と同時刻になる事象を整理すると：

- 観測者 K' から見て 事象 T' と事象 A が同時刻
- 観測者 K から見て 事象 T' と事象 B が同時刻

また、K と K' の時計が示す時刻（時間座標）は：

- 「観測者 K の時計が 事象 A で示す時刻」  
= 「事象 A の  $ct$  座標」 =  $ct_A$
- 「観測者 K の時計が 事象 B で示す時刻」  
= 「事象 B の  $ct$  座標」 =  $ct_B$
- 「観測者 K' の時計が 事象 T' で示す時刻」 = 「事象 T' の  $ct'$  座標」 =  $ct'_{T'} = a$



一方、右図の座標軸の目盛りを比べて： $ct_A < a$  ,  $ct_B > a$

よって、「相手の時間を知る」とは「自分にとって同時刻の事象で時計を比べる」ことなので、以上より：

- 観測者 K' は 同時刻の事象 A と T' を比べて、観測者 K の時計が遅れている、と判断。
- 観測者 K は 同時刻の事象 T' と B を比べて、観測者 K' の時計が遅れている、と判断。

◇ 例えば、K が測る事象 B の時間座標  $ct_B$  の値を計算すれば、K が観測する「K' の時計の遅れ」を定量的に評価できる。この計算は次の手順で、双曲線と直線の方程式から初等幾何的に行える：

(1) 慣性系 K の時計が示す時刻を計算するために、 $(ct, x)$  座標で計算を行うのがよい。

まず、K から見た事象 T' ( $ct_{T'}$ ,  $x_{T'}$ ) を求める：
$$\begin{cases} \text{K から見た双曲線 } H_a : -(ct)^2 + x^2 = -a^2 (= s_T^2) \\ \text{K から見た } ct' \text{ 軸} : ct = \frac{c}{v}x \end{cases}$$

→ この 2 つの交点で事象 T' ( $ct_{T'}$ ,  $x_{T'}$ ) =  $\left( \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{v}{c} \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$

(2) 時空図から、K から見た事象 B の座標が読み取れる： $(ct_B, x_B) = (ct_{T'}, 0)$

→ 「K の時計で計る事象 B の時刻」 = 「K の時計で計る事象 T' の時刻」 ということ

(3) 以上より：
$$\begin{cases} \text{K の時計で計る事象 B の時刻} : ct_B = \frac{a}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow ct_{T'} = ct_B \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ \text{K' の時計で計る事象 T' の時刻} : ct'_{T'} = a \end{cases}$$

→ 観測者 K は 同時刻の事象 T' と B を比べて、観測者 K' の時刻が自分の時刻の  $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  倍だけしか経過していない、と判断。

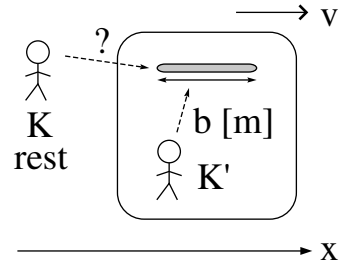
◇ いわゆる「 $\gamma$ -factor ( $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ )」は、このような初等幾何的な計算でも得られる。

◇ 以上の初等幾何的な計算は、ローレンツ変換を使って代数的に行うこともできる。→ §5 で実行。

### 4.3 ローレンツ収縮

問題設定： §4.1 節と同じ観測者 K と K' を考える。観測者 K' が (K' から測って) 長さ  $b$  [m] の棒を持っている。このとき、観測者 K がこの棒の長さを測ると、どんな長さに見えるか？

答：ローレンツ収縮 (観測者 K には、棒の長さが  $b$  より短く見える。)



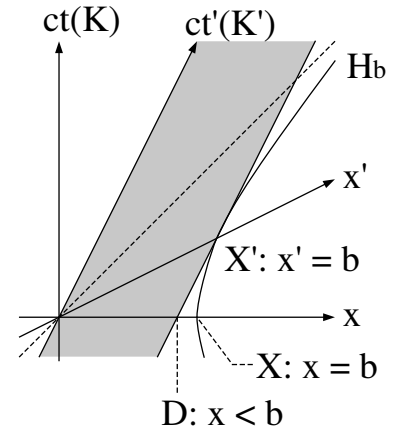
∵ 棒の一端の世界線が  $ct-x$  時空図の原点を通るとすると、右下図の灰色部分が棒が描く世界面になる。このとき、

「棒の長さ」= 「同時刻の空間上での、棒の両端の間の空間距離」である。(以下、棒の一端として原点を考える。)

右図より：  $\left\{ \begin{array}{l} \text{事象 } X' \text{ の位置で測る } x' \text{ 座標が,} \\ \quad \text{K' が測る 棒の長さ } b \text{ である: } x'_{X'} = b \\ \text{事象 D の位置で測る } x \text{ 座標が,} \\ \quad \text{K が測る 棒の長さ } b_K \text{ である: } x_D = b_K \end{array} \right.$

一方、右図の目盛りを比べて：  $x_D < b \rightarrow b_K < b$

よって、観測者 K には、K' が持っている棒の長さが (K' が測る長さ)  $b$  より短く見える。



◇ K が測る事象 D の空間座標  $x_D$  の値を計算すれば、K が観測する「K' が持つ棒のローレンツ収縮」を定量的に評価できる。この計算は次の手順で、双曲線と直線の方程式から初等幾何的に行える：

(1) 慣性系 K が計る距離を計算するために、 $(ct, x)$  座標で計算を行うのがよい。

まず、K から見た事象  $X'$  ( $ct_{X'}, x_{X'}$ ) を求める： $\left\{ \begin{array}{l} \text{K から見た双曲線 } H_b : -(ct)^2 + x^2 = b^2 (= s_X^2) \\ \text{K から見た } x' \text{ 軸} : ct = \frac{v}{c}x \end{array} \right.$

→ この 2 つの交点で事象  $X'$  ( $ct_{X'}, x_{X'}$ ) =  $\left( \frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{b}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$

(2) 事象  $X'$  を通って  $ct'$  軸 (傾き  $c/v$ ) に平行な直線： $ct = \frac{c}{v}(x - x_{X'}) + ct_{X'}$

(3) この直線と  $x$  軸の交点が事象 D： $(tc_D, x_D) = (0, x_{X'} - \frac{v}{c}ct_{X'})$

→ K が計る棒の長さ： $b_K = x_D = [1 - (\frac{v}{c})^2] x_{X'} = b \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$

→ 観測者 K には、K' が持っている棒の長さが (K' が測る長さ)  $b$  の  $\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$  倍だけ短く見える。

◇ いわゆる「 $\gamma$ -factor ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ )」は、このような初等幾何的な計算でも得られる。

◇ 以上の初等幾何的な計算は、ローレンツ変換を使って代数的に行うこともできる。→ §5 で実行。

#### 練習問題

上と同じ設定で、観測者 K も (K から見た) 長さ  $b$  の棒を持っているとする。このとき、観測者 K' が、K が持つ棒の長さを測定すると  $b\sqrt{1 - (v/c)^2}$  になる ( $b$  より短く見える) はずである。これを、 $ct-x$  図の中に『K が持つ棒の世界面』を描くことで理解せよ。

## 5 特殊相対論の帰結 2：ローレンツ変換（ミンコフスキー時空での慣性系の変換）

### 5.1 ローレンツ変換（単純な表現：相対速度と $x$ 軸の向きを合わせる）

- 時間の遅れ (§4.2) とローレンツ収縮 (§4.3) を理解する上での注意点：

ある事象の座標を  $\begin{cases} \text{慣性系 K で測った値 } (ct, x) \\ \text{慣性系 K' で測った値 } (ct', x') \end{cases}$  の 2 つを区別すること。

→ では、 $(ct, x)$  と  $(ct', x')$  の関係は？ …… ローレンツ変換！

- 特殊相対論における、異なる慣性系が測る座標の関係式（ニュートン力学ではガリレイ変換だった）：

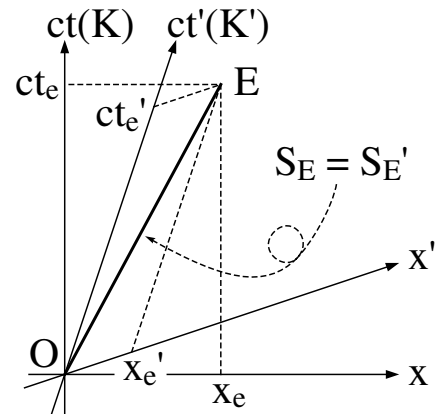
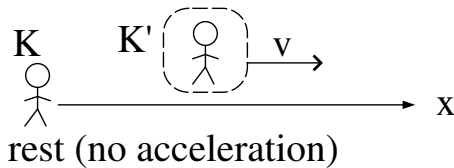
ローレンツ変換：下図のように、慣性系 K の  $x$  軸方向に、別の慣性系 K' が速度  $v$  で慣性運動するとき、

任意の事象 E の座標を  $\begin{cases} \text{慣性系 K が測った値} : (ct_e, x_e) \\ \text{慣性系 K' が測った値} : (ct'_e, x'_e) \end{cases}$  ← [ 速度と直交する  $y, z$  座標の値は  
どちらで測っても同じなので省略。 ]

とすると、特殊相対論では次の関係が成立する：

$$ct'_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( ct_e - \frac{v}{c} x_e \right), \quad x'_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( -\frac{v}{c} ct_e + x_e \right) \quad (5.1)$$

これをローレンツ変換と呼ぶ。（この変換則に現れる座標値が時空図上でどの目盛りなのかは下図の通り。）



→ これで、一方の慣性系の座標値  $(ct, x)$  だけを使って、もう一方の慣性系の座標値  $(ct', x')$  を計算できる。

→ 上の式 (5.1) は、「慣性系 K が測る座標値」を使って「慣性系 K' が測る座標値」を計算するという形である。

→ 逆に、「K' での座標値  $(ct'_e, x'_e)$ 」を使って「K での座標値  $(ct_e, x_e)$ 」を計算する形にするには、式 (5.1) で、 $(ct'_e, x'_e)$  と  $(ct_e, x_e)$  を入れ換えて、かつ速度を  $-v$  にすればよい。（K' から見た K の速度は  $-v$  なのだ。）

$$\text{式 (5.1) の逆: } ct_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( ct'_e + \frac{v}{c} x'_e \right), \quad x_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{v}{c} ct'_e + x'_e \right) \quad (5.2)$$

### 5.2 ローレンツ変換の証明：初等幾何的アプローチ

状況設定：§5.1 と同じで、上図の通り。

式 (5.1) の導出

事象 E の慣性系 K から見た座標： $(ct_e, x_e)$

→ これ決めた上で、事象 E を通る直線の方程式と 4 次元距離の普遍性を利用して式 (5.1) を導出。

→ 次の 3 段階に分ける。

第1段階：右図の事象 A, B の慣性系 K から見た座標を求める。

◇ 事象 A :  $\begin{cases} ct' \text{ 軸} & : ct = \frac{c}{v} x \\ \text{E を通って } x' \text{ に平行な直線} & : ct = \frac{v}{c} (x - x_e) + ct_e \end{cases}$  の交点

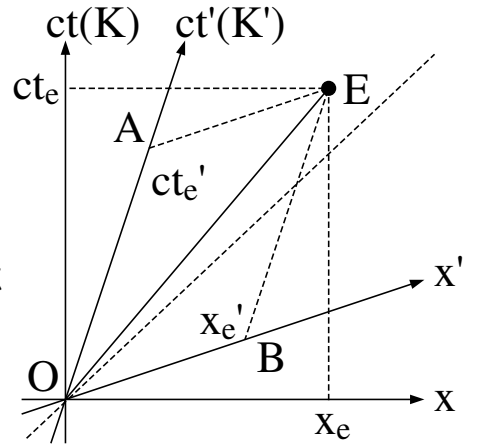
→ 慣性系 K から見た A の座標 :

$$\left( \frac{1}{1 - (v/c)^2} (ct_e - \frac{v}{c} x_e), \frac{v}{1 - (v/c)^2} (ct_e - \frac{v}{c} x_e) \right)$$

◇ 事象 B :  $\begin{cases} x' \text{ 軸} & : ct = \frac{v}{c} x \\ \text{E を通って } ct' \text{ に平行な直線} & : ct = \frac{c}{v} (x - x_e) + ct_e \end{cases}$  の交点

→ 慣性系 K から見た B の座標 :

$$\left( \frac{v}{1 - (v/c)^2} (-\frac{v}{c} ct_e + x_e), \frac{1}{1 - (v/c)^2} (-\frac{v}{c} ct_e + x_e) \right)$$



第2段階：上図の事象 A, B の慣性系 K' から見た座標を設定。

→ 事象 A は  $ct'$  軸上, 事象 B は  $x'$  軸上なので,  $\begin{cases} \text{慣性系 K' から見た A の座標} & : (ct'_e, 0) \\ \text{慣性系 K' から見た B の座標} & : (0, x'_e) \end{cases}$

第3段階：4次元距離の不変性 (§3.1) から式 (5.1) が分かる。

4次元距離はどの慣性系から見ても変わらないので,

$$\overline{OA}^2 = \begin{cases} -\frac{1}{1 - (v/c)^2} (ct_e - \frac{v}{c} x_e)^2 & : \text{慣性系 K から見て計算} \\ -(ct'_e)^2 & : \text{慣性系 K' から見て計算} \end{cases} \quad (5.3a)$$

$$\overline{OB}^2 = \begin{cases} \frac{1}{1 - (v/c)^2} (-\frac{v}{c} ct_e + x_e)^2 & : \text{慣性系 K から見て計算} \\ x_e'^2 & : \text{慣性系 K' から見て計算} \end{cases} \quad (5.3b)$$

→ この2つの式の2乗を開くとき, 次に注意:

上図の事象 E と  $ct'$  軸,  $x'$  軸の位置関係から,  $\begin{cases} ct'_e \geq 0 & \iff ct_e \geq \frac{v}{c} x_e \\ x'_e \geq 0 & \iff x_e \geq vt_e \end{cases}$

よって,  $ct'_e$  と  $x'_e$  の符号も含めて:  $\begin{cases} ct'_e = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (ct_e - \frac{v}{c} x_e) \\ x'_e = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (-\frac{v}{c} ct_e + x_e) \end{cases}$

これは式 (5.1) と同じである。[証明終]

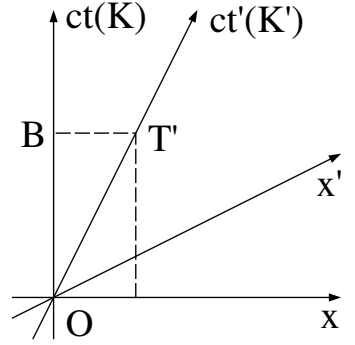
補足1: 今後, ローレンツ変換を使って(一見)代数的に計算を進めるような部分も出てくる。しかし, 上の証明のようにローレンツ変換は初等幾何的なアプローチで示されるので, 「ローレンツ変換を使った説明」は全て「初等幾何による特殊相対論の説明」だとみなせる。(ローレンツ変換を使うのを避けたければ, 以下の議論でローレンツ変換を使うところを全て, 上の証明に置き換えればよい。)

補足2: もっと代数的な別証明を付録の §A.1 にまとめる。

### 5.3 ローレンツ変換で導く「時間の遅れ」

状況設定： §4.2 と同じ問題設定を考える → 右図

時間の遅れの計算



慣性系 K で測った事象 B の時間を  $ct_B$  とすると

$$\text{事象 } X' \text{ の } \begin{cases} \text{慣性系 K からみた座標} & : (ct_B, \frac{v}{c} ct_B) \leftarrow x_{T'} = vt_{T'} = vt_B \\ \text{慣性系 K' からみた座標} & : (ct'_{T'}, 0) \quad (ct' \text{ 軸上: } x = vt) \end{cases}$$

→ ローレンツ変換 (5.1) より  $ct'_{T'} = \frac{ct_B - (v/c)^2 ct_B}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \underline{ct_B \sqrt{1 - (v/c)^2}}$

→ これは §4.2 と同じ結果である。

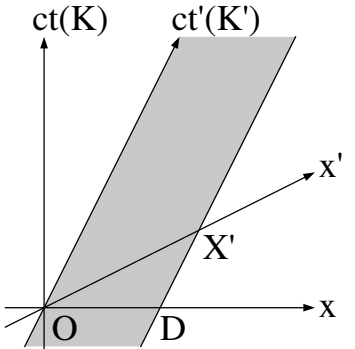
観測者 K は同時刻の事象 T' と B を比べて、観測者 K' の時刻が自分の時刻の  $\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$  倍だけしか経過していない、と判断。

補足： ローレンツ変換を使うことで、§4.2 で行った双曲線や直線の交点の計算が楽になった。ただし、双曲線の計算は §5.2 の「ローレンツ変換の証明」の中で使った式 (5.3) に入っているの、この §5.3 の計算は §4.2 の計算と同じだと見なせる。

### 5.4 ローレンツ変換で導く「ローレンツ収縮」

状況設定： §4.3 と同じ問題設定を考える → 右図

ローレンツ収縮の計算



§4.3 の『初等幾何的にローレンツ収縮を導く計算』の (1) で求めた

『慣性系 K からみた事象 X' の座標』をローレンツ変換で計算：

$$\text{事象 } X' \text{ の } \begin{cases} \text{慣性系 K からみた座標} & : (ct_{X'}, x_{X'}) \\ \text{慣性系 K' からみた座標} & : (0, b) \end{cases} \quad (\text{§4.3 と同じ設定})$$

→ K からみた座標を得るために、ローレンツ変換 (5.1) の逆 (5.2) を使う：

$$\begin{cases} ct_{X'} = \frac{0 + (v/c)b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ x_{X'} = \frac{0 + b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad \text{なので, } X' \text{ の座標: } (ct_{X'}, x_{X'}) = \left( \frac{v}{c} \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)$$

これは、§4.3 で初等幾何的に導いた『K から見た事象 X' の座標』と同じである。

→ §4.3 の (2), (3) と同じ計算でローレンツ収縮が得られる。

→ K で測る事象 D の空間座標が『K が測る (K' が持つ) 棒の長さ』:  $b_K = b \sqrt{1 - (v/c)^2}$

→ 観測者 K には、K' が持っている棒の長さが (K' が測る長さ)  $b$  の  $\sqrt{1 - (v/c)^2}$  倍だけ短く見える。

補足： ローレンツ変換を使うことで、§4.3 で行った双曲線や直線の交点の計算が楽になった。ただし、双曲線の計算は §5.2 の「ローレンツ変換の証明」の中で使った式 (5.3) に入っているの、この §5.4 の計算は §4.3 の計算と同じだと見なせる。



## 5.5 Rapidity

§5.1 と同じ設定で考える (事象 E の座標を慣性系 K と K' で測る)

→ ローレンツ変換 (5.1) は次のように整理できる :

$$\begin{cases} ct'_e &= ct_e \cosh \psi - x_e \sinh \psi \\ x'_e &= -ct_e \sinh \psi + x_e \cosh \psi \end{cases} \quad \text{ただし, } \begin{cases} \cosh \psi &= \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \sinh \psi &= \frac{v}{c} \gamma \end{cases} \quad (5.4)$$

( $\gamma$  と  $\frac{v}{c} \gamma$  は双曲関数の特徴的性質  $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$ ,  $1 \leq \cosh \psi < \infty$ ,  $-\infty < \sinh \psi < \infty$  を満たす。)

→ このとき,  $\psi$  を Rapidity と呼び, 次の関係がある :

$$v = c \tanh \psi \quad (-\infty < \psi < \infty) \quad (5.5)$$

3次元速度  $v$  は, Rapidity  $\psi$  で表わされる。

## 5.6 ローレンツ変換の一般的表現 (任意の向き of 相対速度)

ローレンツ変換 (5.1) では, 慣性系 K と K' の 3次元相対速度の向きを  $x$  軸 ( $x'$  軸) に特別に選んだ。

→ そこで, 相対速度の向きが任意の場合のローレンツ変換をまとめる。

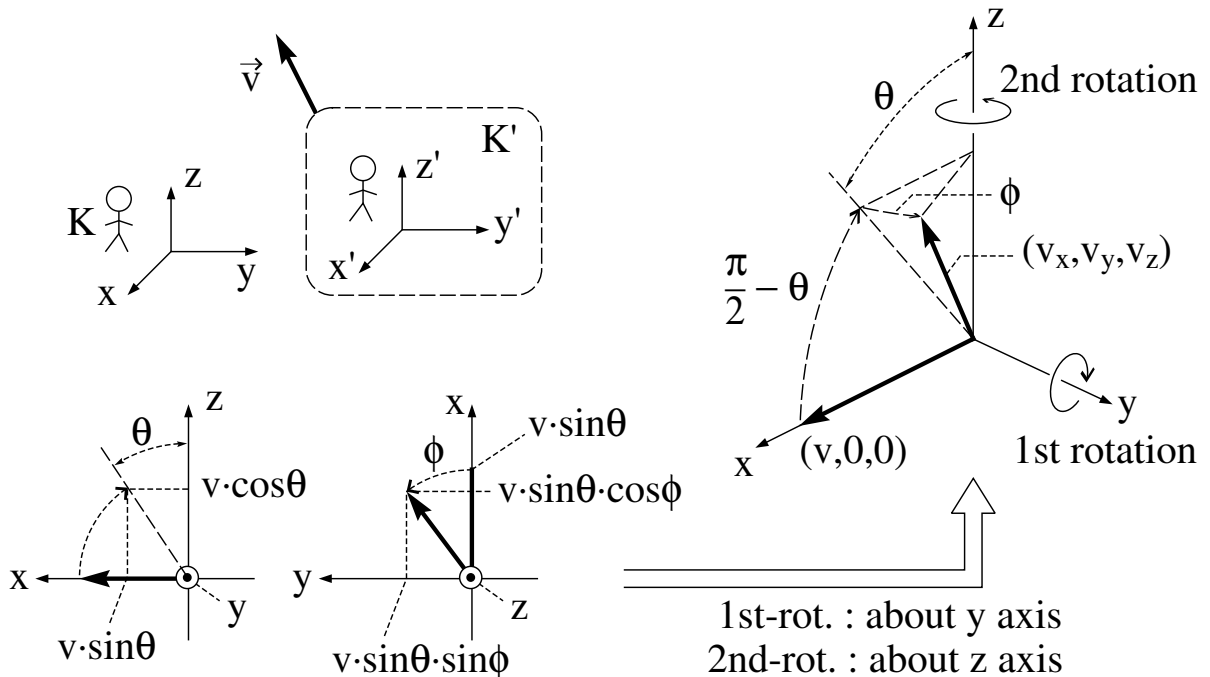
状況設定

◇ 慣性系 K と慣性系 K' の空間座標の向きは平行なまま (下図)。

◇ 慣性系 K から見た K' の 3次元速度 (K と K' の相対速度):  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

→ §5.1 の  $x$  軸方向の 3次元速度  $(v, 0, 0)$  に対して次の回転変換を行えばよい。

$$\begin{cases} \text{回転 1 : } y \text{ 軸周りに角 } \frac{\pi}{2} - \theta \text{ の「右向き」回転} \\ \text{回転 2 : } z \text{ 軸周りに角 } \phi \text{ の「左向き」回転} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{これで通常の極座標表示} \\ \text{に対応する速度成分になる} \end{cases} \quad (5.6)$$



計算

◇ 式 (5.6) の速度の回転 1 :  $(v, 0, 0) \rightarrow (\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z)$  は次の空間回転の行列で表せる :

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta} & 0 & -\sin \bar{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \bar{\theta} & 0 & \cos \bar{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: R_1(\bar{\theta}) \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \sin \theta \\ 0 \\ v \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta) \quad (5.7)$$

◇ 式 (5.6) の速度の回転 2 :  $(\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z) \rightarrow (v_x, v_y, v_z)$  は次の空間回転の行列で表せる :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{pmatrix} =: R_2(\phi) \begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \sin \theta \cos \phi \\ v \sin \theta \sin \phi \\ v \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

◇ 次に, §5.1 の「単純な設定」でのローレンツ変換 (5.1) は次のようにまとまる :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma(v/c) & 0 & 0 \\ -\gamma(v/c) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: L_x(v) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5.9)$$

→ これに式 (5.6) の回転変換を作用 :  $L_x(v) \rightarrow L_{\text{gen}}(\vec{v})$  (次ページの補足参照)

$$\begin{aligned} L_{\text{gen}}(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_2(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_1(\bar{\theta}) \end{pmatrix} L_x(v) \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_1(-\bar{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_2(-\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v_x}{c} & -\gamma \frac{v_y}{c} & -\gamma \frac{v_z}{c} \\ & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_z}{v^2} \\ & & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_y v_z}{v^2} \\ & & & 1 + (\gamma - 1) \frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix} \quad (\vec{v} \text{ の成分は式 (5.8) 参照}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

対称行列

→ 従って, この §5.6 の「一般的な設定」でのローレンツ変換は :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L_{\text{gen}}(\vec{v}) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \left( ct - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c} \right) \\ x - \left[ \gamma t - (\gamma - 1) \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} \right] v_x \\ y - \left[ \gamma t - (\gamma - 1) \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} \right] v_y \\ y - \left[ \gamma t - (\gamma - 1) \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} \right] v_y \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \quad (5.11)$$

注意 :  $\gamma$  は 3 次元相対速度の成分でなく, 大きさ  $|\vec{v}|$  で与えられる。

補足 :  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  と  $\vec{r} = (x, y, z)$  の内積  $\vec{v} \cdot \vec{r} = v_x x + v_y y + v_z z$  とすると式 (5.11) は,

$$\begin{cases} ct' = \gamma \left( ct - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right) & \rightarrow ct \quad \text{as } c \rightarrow \infty \text{ (ニュートン力学極限)} \\ \vec{r}' = \vec{r} - \left[ \gamma t - (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v^2} \right] \vec{v} & \rightarrow \vec{r} - t\vec{v} \quad \text{as } c \rightarrow \infty \text{ (ニュートン力学極限)} \end{cases} \quad (5.12)$$

となる。ローレンツ変換はニュートン力学極限 ( $c \rightarrow \infty$ ) でガリレイ変換になる。

回転変換 (5.10), (5.11) の補足

◇ §5.1 の「単純な設定」で  $\begin{cases} \text{慣性系 K が見る座標 (位置ベクトル)} : (ct, \vec{r}_0) \\ \text{慣性系 K' が見る座標 (位置ベクトル)} : (ct', \vec{r}'_0) \end{cases}$  とする。

◇ 式 (5.6) の回転変換 1, 2 をまとめて行う行列:  $\mathcal{R}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_2(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_1(\bar{\theta}) \end{pmatrix}$

◇ 回転変換の逆は,  $R_1^{-1}(\bar{\theta}) = R_1(-\bar{\theta})$ ,  $R_2^{-1}(\phi) = R_2(-\phi)$  なので,  $\mathcal{R}(\theta, \phi)$  の逆変換は:

$$\mathcal{R}^{-1}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_1(\bar{\theta}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_2(\phi) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_1(-\bar{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_2(-\phi) \end{pmatrix}$$

◇ 「一般的な設定」で  $\begin{cases} \text{慣性系 K が見る座標 (位置ベクトル)} : \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}_0 \end{pmatrix} \\ \text{慣性系 K' が見る座標 (位置ベクトル)} : \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}'_0 \end{pmatrix} \end{cases}$

→ 慣性系 K と K' の両方の空間座標に同じ回転を作用させたので, K と K' の空間座標軸が平行なままに保たれる。(これが, この §5.6 の状況設定。)

◇ 「単純な設定」のローレンツ変換 (5.9) は,  $(ct, \vec{r}_0)$  と  $(ct', \vec{r}'_0)$  の間の変換:  $\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}'_0 \end{pmatrix} = L_x(v) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}_0 \end{pmatrix}$

→ 以上の準備の下で, 「単純な設定」のローレンツ変換 (5.9) に式 (5.6) の回転変換 1, 2 を作用:

$$\mathcal{R}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}'_0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta, \phi) L_x(v) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}_0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta, \phi) L_x(v) \mathcal{R}^{-1}(\theta, \phi) \mathcal{R}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}_0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

これは次のようになる:  $\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = L_{\text{gen}}(\vec{v}) \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}' \end{pmatrix}$  かつ  $L_{\text{gen}}(\vec{v}) = \mathcal{R}(\theta, \phi) L_x(v) \mathcal{R}^{-1}(\theta, \phi)$

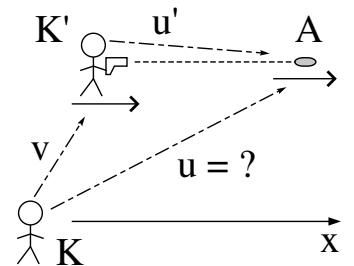
これが, 式 (5.10), (5.11) である。

## 6 特殊相対論の帰結 3: 速度合成則と因果律

### 6.1 問題設定 (単純な設定)

状況設定: 右図

- ◇ 慣性系 K から見て  $x$  軸方向に, 慣性系 K' が速度  $v$  で慣性運動。
- ◇ 座標の変数:  $\begin{cases} \text{慣性系 K の座標} : (ct, x) \\ \text{慣性系 K' の座標} : (ct', x') \end{cases}$  ...  $y, z$  座標は省略
- ◇ 観測者 K' が  $x'$  軸方向に (K' から見た) 速度  $u'$  で物体 A を発射。
- ◇  $v$  も  $u'$  も光速  $c$  以下 ( $v \leq c, u' \leq c$ ) である。

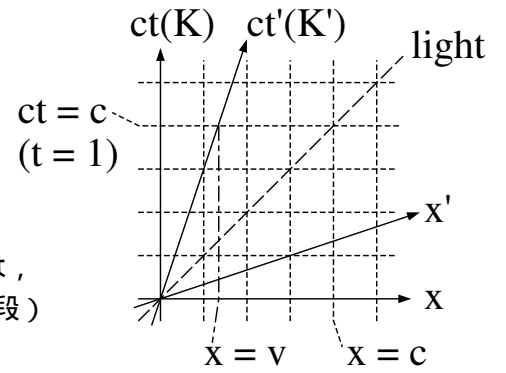


問題: 観測者 K が測定する物体 A の速度  $u$  はいくらか?

## 6.2 速度合成の初等幾何的理解

● 右図が示すこと： $ct-x$  時空図（Kが見る時空）で

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kの座標}(ct, x) \text{は『正方形マス目』を描く：右図(上)} \\ \text{K'の座標}(ct', x') \text{は『菱形マス目』を描く：右図(下)} \end{array} \right.$



→ 観測者 K' が測った物体 A の速度が  $u'$  なので、物体 A の世界線は、 $ct-x$  時空図の『菱形マス目』で測って速度  $u'$  の直線。（右図の下段）

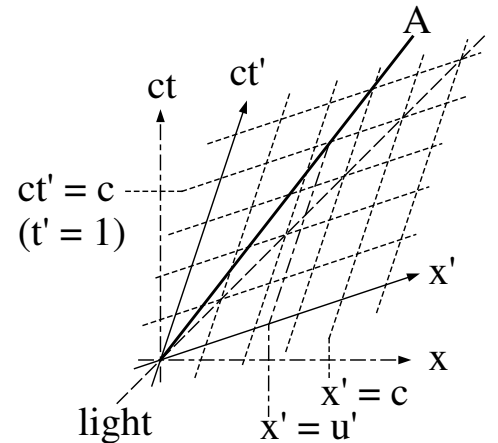
→ この物体 A の世界線の速度を、 $ct-x$  時空図の『正方形マス目』で測った値が、慣性系 K が測る  $u$  である。

→ ニュートン力学（ガリレイ変換）が正しければ  $u = u' + v$  だが、特殊相対論（ローレンツ変換）では  $u < u' + v$  になる！

→ 以下の例で定性的な理解を得る。

● 例： $v = \frac{2}{3}c$ ,  $u' = \frac{2}{3}c$  の場合（下図）

[補足]：ニュートン力学（ガリレイ変換）が正しければ、 $u = u' + v = (4/3)c$  で光速を超える、と結論してしまうが、相対論ではそうならない！



→ 右図による定性的な理解：

- ◇ 下図(左)： $ct-x$  時空図での（Kが見る）
 

}	光の世界線
	$ct'$ 軸（K'の世界線）
	$x'$ 軸

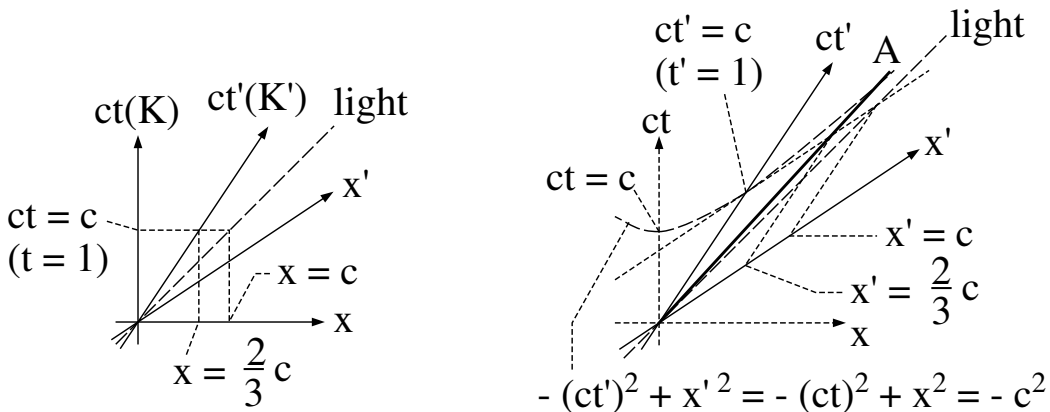
→ これらを基準に、K'が見る『菱形マス目』が描ける。

◇ 下図(右)：『菱形マス目』の菱形の一つを作図してから、物体 A の世界線を作図。

→ 物体 A の世界線は、光の世界線より  $ct$  軸側に傾いている。

→ 観測者 K から見て、物体 A の速度は光速より遅いこと ( $u < c$ ) を意味する！

次の §6.3 で、 $u$  を  $v, u', c$  で表す関係式を導く。



### 6.3 ローレンツ変換で導く速度合成則

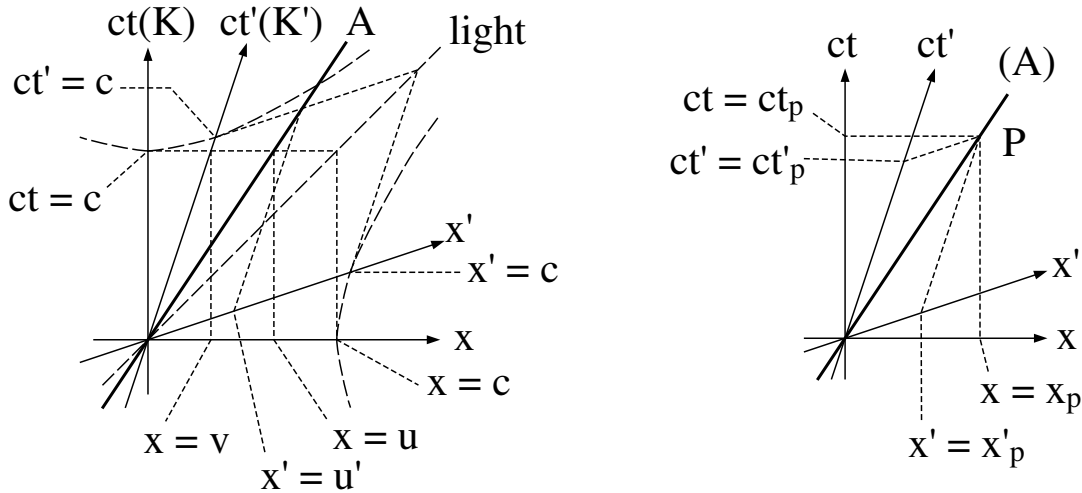
準備： §6.1 の状況設定で，下図が示すこと：

◇ 下図（左）： §6.2 の例と同様な図。

→  $\begin{cases} \underline{x'}$  軸上のどこに， $\underline{K'}$  が測る A の速度  $u'$  を示す目盛りがあるか  
 $\underline{x}$  軸上のどこに， $\underline{K}$  が測る A の速度  $u$  を示す目盛りがあるか が分かる。

◇ 下図（右）： 下図（左）で座標軸と物体 A の世界線を抜き出した図。

→ 物体 A の世界線上の事象 P を利用して， $u$  を  $v, u', c$  で表す関係式（速度合成則）を導こう。



速度合成則の導出

物体 A の世界線上の事象 P の座標：  $\begin{cases} (ct_p, x_p) : \text{慣性系 K で測った座標} \\ (ct'_p, x'_p) : \text{慣性系 K' で測った座標} \end{cases}$  とする。

→ ローレンツ変換で， $(ct_p, x_p)$  を  $(ct'_p, x'_p)$  で表せる（ $\underline{K'}$  から見る  $\underline{K}$  の速度は  $-v$  なので式 (5.2) を利用）：

$$\begin{cases} ct_p = \gamma \left( ct'_p + \frac{v}{c} x'_p \right) \\ x_p = \gamma \left( \frac{v}{c} ct'_p + x'_p \right) \end{cases} \quad \text{ただし, } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (6.1)$$

一方，事象 P に注目して，

$$\underline{K' \text{ から見た物体 A の速度は } u' : u' = \frac{x'_p}{t'_p} \quad (6.2a)}$$

$$\underline{K \text{ から見た物体 A の速度は } u : u = \frac{x_p}{t_p} = \frac{x_p}{ct_p} c \quad (6.2b)}$$

よって，式 (6.2b) にローレンツ変換 (6.1) を代入して， $u = \frac{vt'_p + x'_p}{ct'_p + (v/c)x'_p} c = \frac{v + x'_p/t'_p}{1 + (vx'_p)/(c^2 t'_p)}$

これに，さらに式 (6.2a) を代入して：

$$\text{速度合成則 : } u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (6.3)$$

§6.2 の例で計算：  $v = \frac{2}{3}c, u' = \frac{2}{3}c$  のとき， $u = \frac{(4/3)c}{1 + \frac{(2/3)^2 c^2}{c^2}} = \frac{(4/3)}{1 + (4/9)} c = \frac{12}{13} c (< c) \cdots$  光速以下！

## Rapidity による表現

$$\begin{cases} \text{慣性系 K から見た 慣性系 K' の速度 } v \text{ の Rapidity : } \psi \rightarrow v = c \tanh \psi \\ \text{慣性系 K' から見た 物体 A の速度 } u' \text{ の Rapidity : } \phi' \rightarrow u' = c \tanh \phi' \end{cases}$$

→ 速度合成則 (6.3) より,

$$u = c \frac{\tan \phi' + \tanh \psi}{1 + \tanh \phi' \tanh \psi} = c \tanh(\phi' + \psi) \quad (6.4)$$

→ 慣性系 K と K' の相対速度と平行な向きの速度合成則 (6.3) は, Rapidity に関する単純な和である。

## 6.4 『光速を超えられない』定理と『光源の運動に寄らず光速の値は一定』定理

定理 (光速を超えられない): 光速以下の速度を合成しても, 決して光速を超えることはできない。(光速以下の運動状態から超光速の運動状態へ移ることは不可能。)

証明

速度合成則 (6.3) より,  $c - u = \frac{(c - u')(c - v)}{c + (u'v/c)} \geq 0$  なので, 明らかに  $u \leq c$  である。

ただし, 等号は  $v = c$  and/or  $u' = c$  の場合。

(Rapidity を考えると,  $|\phi' + \psi| < \infty \Leftrightarrow |\tanh(\phi' + \psi)| < 1$  より自明。時空図からもほぼ自明。) [証明終]

定理 (光源の運動に寄らず光速の値は一定): 光源がどんな運動をしていても, ある慣性系で測定する光速の値は  $c$  である。(  $c = 2.99792485 \times 10^8$  [m/s] )

→ これは, §1.1 の「補足 3」(§1.1 の左側の図) で述べたこと。

証明

速度合成則 (6.3) で, 慣性系 K' から見た物体 A の速度を光速  $u' = c$  にすると, 慣性系 K' の速度  $v$  に寄らず, 慣性系 K から見た物体 A の速度は  $u = c$  である。[証明終]

系: この定理と光速不変の原理と合わせると, 光源の運動に寄らず かつ 任意の慣性系 で測る光速の値が  $c$  であることが分かる。

## 6.5 一般的な場合の速度合成則

状況設定: §6.1 の設定を, 物体 A の速度について次のように一般化。

◇ 慣性系 K から見て  $x$  軸方向に, 慣性系 K' が速度  $v$  で慣性運動。

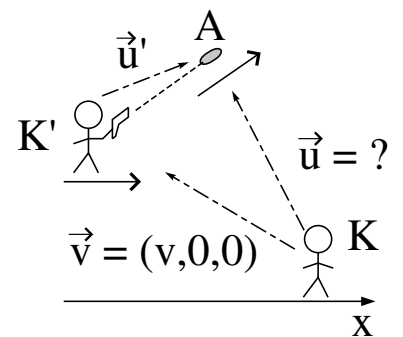
◇ 座標の変数:  $\begin{cases} \text{慣性系 K の座標 : } (ct, x, y, z) \\ \text{慣性系 K' の座標 : } (ct', x', y', z') \end{cases}$

→ ただし,  $y' = y, z' = z$  ( $v$  は  $x$  軸方向)

—— 以上は §6.1 と同じ ——

◇ 観測者 K' が (K' から見た) 3次元速度  $\vec{u}'$  で物体 A を発射:

→ 慣性系 K' が測る成分  $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$



→ 以上の設定で, 観測者 K から測る物体 A の 3次元速度  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  を求める。

慣性系 K と K' の相対速度に 平行 な成分 :  $x$  成分  $u_x$  の導出

$$\vec{u}' \text{ の } x' \text{ 成分だけ考えれば, §6.3 とまったく同じなので, } u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (u'_x v/c^2)}$$

慣性系 K と K' の相対速度に 垂直 な成分 :  $y, z$  成分  $u_y, u_z$  の導出

◇  $y$  成分に注目 :  $z$  軸 ( $z'$  軸) 以外の時空図が便利

$$\dots \begin{cases} ct' \text{ 軸と } x' \text{ 軸は, } ct-x \text{ 面上で「菱形マス目」を張るように傾く} \\ ct' \text{ 軸と } y \text{ 軸は直交} \\ ct' \text{ 軸と } y' \text{ 軸は直交} \\ y \text{ 軸と } y' \text{ 軸は共通} \end{cases}$$

という事実から右図を得る。

→ 物体 A の世界線上の事象 P の座標を,

$$\begin{cases} \text{慣性系 K で見ると : } (ct_p, x_p, y_p, z_p) \\ \text{慣性系 K' で見ると : } (ct'_p, x'_p, y_p, z_p) \end{cases}$$

とすると, 今の設定でも, 慣性系 K と K' の相対速度は §6.1 と同じなので,  $(ct_p, x_p)$  と  $(ct'_p, x'_p)$  の間にはローレンツ変換 (6.1) が成立。

→ 右図のように観測者 K, K' と物体 A の世界線が原点 O を共有する設定で, 次の関係がある :

$$\begin{cases} u_y = \frac{y_p}{t_p} : \text{A の世界線を } ct-y \text{ 面上へ射影した直線の傾き} \\ u'_y = \frac{y'_p}{t'_p} : \text{A の世界線を } ct'-y' \text{ 面上へ射影した直線の傾き} \end{cases}$$

(今の射影 :  $x, z$  軸 (or  $x', z'$  軸) に平行な「光」による影)

→ ローレンツ変換 (6.1) ( $ct'_p$  と  $ct_p$  の関係) と  $y_p = y'_p$  より

$$u_y = c \frac{y_p}{ct_p} = c \frac{\gamma y_p}{ct'_p + (v/c)x'_p} = \frac{\gamma u'_y}{1 + (u'_x v/c^2)}$$

と計算できる ( $u'_x = \frac{x'_p}{t'_p}$  を使った)

◇  $u_z$  も同様。

以上から …

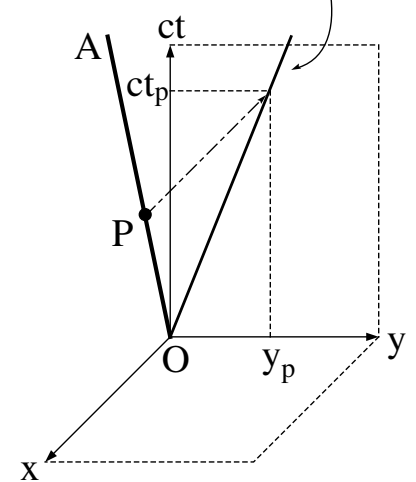
慣性系 K と K' の相対速度と異なる方向に運動する物体に対する速度合成則

$$\text{慣性系 K が測る物体 A の 3次元速度 } \vec{u} = \left( \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \frac{u'_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \frac{u'_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right) \quad (6.5)$$

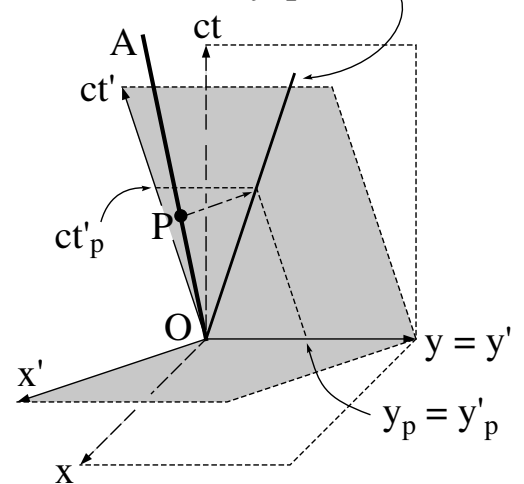
→ 速度の大きさ :  $|\vec{u}| = c \sqrt{1 - \frac{[1 - (v/c)^2][1 - (u'/c)^2]}{[1 + (u'_x v/c^2)]^2}}$  ( $u' = |\vec{u}'|$ ) より  $|\vec{u}| \leq c$  (等号は  $u' = c$  のとき)

なので, §6.4 の『光速を超えられない』定理と『光源の運動に寄らず光速の値は一定』定理が得られる。

Projection of A's world line onto  $ct$ - $y$  plane



Projection of A's world line onto  $ct'$ - $y'$  plane



**Rapidity** で表す一般の速度合成則

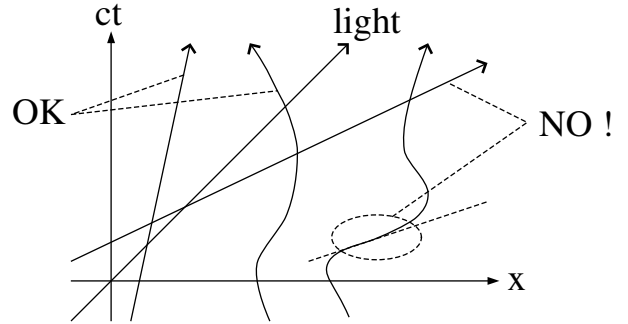
$$\begin{cases} \vec{u}' \text{ の Rapidity } \vec{\phi}' = (\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z) : \vec{u}' = (c \tanh \phi'_x, c \tanh \phi'_y, c \tanh \phi'_z) \\ v \text{ の Rapidity } \psi \text{ ( } x \text{ 成分のみ) } : v = c \tanh \psi \end{cases} \text{ として:}$$

$$\vec{u} = \left( c \frac{\sinh(\phi'_x + \psi)}{\cosh(\phi'_z + \psi)}, c \frac{\sinh \phi'_y}{\cosh(\phi'_y + \psi)}, c \frac{\sinh \phi'_z}{\cosh(\phi'_z + \psi)} \right) \quad (6.6)$$

→  $\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}$  なので,  $x$  成分は式 (6.4) と同じ形。

**6.6 因果律と光円錐**

- §6.4 の『光速を超えられない定理』より, あらゆる物体が描く世界線は, 光の世界線と同じ傾きか, それより時間軸側に傾いた世界線 (光を追い越すような運動は不可能) であることが分かる。

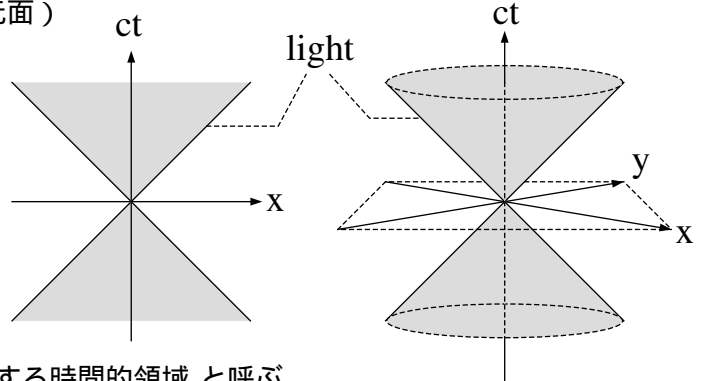


→ ある事象 P で起きた現象 (爆発, 発光, 化学反応, など) と因果関係を持ち得る事象が, 時空のどの領域にあるかが分かる。(以下に説明)

- 事象 P を頂点とする **光円錐**: 事象 P を通る全ての光の世界線で構成される面のこと。(4次元ミンコフスキー時空の中では円錐的な3次元面)

→ 例 (右図): 原点を頂点とする光円錐

- 右図の左側:  $y, z$  座標は省略し,  $ct-x$  時空図で図示した光円錐
- 右図の右側:  $z$  座標だけ省略し,  $ct-x-y$  時空図で図示した光円錐

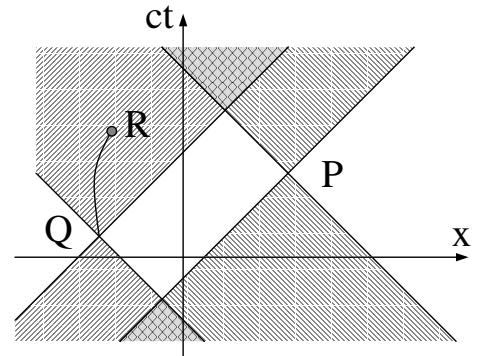


→ この例における因果律の現れ:

- 光円錐の内側 (右図の灰色領域): 原点に関する時間的領域と呼ぶ。  
→ 原点と因果関係を持つことが可能!
- 光円錐の外側 (右図の白色領域): 原点に関する空間的領域と呼ぶ。  
→ 原点と因果関係を持つことが不可能!

- 例: 右図での因果律

- ◇ 事象 Q の時間的領域の中に事象 R がある。  
→ Q で起こる現象は, R で起こる現象に影響を与えられる。その逆は不可能。
- ◇ 事象 P の空間的領域の中に事象 R がある。  
→ P で起こる現象は, R で起こる現象に何の影響も与えられない。





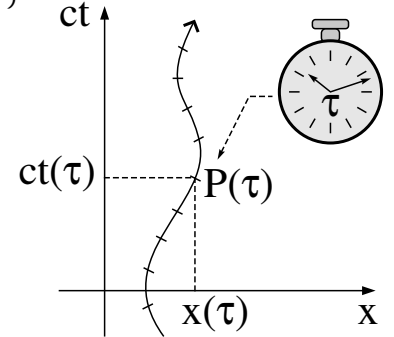
## 7 特殊相対論の帰結 4 : 質量エネルギー

### 7.1 固有時間, 4元速度, 4元運動量

任意の運動をしている粒子に対して, 固有時間, 4元速度, 4元運動量の3つを定義する。

(注: 「4次元ベクトル」のことを「4元ベクトル」と呼ぶことが多い。英語では“four vector”。)

- 固有時間  $\tau$  : 粒子に乗った (仮想的な) 観測者が測る時間 … 右図
  - 粒子の世界線は, 固有時間の座標軸 ( $c\tau$  軸) であり, 時間的な傾きをもった曲線である (粒子の速度は光速以下なので)。
  - $c\tau$  軸の目盛りは固有時間でつけられる。
  - 慣性系  $K$  ( $(ct, x, y, z)$  座標) から見た粒子の位置を表す事象  $P(\tau)$  :  $(ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$



- 4元速度  $\vec{v}_{\text{④}}$  : 粒子の事象  $P(\tau)$  の位置の変化率

$$\vec{v}_{\text{④}} := \frac{d\vec{OP}(\tau)}{d\tau} = \left( c \frac{dt(\tau)}{d\tau}, \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \frac{dy(\tau)}{d\tau}, \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right) \quad (7.1)$$

→  $\vec{v}_{\text{④}}$  は粒子の世界線に接する4次元ベクトル (下図)。

補足: 慣性系  $K$  が測る3次元速度  $\vec{v} = \left( \frac{dx(\tau(t))}{dt}, \frac{dy(\tau(t))}{dt}, \frac{dz(\tau(t))}{dt} \right)$

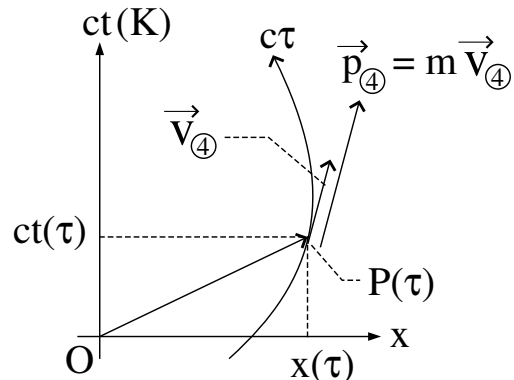
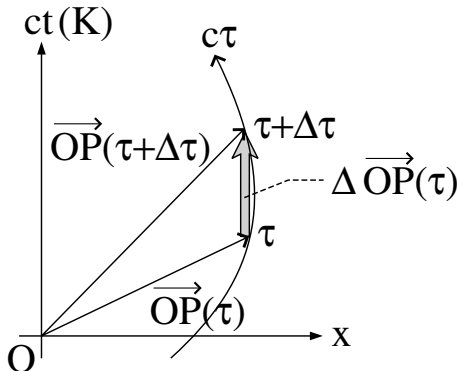
$$\rightarrow \frac{df(\tau(t))}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{df}{d\tau} = \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{df}{d\tau} \text{ より, 3次元速度 } \vec{v} = c \frac{[\vec{v}_{\text{④}} \text{の空間成分}]}{[\vec{v}_{\text{④}} \text{の時間成分}]}$$

- 4元運動量  $\vec{p}_{\text{④}}$  : 粒子の質量 (正確には静止質量) を  $m$  として,

$$\vec{p}_{\text{④}} := m \vec{v}_{\text{④}} = \left( mc \frac{dt(\tau)}{d\tau}, m \frac{dx(\tau)}{d\tau}, m \frac{dy(\tau)}{d\tau}, m \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right) \quad (7.2)$$

→  $\vec{p}_{\text{④}}$  の時間成分  $mc dt(\tau)/d\tau$  が, 次の §7.2 でみるように, エネルギーと結びつく!

補足: 速度の場合と同様に, 慣性系  $K$  が測る3次元運動量  $\vec{p} = c \frac{[\vec{p}_{\text{④}} \text{の空間成分}]}{[\vec{p}_{\text{④}} \text{の時間成分}]}$



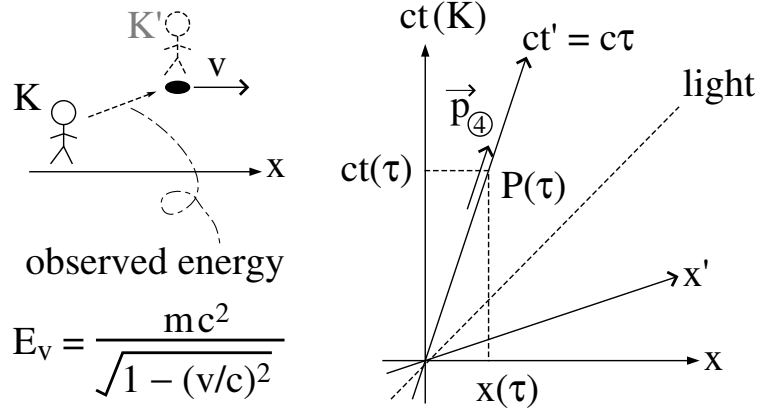
$$\vec{V}_{\text{④}} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \Delta \vec{OP}(\tau) = \frac{d\vec{OP}(\tau)}{d\tau}$$

## 7.2 質量エネルギー

状況設定：右図

簡単化して，粒子が慣性運動する場合

- ◇ 慣性系 K の座標： $(ct, x, y, z)$
- ◇ 観測者 K から見て，粒子は x 軸方向に 3 次元速度  $v$  で慣性運動
- ◇ 粒子に乗ってる（仮想的な）観測者 K' の座標： $(ct', x', y', z')$



$$E_v = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

### 4 元速度の成分

観測者 K' が測る時間が粒子の固有時間なので， $\tau = t'$

→ 固有時刻  $\tau$  に粒子が存在する事象 (= K' の位置)：

$$P(\tau) = \begin{cases} (ct(\tau), x(\tau), 0, 0) & : \text{慣性系 K から見た座標} \\ (c\tau, 0, 0, 0) & : \text{慣性系 K' から見た座標} \end{cases}$$

→ K' から見た K の速度が  $-v$  なので，ローレンツ変換 (5.2) より

$$\begin{cases} ct(\tau) = \gamma(c\tau + 0) = \gamma c\tau \\ x(\tau) = \gamma(v\tau + 0) = \gamma v\tau \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

→ よって，粒子の 4 元速度  $\vec{v}_{\text{④}}$  は：

$$\vec{v}_{\text{④}} = \begin{cases} (\gamma c, \gamma v, 0, 0) & : \text{慣性系 K から見た成分} \\ (c, 0, 0, 0) & : \text{慣性系 K' から見た成分} \end{cases} \quad (7.3)$$

### 4 元運動量の成分

$\vec{p}_{\text{④}}$  の定義 (7.2) と式 (7.3) より：

$$\vec{p}_{\text{④}} = m\vec{v}_{\text{④}} = \begin{cases} (mc\gamma, mv\gamma, 0, 0) & : \text{慣性系 K から見た成分} \\ (mc, 0, 0, 0) & : \text{慣性系 K' から見た成分} \end{cases} \quad (7.4)$$

ここで， $v < c$  であることを使ってテイラー展開（マクローリン展開）

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + O\left(\frac{v}{c}\right)^6$$

$$\rightarrow \text{時間成分は：} \begin{cases} \text{慣性系 K から見た } \vec{p}_{\text{④}} \text{ の時間成分} = mc + \frac{mc}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3mc}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + mcO\left(\frac{v}{c}\right)^6 \\ \text{慣性系 K' から見た } \vec{p}_{\text{④}} \text{ の時間成分} = mc \end{cases}$$

### 4 元運動量の時間成分とエネルギー

$$\text{以上より，「慣性系 K から見た } \vec{p}_{\text{④}} \text{ の時間成分」} = \frac{1}{c} \left[ mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + v^2 O\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]$$

→  $\left\{ \begin{array}{l} \text{極限 } v/c \rightarrow 0 \text{ でニュートン力学が成立すべき} \\ mv^2/2 \text{ はニュートン力学の運動エネルギー} \end{array} \right.$  であることから、次の関係を要求するのが妥当：

$$\underline{\text{「4元運動量 } \vec{p}_{(4)} \text{ の時間成分」} = \frac{1}{c} \times \text{「粒子の相対論的なエネルギー」}} \quad (7.5)$$

→ 右辺のエネルギーは「左辺の時間成分を計算する慣性観測者」が観測するエネルギーである。

◇ この §7.2 では慣性系 K も粒子も慣性運動している場合を考えているが、この関係 (7.5) は観測者も粒子も任意の運動をしている場合でも（一般相対論的な状況でも）正しいと考える。ただし、観測者に則したテトラッド基底で時間成分を計算しなければならず、その相対論的エネルギーは重力ポテンシャルも含んだものになる。

### 質量エネルギー

以上の式 (7.4) と (7.5) より：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{速度 } v \text{ で運動する粒子の相対論的エネルギー} : E_v = mc^2 \gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \text{静止した粒子の相対論的エネルギー} : E_0 = mc^2 \quad (\leftarrow \text{これを質量エネルギーと呼ぶ}) \end{array} \right. \quad (7.6)$$

## 8 特殊相対論の帰結 5：運動論的ドップラー効果

### 8.1 波源と波の進行方向が同じ場合

#### 状況設定

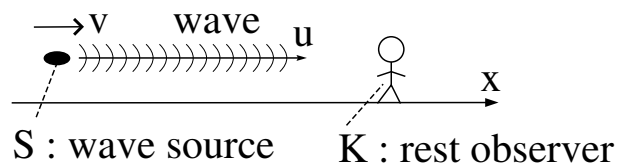
◇ 慣性系 K の x 軸方向に波源 S が速度 v で慣性運動。（y, z 座標は省略）

◇ 観測者 K も波源 S も x 軸上。

◇ 波源 S が x 軸の正方向にいる観測者 K に向かって単色波を放出。

◇ 慣性系 K で測る  $\left\{ \begin{array}{l} \text{位相速度} : u (\leq c) \text{ (波のほうが波源 S より速い } u > v \text{ とする)} \\ \text{周期} : T \\ \text{波長} : \lambda = uT \end{array} \right.$

◇ 波源 S の慣性系で測る  $\left\{ \begin{array}{l} \text{位相速度} : u' (\leq c) \\ \text{周期} : T' \\ \text{波長} : \lambda' = u'T' \end{array} \right.$

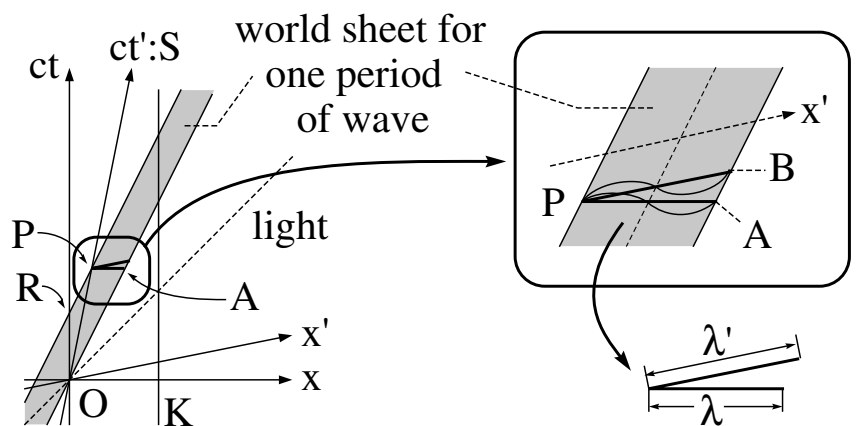


◇ 波源 S は原点 O から事象 P に運動する間に、一周期分の波を放出。

→ 右図の灰色領域がこの波の世界面

問題：観測者 K が測る量と波源 S で測る量の間関係式（変換則）を導く。

→ u と u' の関係は §6 の速度合成則  
波長 or 周期の変換則が問題！



運動論的ドップラー効果（波源と波の進行方向が同じ場合）

◇ 前ページの図より  $\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 K で測る波長} : \lambda = \overline{PA} \\ \text{波源 S で測る波長} : \lambda' = \overline{PB} \end{array} \right.$

→ 事象 P, A の座標を知れば 波長のドップラー効果が得られるだろう。

◇ 事象 P の  $\left\{ \begin{array}{l} \text{慣性系 K に見る座標} : (ct_p, x_p) \\ \text{波源 S から見る座標} : (cT', 0) \end{array} \right. \leftarrow \left[ \begin{array}{l} \text{一周期分の波動を考えている} \\ \text{事象 P は波源 S の世界線上} \end{array} \right. \text{に注意}$

→ ローレンツ変換 (5.1) の逆 (5.2) より： $\left\{ \begin{array}{l} ct_p = \gamma cT' \\ x_p = \gamma vT' \end{array} \right. , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

→ 前ページの図より，慣性系 K に見る事象 A の座標： $(ct_a, x_a)$  に対して  $\left\{ \begin{array}{l} ct_a = ct_p \\ ct_a = (c/u)x_a \text{ (K から見て位相速度 } u \text{ の世界線上)} \end{array} \right.$  なので， $\left\{ \begin{array}{l} ct_a = \gamma cT' \\ x_a = \gamma uT' \end{array} \right.$

◇ 以上より，慣性系 K で測る波長： $\lambda = x_a - x_p = \gamma(u-v)T' = \gamma(u-v)\frac{\lambda'}{u'}$

→ 速度合成則 (6.3) から  $u' = \frac{u-v}{1-(uv/c^2)}$  なので（波源 S から見た K の速度は  $-v$  に注意）

$$\underline{\text{波長のドップラー効果} : \lambda = \gamma(u-v)T' = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\lambda'} \tag{8.1a}$$

→ この左辺を周期に読み換えて ( $\lambda = uT$ )

$$\underline{\text{周期のドップラー効果} : T = \gamma\frac{u-v}{u}T'} \tag{8.1b}$$

→ 逆数をとって周波数で表して ( $f = 1/T, f' = 1/T'$ )

$$\underline{\text{周波数のドップラー効果} : f = \frac{1}{\gamma}\frac{u}{u-v}f'} \tag{8.1c}$$

補足：前ページの図中での周期の読み取り方： $\left\{ \begin{array}{l} T : \text{慣性系 K で測る 事象 R の時間座標 } ct_r = T \\ T' : \text{波源 S で測る 事象 P の時間座標 } ct'_p = T' \end{array} \right.$

◇ 以上の計算は光速の波動でも成立 →  $u = c$  とすればよい。

## 8.2 波源と波の進行方向が異なる場合

状況設定

◇ 慣性系 K から見た波源 S の 3 次元速度  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

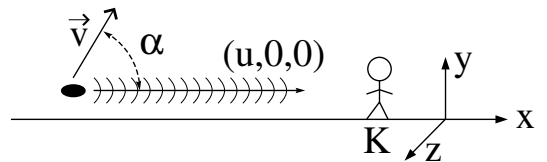
◇ 「波動を放出した瞬間の波源 S の位置」と「観測者 K の位置」を結ぶ方向に  $x$  軸をとる。

→ 観測者 K で測定する波動は  $x$  軸に沿って伝搬してくる。

→ 測定する波の位相速度の 3 次元ベクトル  $(u, 0, 0)$

◇ 波動の量 ( $u, T, \lambda = uT, u', T', \lambda' = u'T'$ ) は §8.1 と同じ。

→ 波源 S の速度の向きを任意にした場合の，ドップラー効果 (8.1a), (8.1b), (8.1c) への修正を求める。



運動論的ドップラー効果（波源と波の進行方向が異なる場合）

◇ 波源 S と観測者 K の間の相対速度の  $x$  成分（S から K に向かう方向の成分）でドップラー効果は決まる。

→  $v_x$  がドップラー効果 (8.1) のどこに現れるべきか、が分かれば良い。

◇ §5.6 の一般的な設定のローレンツ変換 (5.11)（と §8.1 の事象 P の座標の計算）から、

ドップラー効果 (8.1) の中の  $\begin{cases} \gamma \text{ の速度は大きさ } |\vec{v}| \\ \gamma \text{ の他の } v \text{ は速度の } x \text{ 成分} \end{cases}$  だと分かる。

→ 以上より、波源と波の進行方向が異なる場合のドップラー効果は：

$$\begin{cases} \text{波長} & : \lambda = \gamma(u - v_x)T' = \gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)\lambda' \\ \text{周期} & : T = \gamma\frac{u - v_x}{u}T' \\ \text{周波数} & : f = \frac{1}{\gamma}\frac{u}{u - v_x}f' \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} \quad (8.2)$$

波源 S の速度  $\vec{v}$  と  $x$  軸との間の角を  $\alpha$  とすると、 $v_x = v \cos \alpha$  である。

◇ 以上の計算は光速の波動でも成立 →  $u = c$  とすればよい。

## 9 特殊相対論の帰結 6：超光速移動とタイムマシーン

§6.4 の『光速を超えられない定理』から、超光速で移動することは不可能と考えられるが、仮に超光速を認めると、どんな困難が生じるのか？ を確かめる。相対論的な現象の理解の助けになるかもしれない。

状況設定

◇ 慣性系 K の  $x$  軸方向に、慣性系 K' が速度  $v (< c)$  で慣性運動

◇ 座標形  $\begin{cases} \text{慣性系 K} : (ct, x) & (y, z \text{ 座標は省略}) \\ \text{慣性系 K}' : (ct', x') \end{cases}$

◇ 慣性系 K から見て物体 A が超光速  $V_A > c$  で運動。

→  $V_A$  は A の世界線が  $x$  軸と  $x'$  軸の間にくるような速度だとする。

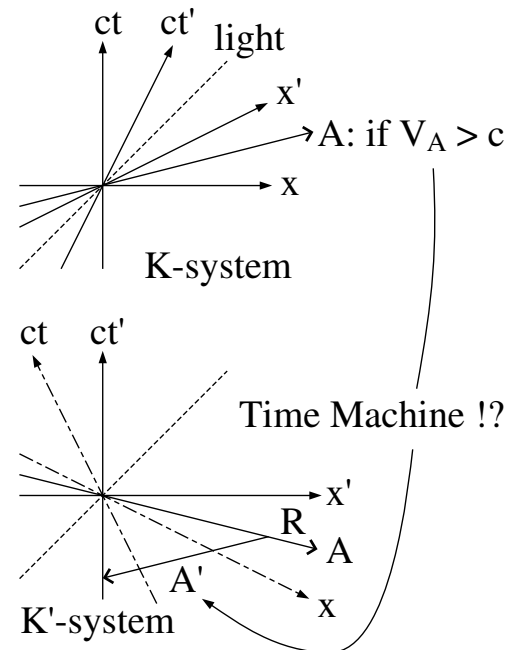
タイムマシーン !?

物体 A の世界線を  $\begin{cases} \text{K の時空図で描くと A は未来へ進む} \\ \rightarrow \text{右上図の上側の状況} \\ \text{K' の時空図で描くと A は過去へ進む} \rightarrow \text{右上図の下側の状況} \end{cases}$

→ 物体 A を事象 R で  $x'$  軸に垂直向きに反射させると、K' から見て物体 A によって過去へ信号を送れる !?

→ 超光速を認めると、このような意味で「タイムマシーン」が可能だと考えられる。

しかし、§6.4 の『光速を超えられない定理』により、光速以下の速度合成を考える限り（そして相対論が正しい限り）超光速は実現不可能なので（上の意味の）タイムマシーンは不可能だと言える。



## 10 特殊相対論の限界：双子のパラドックス

特殊相対論だけで考えると、以下のような矛盾が生じる。  
この矛盾は『双子のパラドックス』と呼ばれる、特殊相対論だけで考えた場合に生じる問題である。  
(一般相対論で解決される。)

状況設定

◇ 慣性系 K の x 軸方向に、慣性系 K' が速度  $v$  で慣性運動。

$$\dots \begin{cases} \text{K が測る座標} : (ct, x) \\ \text{K' が測る座標} : (ct', x') \end{cases} \quad (y, z \text{ は省略})$$

→ §4.2 より：  

$$\begin{cases} \text{K から見た K' の時計は、K の時計より遅く進んでいるように見える。} \\ \text{K' から見た K の時計は、K' の時計より遅く進んでいるように見える。} \end{cases}$$

→ 互いに『相手の時計が遅れている』という観測結果

◇ 観測者 K' が途中で折り返して、K から測った速度  $-v$  で、K のところに戻ってくる。

問題：途中で K' が折り返して K のところに戻ってきたとき、どちらの時計が示す時刻のほうがが進んでいるか？

→ この問題を特殊相対論だけで考えると、以下のように矛盾した答えになってしまう。

特殊相対論だけで答えてみる …

まず状況は：  

$$\begin{cases} \diamond \text{観測者 K' は、出発する事象 O では観測者 K と同じ位置にいる。} \\ \diamond \text{観測者 K' は事象 O から出発し、折り返して、事象 I で再び観測者 K と再会する。} \\ \quad (\text{「行き」に要する時間と「帰り」に要する時間は等しい。}) \end{cases}$$

[考察 A] 上図の上側)：観測者 K から見た時空図

→ 観測者 K から見て、観測者 K' は事象 P で折り返して戻ってくる。

→ この時空図より  $(ct_p =) \underline{\alpha < \beta} (= ct_r)$

→ 再会する事象 I において、観測者 K の時計 ( $ct_i = 2\beta$ ) は K' の時計 ( $ct'_i = 2\alpha$ ) より進んでいる。

[考察 B] 上図の下側)：観測者 K' から見た時空図

→ 観測者 K' から見て、観測者 K は事象 Q で折り返して K' の所に戻ってくるように見える。

→ この時空図より  $(ct_p =) \underline{\alpha > \delta} (= ct_q)$

→ 再会する事象 I において、観測者 K の時計 ( $ct_i = 2\delta$ ) は K' の時計 ( $ct'_i = 2\alpha$ ) より遅れている。

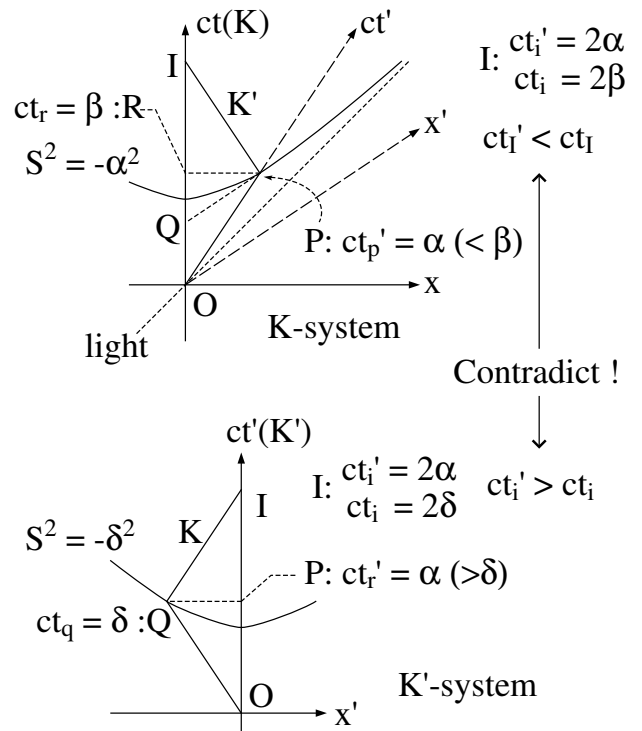
→ 考察 A と考察 B の結果が矛盾してしまう！(どちらも特殊相対論的には間違っていないが …)

本当はどうかの？

ポイント：観測者 K' が折り返すとき、K' の速度は変化する。つまり K' は加速運動をする！

→ 加速運動している K' の時計が遅くなることが、一般相対性理論から分かる。

→ 上の問題には、特殊相対論では答えられず、一般相対論を使って初めて答えられる。



# 11 相対論の基礎的な数学テクニック：ベクトルとテンソル

## 11.1 ベクトルと座標：座標不変性という概念

### §11.1 の目的

必ずしも相対論に限らず、割と一般的（な幾何学的）に「ベクトル」と「座標」の概念を整理する。その上で、ベクトルは「座標とは無関係に存在する」という意味で「不変的な存在」であることをまとめる。

「座標不変性」のための準備 1：ベクトルと接空間（2次元面上のベクトルで考える）

→ ベクトルはある曲線の接線として定義できる（これは任意の次元で言える）。

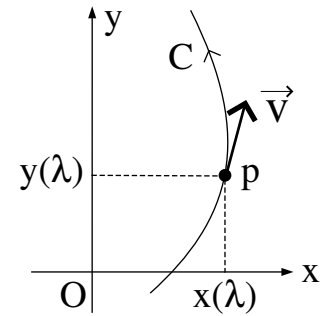
◇ 右図：曲がっていない平面上の例

曲線  $C$  上の点の  $(x, y)$  座標が、パラメータ  $\lambda$  で  $(x(\lambda), y(\lambda))$  と表示できるとき、

$$\text{曲線 } C \text{ の接ベクトル： } \vec{v} = \left( \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dy(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

→ 図的には右図のように描ける（§7.1 で 4 元速度を考えたときと同じ）。

→ 図的には、 $\vec{v}$  を表す矢印を、曲線  $C$  が乗っている平面上に乗せて描くことができる。



Vector on a flat Plane

補足：ローレンツ時空上の物体の 4 元速度に対しては、物体の固有時間がパラメータ  $\lambda$ 、物体の世界線が曲線  $C$  に対応する。

◇ 下図：曲面上の例

任意の  $(x, y)$  座標（直交座標でなくてもよい）、曲線  $C$ 、パラメータ  $\lambda$  を決めると、平面上の場合と同様に、

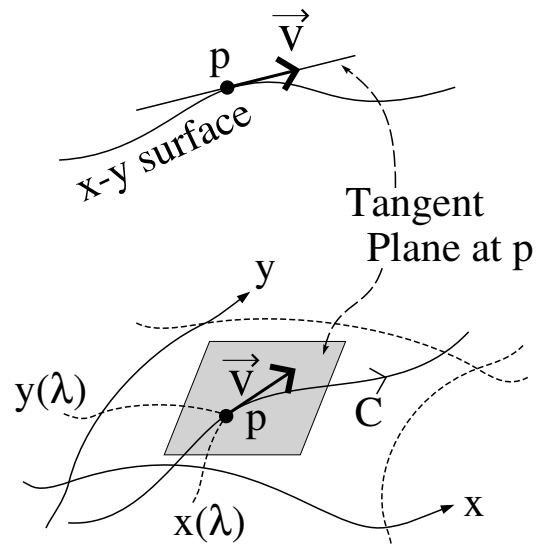
$$\text{曲線 } C \text{ の接ベクトル： } \vec{v} = \left( \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dy(\lambda)}{d\lambda} \right) \quad (11.1)$$

→ 図的には、 $\vec{v}$  を表す矢印を、曲線  $C$  が乗っている曲面上に乗せて描くことはしない。

→ 「 $\vec{v}$  を考える点  $p$  での接平面（Tangent Plane）」を用意して、その接平面上に  $\vec{v}$  を表す矢印が乗る。

→ ベクトルは曲面に張り付いて横たわる矢印ではなく、「基となる曲線が乗る曲面」の「接平面」の上に乗る矢印である。（平面上の例は「基の平面」と「接平面」が重なる場合。）

→ 相対論では 4 次元時空の各事象ごとに、付随する「4 次元接空間」を想定して、そこにベクトルが乗っていると考える。



Vector on a Curved Surface

数学的補足：幾何学的には、「点  $p$  における接平面（任意の次元では「接空間」と呼ぶ）」は、点  $p$  を通るあらゆる曲線の接ベクトルで構成する「ベクトル空間」と同一視される。

よく知っている方へ：

まだメトリックも導入してないのに（多様体も定義してないけど）曲がってるとか平坦とかは言えないだろう、という突っ込みがありますね。すみません。  
「連続的で形の決まった空間がある」という前提で話を進めさせて下さい。

「座標不変性」のための準備 2：能動的変換と受動的変換

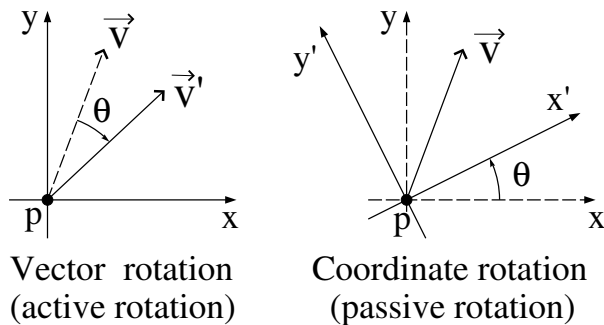
→ 幾何学的には、「ベクトルの変換」と「座標の変換」が考えられる。

この2つの変換を、ある点  $p$  において考える。回転変換を例に、平面上の場合と曲面上の場合で比較する。

◇ 右図：曲がっていない平面上の例

平面上の場合なので、「ベクトルの基となる曲線が乗る平面」と「接平面」を同一視しても問題ない。

- 図の左側：
  - ベクトルを角  $\theta$  だけ右回転（ベクトル変換の例）
  - このようにベクトルそのものを変換することを能動的変換 active transformation と呼ぶ。
- 図の右側：
  - 座標軸を角  $\theta$  だけ左回転（座標変換の例）
  - このようにベクトルでなく座標を変換することを受動的変換 passive transformation と呼ぶ。



No difference on the flat Plane

→ 平面上では、能動的変換と受動的変換は区別がつかない。

◇ 下図：曲面上の例

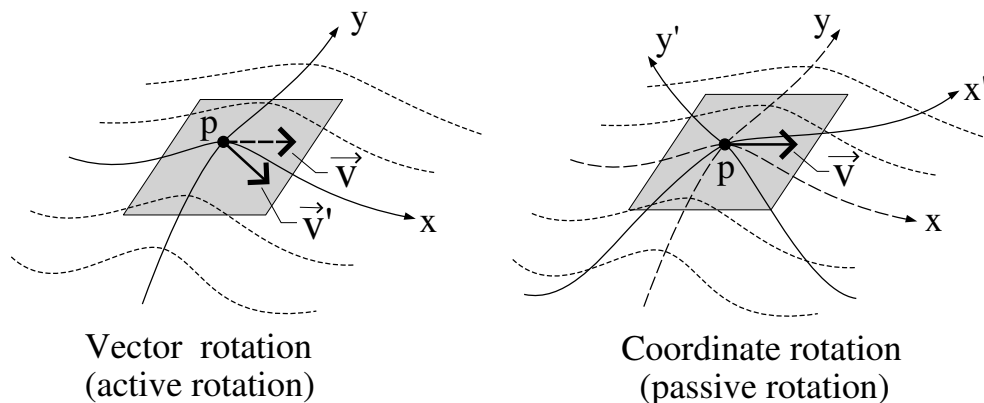
「ベクトルの基となる曲線がのる曲面」と「接平面」を区別して考える。

- 図の左側：能動的変換は接平面の中でのベクトルの変換（今の例では回転）である。ベクトルの変換に応じて、曲面上の「ベクトルの基となる曲線」も変換される。しかし、曲面上の「座標メッシュ」は変わらない。
- 図の右側：受動的変換は曲面上の座標メッシュの切り方の変換（今の例では曲面上での回転）である。接平面の中身は変えない。曲面上の「ベクトルの基となる曲線」も変えない。

→ 曲面上のベクトルでは明らかに、能動的変換と受動的変換は異なる。

- 能動的変換では、ベクトルと曲面の間の「相対的な位置関係（幾何学的な設定）」が変わる。
- 受動的変換では、ベクトルと曲面の間の「相対的な位置関係（幾何学的な設定）」は変化しない。

◇ 物理でよく使う「座標変換」とは「受動的変換」のこと。物理的には、座標変換は観測者の変換に対応する。（ニュートン力学のガリレイ変換も、特殊相対論のローレンツ変換も、受動的変換としての座標変換である。）



These are different on the Curved Surface !



ベクトルの「座標不変性」

受動的変換（座標変換）ではベクトルと曲面の間の「相対的な位置関係（幾何学的な設定）」は何も変化しないことが分かった。

→ このように「座標変換をしても変わらないこと」を「座標不変」と呼ぶ。

→ 座標変換をしても接平面の中でベクトルは変化しない。ベクトルは座標のとり方とは無関係に存在する。この事実を「ベクトルは座標不変な量である」と言い表す。

注意：ベクトルを座標成分で表す場合

$$\text{前ページの2次元ベクトル } \vec{v} = \begin{cases} (v_x, v_y) & : x\text{-}y \text{ 座標での成分} \\ (v'_x, v'_y) & : x'\text{-}y' \text{ 座標での成分} \end{cases}$$

→ 接平面の中のベクトルと曲面（平面）の相対的な位置関係（幾何学的な設定）は変わっていないが、座標成分の値は（座標メッシュの変化に応じて）変化する。

→ 座標成分の変化という「見かけの変化」を、幾何学的な設定の変更だと勘違いしないように注意！

補足：特殊相対論を扱う限りは、ベクトルの座標不変性を明確に認識しなくても正しい計算結果を得られることは多い。実際 §10 までは、ベクトルの座標不変性という幾何学的な概念を表に出さず（密かに使った部分もあるが）特殊相対論の主要な帰結を導いてきた。それが出来たのは、ミンコフスキー時空が平坦な時空だからである（「曲率」を適切に定義して、曲率がゼロだと分かる）。しかし、一般相対論で曲がった時空を扱うときは、ベクトルの座標不変性を認識しないと、様々な誤解や計算ミスがおきる。

11.2 ベクトルの「見かけの変化」：座標変換に伴うベクトル成分の変換則

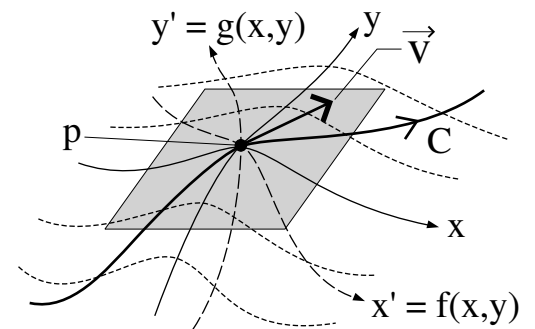
§11.2 の目的

§11.1 で分かった重要な点：

- ◇ ベクトルは座標不変な量である。
- ◇ 座標変換に伴う成分の変化は「見かけの変化」であり、幾何学的な設定の変更ではない。

→ ベクトルの成分の「座標変換に伴う見かけの変化」を知っておくことも重要だと分かる。

→ この §11.2 では（§11.1 と同様に）必ずしも相対論に限らず割と一般的（な幾何学的）に、座標変換に伴う成分の変換規則をまとめる。



Coordinate Transformation (passive transformation)

状況設定（幾何学的な設定）：右図

- ◇ §11.1 で考えた2次元曲面を考える。
- ◇ 座標系  $(x, y)$  と座標系  $(x', y')$  の間の関係：

$$\text{一般的な座標変換：} \begin{cases} x' = x'(x, y) \\ y' = y'(x, y) \end{cases} \quad (x', y' \text{ は別の座標系 } (x, y) \text{ に応じて決まる関数とみなす}) \quad (11.2)$$

- ◇ ベクトルの幾何学的な設定：
  - $\vec{v}$  : ある点 p におけるベクトル
  - C :  $\vec{v}$  の基となる曲線
  - $\lambda$  : 曲線 C のパラメータ

座標変換に伴うベクトルの成分の変換則

§11.1でのベクトルの構成法(式(11.1)参照)より, 曲線Cの「パラメータ表示」が決まればベクトルの成分を計算できる。

◇ 座標系  $(x, y)$  での「曲線Cのパラメータ表示」:  $(x(\lambda), y(\lambda))$

→ 座標変換(11.2)より, 座標系  $(x', y')$  での「曲線Cのパラメータ表示」は,

$$(x'(\lambda), y'(\lambda)) := (x'(x(\lambda), y(\lambda)), y'(x(\lambda), y(\lambda))) \quad (11.3)$$

◇ ベクトル  $\vec{v}$  の成分を式(11.1)から計算:

$$\vec{v} = \begin{cases} (v_x, v_y) = \left( \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dy(\lambda)}{d\lambda} \right) & : (x, y) \text{ 座標系での成分} \\ (v'_x, v'_y) = \left( \frac{dx'(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dy'(\lambda)}{d\lambda} \right) & : (x', y') \text{ 座標系での成分} \end{cases} \quad (11.4)$$

ここで式(11.3)より(微分のライプニッツ則を使って),

$$\frac{dx'(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial x'(x, y)}{\partial x} \Big|_{\text{at } C} + \frac{dy(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial x'(x, y)}{\partial y} \Big|_{\text{at } C} \quad (11.5a)$$

$$\frac{dy'(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial y'(x, y)}{\partial x} \Big|_{\text{at } C} + \frac{dy(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial y'(x, y)}{\partial y} \Big|_{\text{at } C} \quad (11.5b)$$

ただし,  $\partial x'(x, y)/\partial x|_{\text{at } C}$  は,  $x'(x, y)$  を  $x$  で偏微分してから  $x = x(\lambda), y = y(\lambda)$  を代入する, という意味。

よって, 座標変換に伴うベクトル成分の変換則が次のようにまとまる:

$$\text{ベクトル成分の変換則: } \vec{v} = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \text{ただし, 変換行列 } \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix}_{\text{at } C} \quad (11.6)$$

これでベクトル  $\vec{v}$  の『 $x$ - $y$  座標成分  $(v_x, v_y)$ 』と『 $x'$ - $y'$  座標成分  $(v'_x, v'_y)$ 』の関係が分かる。

注意1: 式(11.6)の第2, 3式は共に, ベクトル  $\vec{v}$  の「 $(x', y')$  座標系での成分」を書いている。2つ目の等号は「 $(x', y')$  座標系での成分  $(v'_x, v'_y)$ 」を, 式(11.5)を使って書き換えただけ。(それが「成分の変換則」。)

注意2: 式(11.6)から「 $(x', y')$  座標系での成分  $(v'_x, v'_y)$ 」と「 $(x, y)$  座標系での成分  $(v_x, v_y)$ 」の値は(変換行列  $\Lambda$  の分だけ)異なることが分かる。しかし, これは「見かけの変化」であり, ベクトル自身(曲面とベクトルの相対的な関係という意味での「幾何学的な設定」)は何も変化していない。

補足: 以上は2次元曲面上で考えた。しかし, 任意の  $n$  次元の「曲がった空間(時空)」でも, 式(11.6)と全く同様にベクトル成分の変換則が計算できる。次のように, ベクトルの成分が  $n$  個, 変換行列が  $n \times n$  行列になる。(曲がった高次元空間を想像するのは難しいが, ベクトル成分の変換はこの式で代数的に行える。)

$$\text{曲がった } n \text{ 次元時空での変換則: } \vec{v} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x'_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\text{at } C} \quad (11.7)$$

## 11.3 ミンコフスキー時空の座標変換としてのローレンツ変換（速度合成則とドップラー効果の再導出）

### §11.3 の目的

これまでベクトルという概念の基本的な性質をまとめてきた。ベクトルを利用してテンソルが定義できる。この節では、テンソルを扱う前の準備と練習問題という位置づけで、次の3つを行う。

- ◇ 特殊相対論で重要なベクトルを、「ミンコフスキー時空上の座標不変な4次元ベクトル」として整理。
- ◇ ローレンツ変換をミンコフスキー時空の座標変換（受動的変換）とみなして、4次元ベクトルの座標成分の変化を整理。
- ◇ 4元ベクトルのローレンツ変換を使って、速度合成則とドップラー効果を再導出（数学的にキレイに導出）。

特殊相対論の4元ベクトル：4元速度，4元運動量，4元加速度，4元運動方程式，4元波数ベクトル

4元ベクトルのローレンツ変換

速度合成則の再導出

ドップラー効果の再導出

## 11.4 テンソルの定義と基本性質

### §11.4 の目的

ベクトルを利用してテンソルを定義する。この節でまとめるように、テンソルは『いくつかの異なった「方向」に依存する物理量』を記述する上で便利な数学的道具である。また、ベクトルを利用した定義から、テンソルも座標不変な量であることが分かる。幾何学的な「言葉」では、物理量は何らかの座標不変な量（テンソル）と関係が付けられる。

「方向」を持つ物理量と持たない物理量：温度，速度，応力

テンソルの定義：ベクトルを変数として持つ関数

テンソルの基本性質

テンソルの座標不変性

座標変換に伴うテンソル成分の変換則

## 11.5 テンソルの例：計量テンソル，エネルギー運動量テンソル

### §11.5 の目的

相対論を扱う上で必ず必要になる『計量テンソル』と『エネルギー運動量テンソル』をまとめる。

ベクトルの内積と計量テンソル

エネルギー運動量テンソル

## 11.6 テンソルの成分と変換則を扱う上での便利な書き方：「添え字」と「アインシュタインの縮約」

### §11.6 の目的

テンソル計算の見通しを付けるのに役立つ『記述方法』をまとめる。テンソルの便利な記述方法は何種類かあ

るが（添え字記法，抽象添え字記法，「スロット」記法などと呼べるもの），この節では多くの相対論屋が使っている『添え字記法』をまとめる。

時空の座標とテンソル成分の記述：添え字記法

テンソルの作用とアインシュタインの縮約

添え字とアインシュタインの縮約による「テンソル成分の変換則」の表現：計算上の利便性

## A ローレンツ変換の補足

### A.1 ローレンツ変換の別証明：代数的な方法

§5.2 では，慣性系の世界線を表す「直線」と4次元距離の不変性だけを利用して，初等幾何だけでローレンツ変換を導出した。この付録では，少し複雑かもしれないが（いくつかのテキストで見られる）代数的な方法によるローレンツ変換 (5.1) の証明をまとめる。

状況設定： §5.1 と同じ。

何を考えるか？（証明の方針）

知っていること：慣性系（速度  $v$ ）によって同時刻の空間が違う。

→ 速度  $v$  によって，その慣性系で測る『事象の座標』が決まる。

→ 速度  $v$  によって『異なる慣性系で測る座標値間の関係』が決まる。

→ 慣性系  $K'$  の速度  $v$  を決めれば，任意の事象  $E$  の座標値について次の関係式を満たすような  $a(v)$  ,  $b(v)$  ,  $f(v)$  ,  $g(v)$  が決まるはず（ローレンツ変換の ansatz … 作業仮説）

$$ct'_e = a(v) ct_e + b(v) x_e \quad (\text{A.1a})$$

$$x'_e = f(v) ct_e + g(v) x_e \quad (\text{A.1b})$$

→ 上手く計算を工夫して  $a(v)$  ,  $b(v)$  ,  $f(v)$  ,  $g(v)$  を導き，式 (A.1) が式 (5.1) になることを示せばよい。

（  $a(v)$  ,  $b(v)$  ,  $f(v)$  ,  $g(v)$  が一意的に決まらない場合は，この作業仮説が間違っていたということ。

その場合は考え直さないとはいけませんが，以下の計算で式 (A.1) という仮説は正しいことが分かる。）

ローレンツ変換を導く準備（既に分かっていることのまとめ）

◇ 時空図の原点と事象  $E$  の間の4次元距離（の2乗）は，どの慣性系で測っても同じ値（§2.2）

$$-(ct_e)^2 + x_e^2 = -(ct'_e)^2 + x'^2_e \quad (s_e^2 = s'^2_e) \quad (\text{A.2})$$

◇ 重要な世界線を表す方程式：

（  $ct$ - $x$  時空図の中 ） , (  $ct'$ - $x'$  時空図の中 )

$$ct' \text{ 軸の方程式： } ct = (c/v)x \quad , \quad x' = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$x' \text{ 軸の方程式： } ct = (v/c)x \quad , \quad ct' = 0 \quad (\text{A.3b})$$

$$\text{光の世界線の方程式： } ct = x \quad , \quad ct' = x' \quad (\text{A.3c})$$

ローレンツ変換 (5.1) の導出

式 (A.1) は『任意の』事象  $E$  に対して考えるので，事象  $E$  が偶然  $ct'$  軸上にある場合 や，偶然  $x'$  軸上にある場合，また偶然に 光の世界線上にある場合，でも成立しなければならない。これを考慮して，ローレンツ変換の導出を次の5段階に分けて行う。

第1段階：事象 E が  $ct'$  軸上にある場合

$$\text{式 (A.3a)} : \begin{cases} ct'_e = \frac{c}{v} x_e \rightarrow \text{式 (A.1b) より} \\ x'_e = 0 \end{cases} \quad \underline{x'_e = \left[ \frac{c}{v} f(v) + g(v) \right] x_e} \quad \text{よって, } f(v) = -\frac{v}{c} g(v) \quad (\text{A.4})$$

第2段階：事象 E が  $x'$  軸上にある場合

$$\text{式 (A.3b)} : \begin{cases} ct'_e = \frac{v}{c} x_e \rightarrow \text{式 (A.1a) より} \\ ct'_e = 0 \end{cases} \quad \underline{ct'_e = \left[ \frac{v}{c} a(v) + b(v) \right] x_e} \quad \text{よって, } b(v) = -\frac{v}{c} a(v) \quad (\text{A.5})$$

第3段階：事象 E が光の世界線上にある場合

$$\text{式 (A.3c)} : \begin{cases} ct'_e = x_e \rightarrow \text{式 (A.1) より} \\ ct'_e = x'_e \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{l} ct'_e = [a(v) + b(v)] x_e \\ x'_e = [f(v) + g(v)] x_e \end{array} \right] \quad \text{よって } a(v) + b(v) = f(v) + g(v)$$

$$\text{したがって, 式 (A.4), (A.5) より } \left(1 - \frac{v}{c}\right) a(v) = \left(1 - \frac{v}{c}\right) g(v) \quad \text{なので, } a(v) = g(v) \quad (\text{A.6})$$

第4段階：以上をまとめると...

式 (A.1) の右辺に, 式 (A.4), (A.5), (A.6) を代入:

$$\begin{cases} ct'_e = a(v) \left( ct_e - \frac{v}{c} x_e \right) \\ x'_e = g(v) \left( -\frac{v}{c} ct_e + x_e \right) = a(v) \left( -\frac{v}{c} ct_e + x_e \right) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

→あとは  $a(v)$  を求めればよいことが分かる。

$$\text{式 (A.2) の右辺に式 (A.7) を代入してまとめると: } -(ct_e)^2 + x_e^2 = a(v)^2 \left[ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] (-(ct_e)^2 + x_e^2)$$

$$\text{よって, } a(v)^2 \left[ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] = 1 \quad \text{なので, } a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{or} \quad -\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (\text{A.8})$$

第5段階： $a(v)$  の符号の決定

ローレンツ変換は, 慣性系  $K'$  の速度がゼロ ( $v = 0$ ) の場合は,  $ct' = ct, x' = x$ , でなければならない。

→  $v = 0$  のとき, 式 (A.1a) は  $ct'_e = ct_e$ , つまり  $a(0) = 1 \geq 0$ ,  $b(0) = 0$  でなければならない。

→ 式 (A.8) の2つの可能性のうち, この条件を満たす  $a(v)$  は,  $a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$  である。

→ この  $a(v)$  を式 (A.7) に代入すると, ローレンツ変換 (5.1) を得る。

(  $a(v), b(v), f(v), g(v)$  が一意的に決まったので, 作業仮説 (A.1) が正しかったと言える。)

以上で、『特殊相対論では, 観測者の座標変換はローレンツ変換で与えられる』ことが証明できた。[証明終]

## A.2 虚時間と Imaginary Rapidity で表すローレンツ変換

ローレンツ変換を §5.5 の Rapidity で表すと (式 (5.5) 参照), 回転変換との類似性を感じさせる。そこで, この §A.2 では, ローレンツ変換を「無理矢理」に回転変換と見なすような数学的テクニックをまとめる。

状況設定: §5.1 と同じ。

◇ 慣性系  $K$  の  $x$  軸方向に, 慣性系  $K'$  が3次元速度  $v$  で慣性運動。

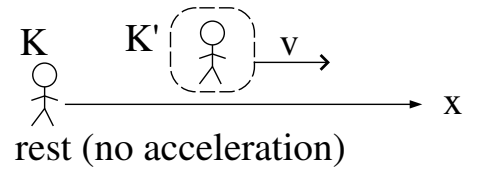
→ K' の Rapidity を  $\psi$  として,  $v = c \tanh \psi$  (式 (5.5) 参照)

- ◇ 慣性系 K で測る座標 :  $(ct, x)$
- ◇ 慣性系 K' で測る座標 :  $(ct', x')$

→  $y' = y, z' = z$  なので,  $y-z$  成分は省略。

- ◇  $ct-x$  座標と  $ct'-x'$  座標の間の変換はローレンツ変換 (5.1)

→ Rapidity  $\psi$  を使って表すローレンツ変換は式 (5.4)



### 虚時間 (Imaginary Time) と Imaginary Rapidity

Rapidity によるローレンツ変換 (5.4) を回転変換と同じ形式するために次のものを定義 :

- ◇ 虚時間 (Imaginary Time) :  $\begin{cases} t \text{ を純虚数に「拡張 (or 変更)」し, その虚部 } \tau := -it \\ t' \text{ を純虚数に「拡張 (or 変更)」し, その虚部 } \tau' := -it' \end{cases} \quad (i = \sqrt{-1})$

→ 4次元距離  $s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (c\tau)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$

→ 虚時間  $t = i\tau$  の基で, ローレンツ時空は, 座標  $(c\tau, x)$  で張られる想像上のユークリッド空間だと見なせる。

→ 想像上のユークリッド空間で「ローレンツ変換」をすると  $(c\tau', x')$  になる。

→ その「ローレンツ変換」は, 次の Imaginary Rapidity を使うと, 想像上のユークリッド空間の回転変換として表せる。

- ◇ Imaginary Rapidity :  $\psi$  を純虚数に「拡張 (or 変更)」し, その虚部  $\zeta := -i\psi$

→  $\begin{cases} 2 \sinh \psi = e^{i\zeta} - e^{-i\zeta} = 2i \sin \zeta \\ 2 \cosh \psi = e^{i\zeta} + e^{-i\zeta} = 2 \cos \zeta \end{cases}$  を Rapidity で表すローレンツ変換 (5.4) に代入して,

$$\text{想像上のユークリッド空間での座標変換 : } \begin{cases} c\tau' = c\tau \cos \zeta - x \sin \zeta \\ x' = c\tau \sin \zeta + x \cos \zeta \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

→ これは, 下図のような想像上のユークリッド空間での角  $\zeta$  の回転変換である。

