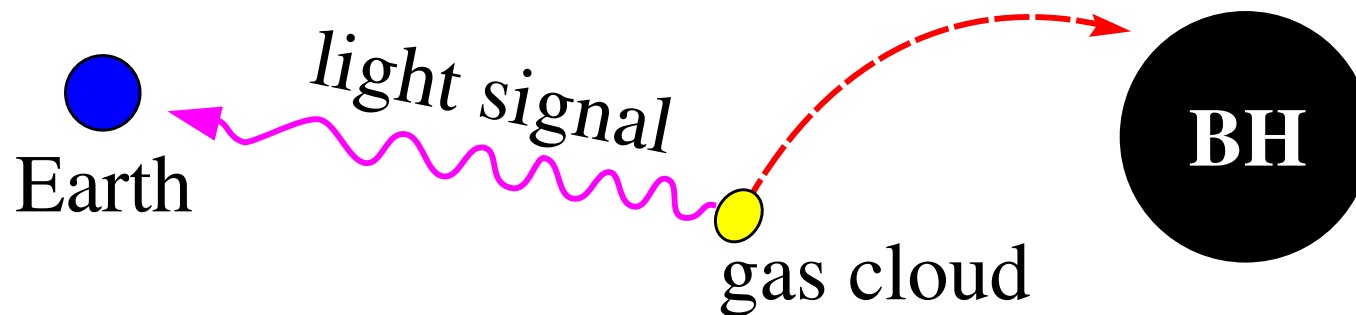


一人時間差干渉

Time Delay Self-interferometry (TDS)

Schwarzschild BH の場合：その1 (進捗報告)

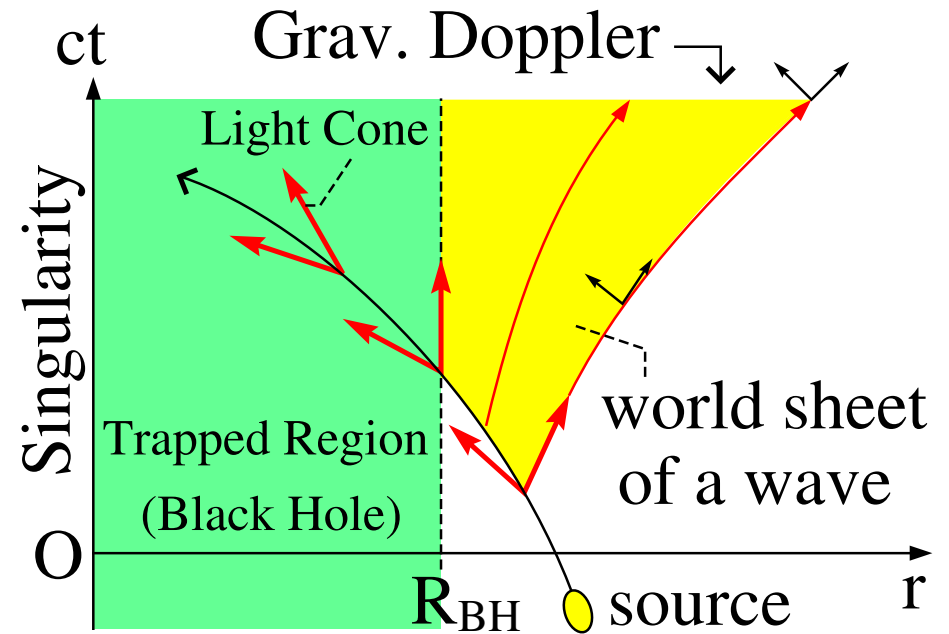
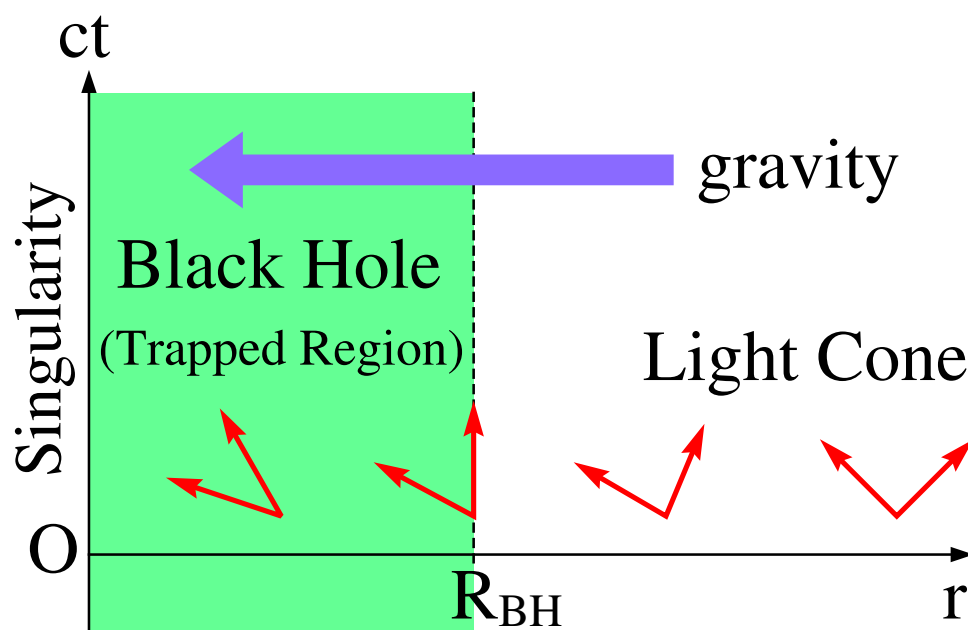
齊田浩見 (大同大学) / saida@daido-it.ac.jp



1. ニュートン力学では理解できないBHを「見る」ための戦略

- そもそも「極端に曲がった時空」であるBHを見るとは...

- 定性的：
曲がった時空の効果の観測でBH地平面の存在を確認すること
- 定量的：
曲がった時空の効果から質量・角運動量（・電荷）を測ること



- どんな「曲がった時空の効果」を狙うか？

- 強い重力レンズ効果 **Strong Gravitational Lensing (SGL)** に注目

- ◇ SGLの空間的情報 — 見た目の画像

- BHシャドー

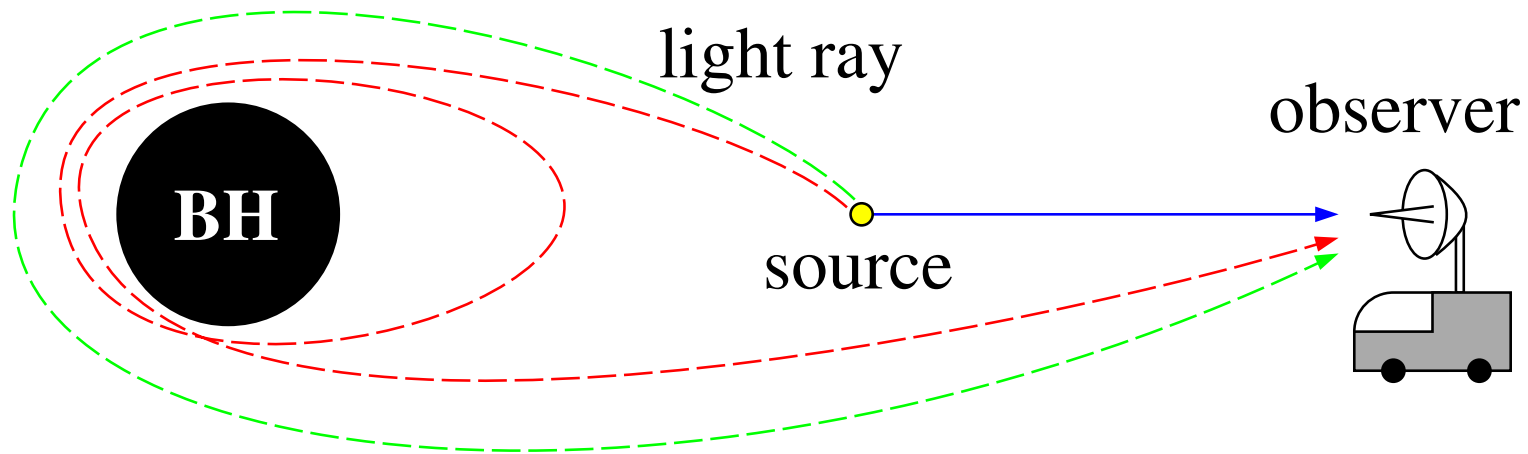
- ◇ SGLの時間的情報 — 電波の時間的な振動パターン

- **一人時間差干渉 Time Delay Self-interferometry**

2. 一人時間差干渉で可能な「BHの測り方」: 概要

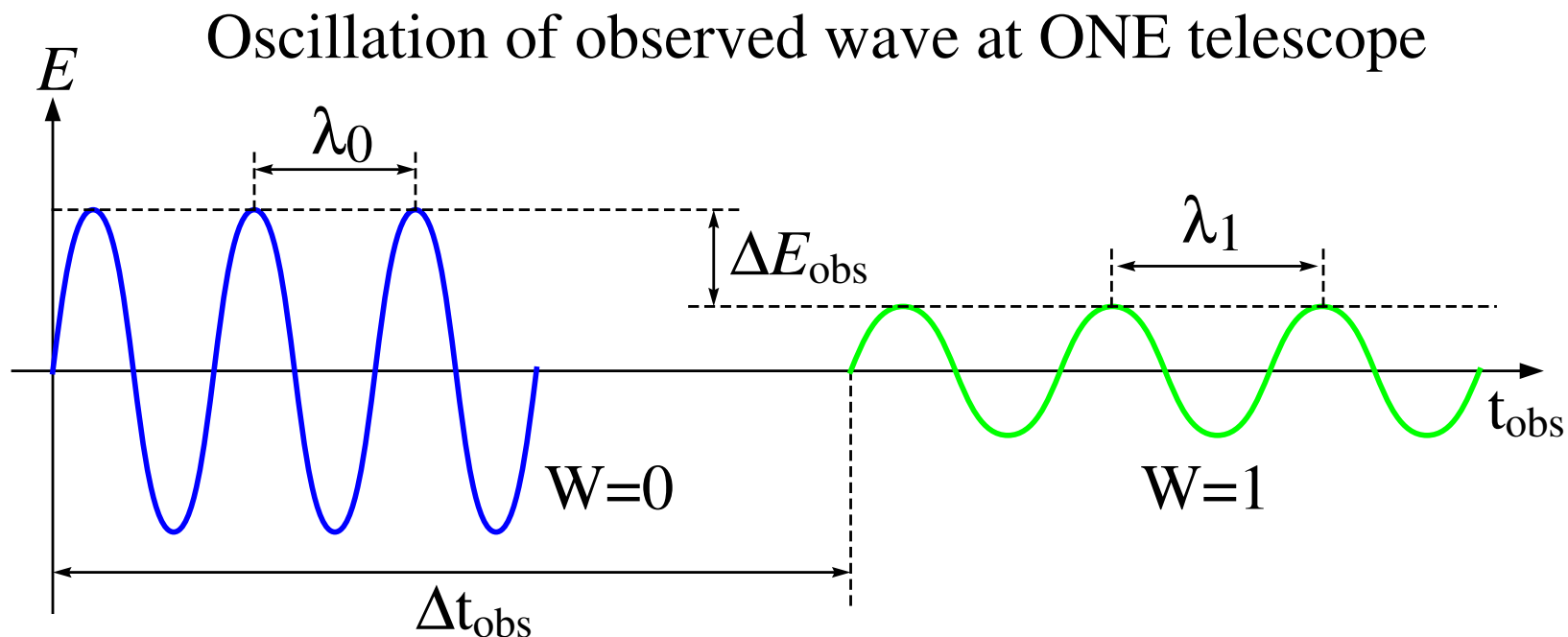
(Time Delay Self-interferometry , TDS \neq Tokyo Disney Sea)

- 設定 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{BH近くの光源から同時に出た光線を観測} \\ \text{全ての方向にパルスの(数波長)で強度が同じ光線} \end{array} \right.$



→ 「巻付き数 $W = 0$ の光線」と「巻付き数 $W = 1$ の光線」の
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{到達時間の差} \\ \text{強度の比} \end{array} \right.$ で『BH観測』が出来そう!?

- 2つの光 $W = 0, 1$ が, 1つの電波望遠鏡にどう表れるか?



-
- Δt_{obs} : 主に, BHの強い重力レンズで決まる
 - ΔE_{obs} : 主に, BHの強い重力レンズで決まる
 - $\lambda_0 \neq \lambda_1$: 光源の速度による運動論的ドップラー効果

* 厳密には $\left\{ \begin{array}{l} \Delta t_{\text{obs}} \text{ と } \Delta E_{\text{obs}} \text{ は } \underline{\text{BH} \cdot \text{光源} \cdot \text{観測者の相対位置}} \\ \text{さらに, } \Delta E_{\text{obs}} \text{ は } \underline{\text{光源の測度}} \text{ (beaming effect)} \end{array} \right.$ にも依存。

● 2つの光（電波） $W = 0$ と $W = 1$ を如何にして同定するか？

→ 同一光源が同時放射した2つの光 $W = 0, 1$ は coherent なはず。

→ 自己干渉 “Self-interference” によって

2つの光 $W = 0, 1$ を同定できるのでは？

→ 一人時間差干渉（ Time Delay Self-interferometry , TDS ）

● いま考えている問題

測定量とBH質量・角運動量（角速度）の関係：

$$\begin{cases} \text{質量} & , M(\Delta t_{\text{obs}}, \Delta E_{\text{obs}}, \lambda_0, \lambda_1) \\ \text{角運動量（角速度）} & , J(\Delta t_{\text{obs}}, \Delta E_{\text{obs}}, \lambda_0, \lambda_1) \end{cases}$$

→ 測定量と M, J の関係の公式化を目指す。

→ まず , Schwarzschild BH ($J = 0$) の場合を練習問題として考える。

3. Schwarzschild BH の場合の TDS : 理論整備の進捗状況

3.1 状況設定

- 極座標 : (ct, r, θ, φ) , $M = \frac{GM_{\text{BH}}}{c^2}$ [length]

$$ds^2 = -f(r) [d(ct)]^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) , \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

- 光の伝搬は幾何光学近似 : 測地線方程式 (= フェルマーの原理)

→ 光線の4次元座標 : $x^\mu(\sigma) = (ct(\sigma), r(\sigma), \theta(\sigma), \varphi(\sigma))$

$\mu = ct, r, \theta, \varphi$ (成分の区別) , σ : affine para.

→ 光線の運動量ベクトル : $k^\mu(\sigma) = \frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma}$, $k^\mu k_\mu = 0$

→ 測地線方程式 : $\frac{Dk^\mu(\sigma)}{D\sigma} = 0$ (相対論的に加速度ゼロ) ← 共変微分

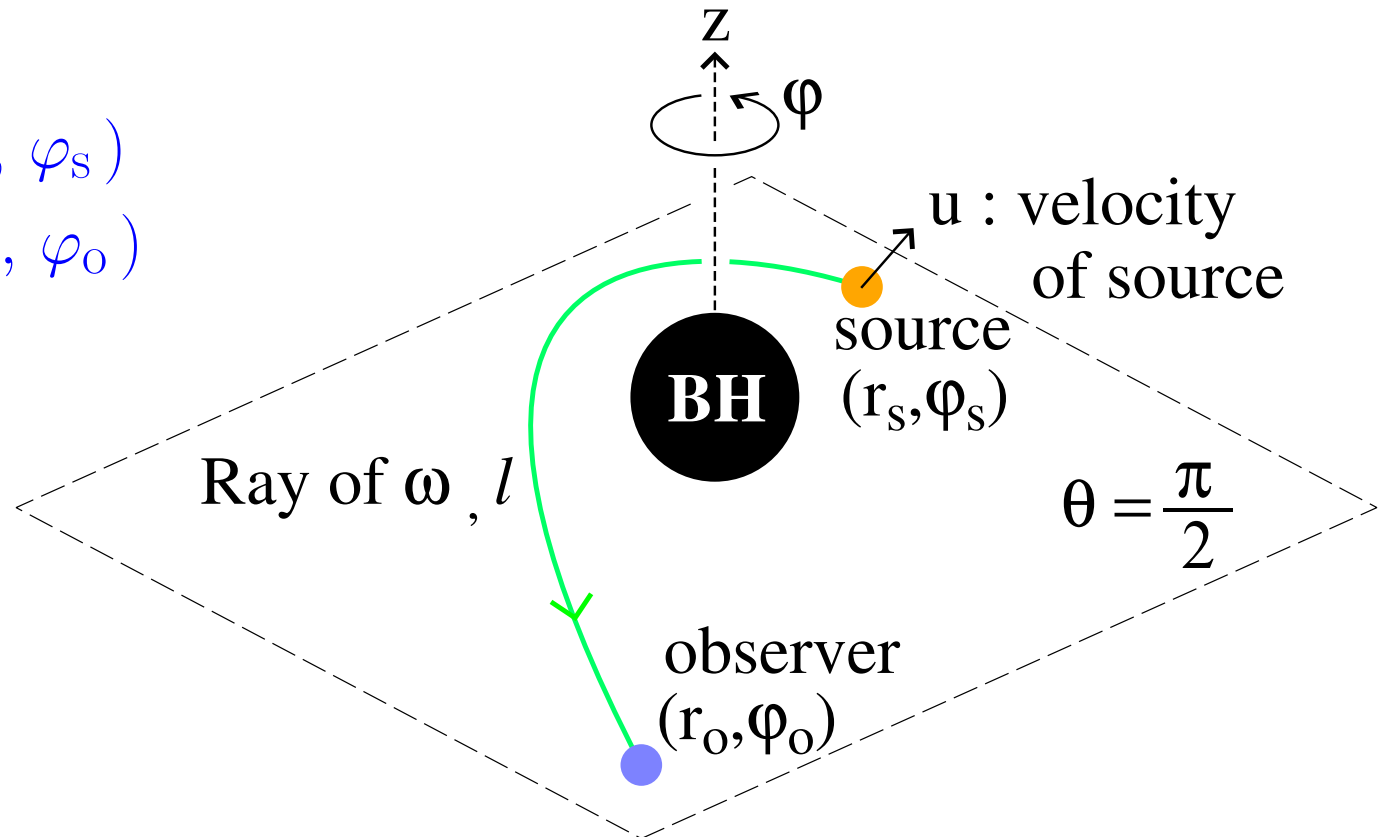
- エネルギー保存 : $\omega := cf(r(\sigma)) k^{ct}(\sigma) = \text{const.} \dots$ 無限遠での角振動数 [rad/s]
- 角運動量保存 : $\begin{cases} \text{ある平面上に束縛 : } \theta(\sigma) = \frac{\pi}{2} \\ l = r(\sigma)^2 k^\varphi(\sigma) = \text{const.} \dots \text{角運動量の「z成分」} \end{cases}$

- 発光と観測の事象 :

$$\begin{cases} \text{発光} & (ct_s, r_s, \pi/2, \varphi_s) \\ \text{観測} & (ct_o, r_o, \pi/2, \varphi_o) \end{cases}$$

- 光源の4元速度 : u^μ

→ 今回は単純にBHに対して
静止とする。





- 測地線方程式（フェルマーの原理）を「 φ をパラメータとして整理」:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} = \pm \sqrt{x^3 - \frac{1}{3}x + Q} \\ \frac{d[ct(\varphi)]}{d\varphi} = \frac{1}{\beta} \frac{r(\varphi)^3}{r(\varphi) - 2M} \\ \frac{d\sigma(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{\beta} r(\varphi)^2 \end{array} \right. \quad \text{ただし,} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2M}{r} - \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{cl}{\omega} : \text{衝突因子} \\ Q = \frac{(2M)^2}{\beta^2} - \frac{2}{27} \end{array} \right.$$

◇ 数理的な補足： x - φ 積分 $\frac{\varphi}{2} = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - \frac{4}{3}x + 4Q}} + \text{積分定数}$

→ 第1種の Weierstrass 楕円積分 ... T^2 リーマン面上の楕円積分経路として光の測地線が表わせるはず

3.2 巻付き角と衝突パラメータの関係

- 一つの光線に対して ...

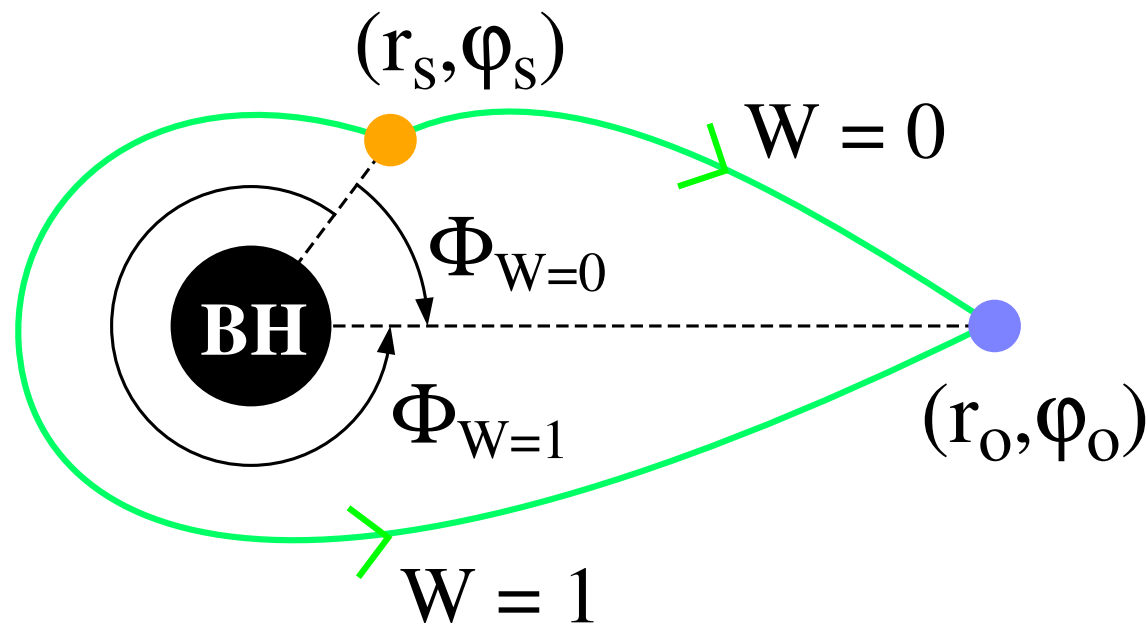
$$\begin{cases} \text{巻付き数 : } W = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{巻付き角 : } \Phi_W = 2\pi W - (\varphi_s - \varphi_o) \end{cases}$$

TDSで見るのは $W = 0, \pm 1$

$$\left(\text{巻付き角の差 : } \Phi_W - \Phi_{W'} = 2\pi(W - W') \right)$$

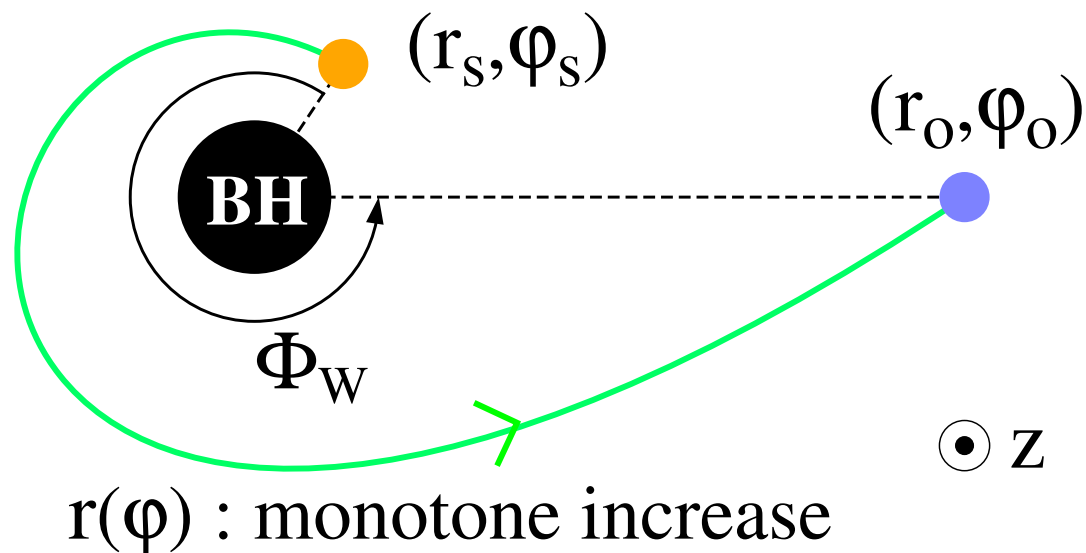
→ (r_s, φ_s) , (r_o, φ_o) , W
を決めれば衝突因子 β_W
も一意的に決まるはず。

W が整数になるような
 β_W がほしい。

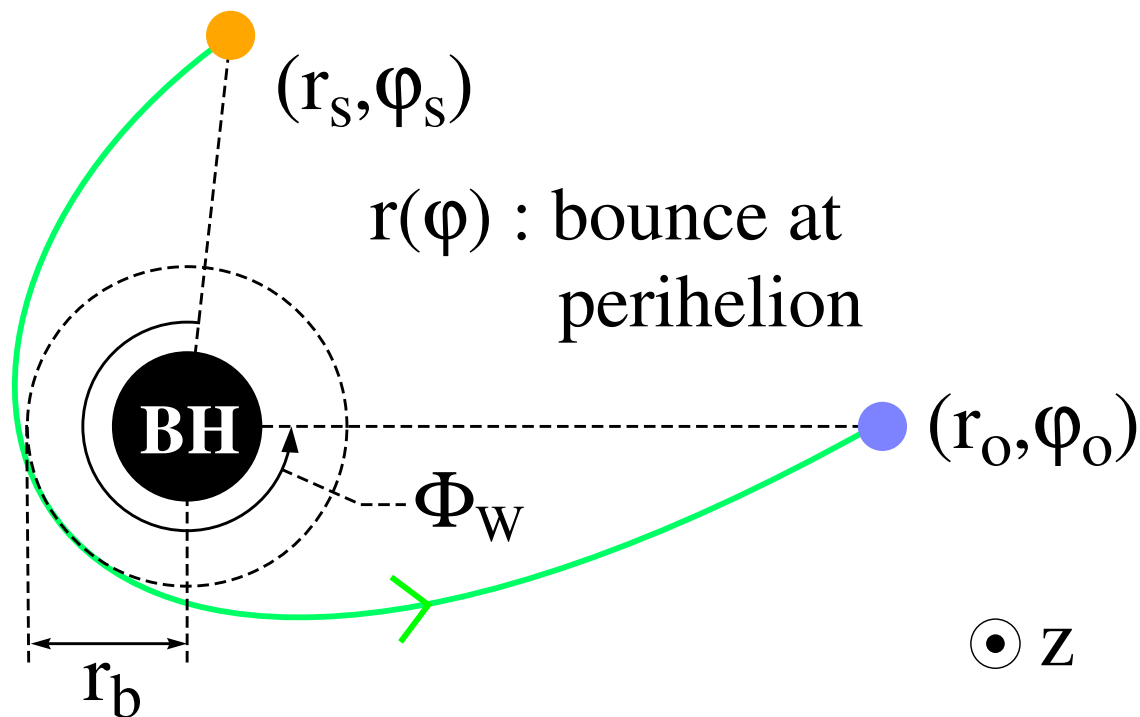


● 巻付き角 Φ_W の計算：場合分け

① : $r(\varphi)$ が単調増加の場合
(光線の近日点がない)



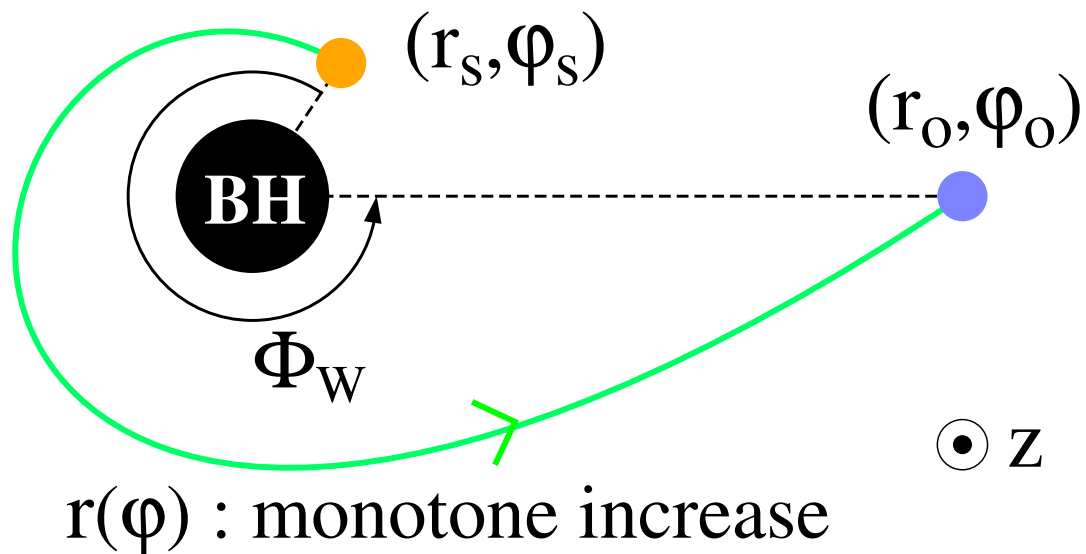
② : $r(\varphi)$ が折り返す場合
(光線の近日点がある)



① : $r(\varphi)$ が単調増加 ($x(\varphi)$ が単調減少) の場合 : 近日点なし

$$\Phi_W = \int_{\varphi_s}^{\varphi_0+2\pi W} d\varphi = \pm \int_{x_0}^{x_s} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{3}x + Q_W}}$$

右辺の符号 $\begin{cases} + & : \text{右手系の周り方の光線} \\ - & : \text{左手系の周り方の光線} \end{cases}$... 下図は右手系の周り方



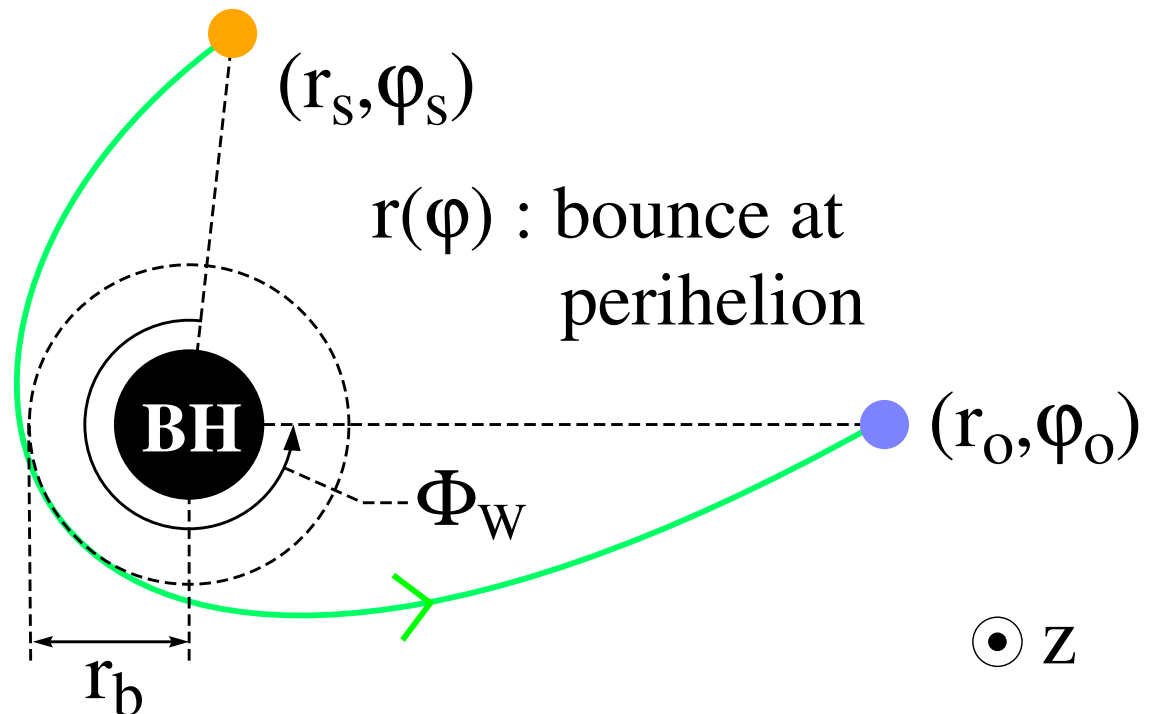
② : $r(\varphi)$ が折り返す ($x(\varphi)$ も折り返す) 場合 : 近日点あり

$$\Phi_W = \pm \left[\int_{x_0}^{x_s} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{3}x + Q_W}} + 2 \int_{x_s}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{3}x + Q_W}} \right]$$

右辺の符号

$\left\{ \begin{array}{l} + : \text{右手系の周り方の光線} \\ - : \text{左手系の周り方の光線} \end{array} \right.$

... 図は右手系の周り方



● 場合 ①と ②をまとめて

$$\Phi_W(\beta_W) = \pm \left[\int_{x_0}^{x_s} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{3}x + Q_W}} + \varepsilon 2 \int_{x_s}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{3}x + Q_W}} \right]$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & : \text{光線の近日点がない} \\ 1 & : \text{光線の近日点がある} \end{cases}$$

→ 光源 (r_s, φ_s) , 観測者 (r_o, φ_o) ,

巻付き数 $W (= 0, \pm 1)$ を与えて, この方程式を解けば β_W が求まる。

→ 衝突因子 β_W が決まれば,

光線 (測地線) が具体的に決まり, TDS の観測量が計算できる。

◇ 今の課題 : $\begin{cases} \text{上の積分式をどうやって解くか?} \\ \beta_W \text{ を解く前に, 近日点の有無をどう判断するか?} \end{cases}$

3.3 一つの光線の強度

- 光源から見た立体角 $\Delta\Omega_s$ の中に放射された光線ビーム（の全て）が望遠鏡に入射する（巻付き角は Φ_W ）。

→ 望遠鏡が受けるパワースペクトルは、

$$P_W(\nu) = I_W(\nu) \Delta\Omega_s \quad [\text{W/Hz}]$$

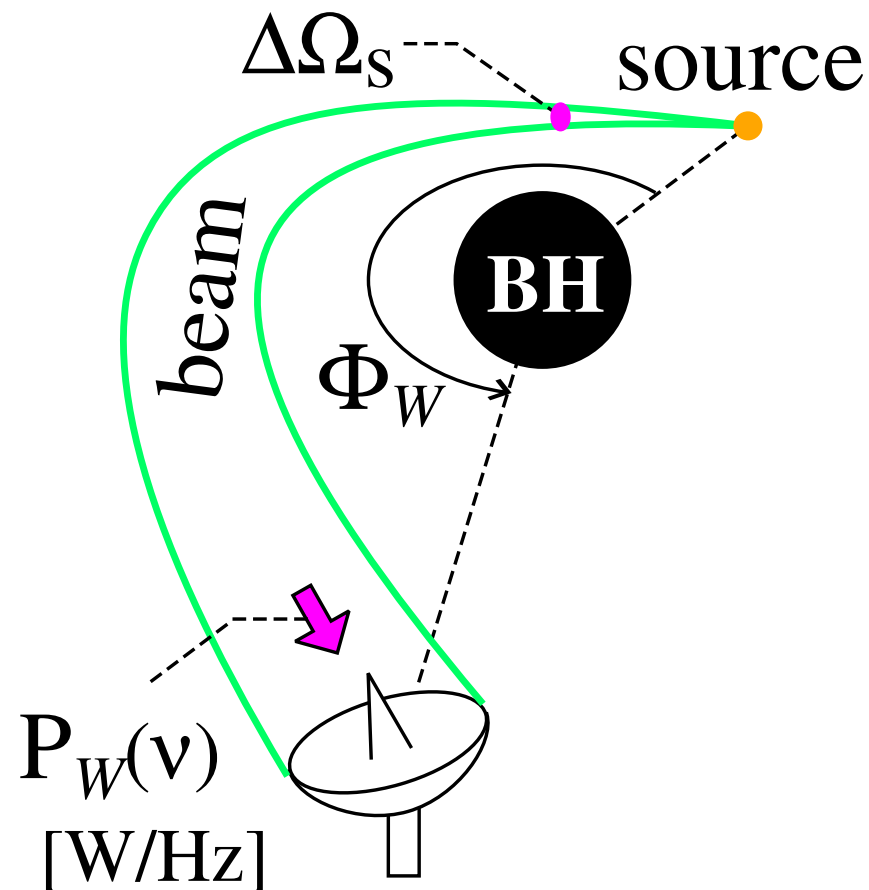
ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{c}{\lambda} \quad [\text{Hz}] : \text{放射光の振動数} \\ I_W(\nu) \quad [\text{W/Hz} \cdot \text{sr}] : \Phi_W \text{ 方向の放射パワースペクトル} \end{array} \right.$$

◇ ν と $I_W(\nu)$ は Schwarzschild 座標（観測者系）で測る量

→ 光源の速度による運動論的ドップラー効果を受ける。

（光源の共動系と比較して）



● 放射立体角 $\Delta\Omega_s$ と望遠鏡面積 A_o

$$\diamond \Delta\Omega_s = |\sin \eta_s| \Delta\alpha \Delta\eta_s, \quad \Delta\eta_s = \frac{d\eta_s(\beta_W)}{d\beta_W} \Delta\beta_W$$

$$\diamond A_o = r_o^2 |\sin \Phi_W| \Delta\alpha \Delta\Phi_W, \quad \Delta\Phi_W = \frac{d\Phi_W(\beta_W)}{d\beta_W} \Delta\beta_W$$

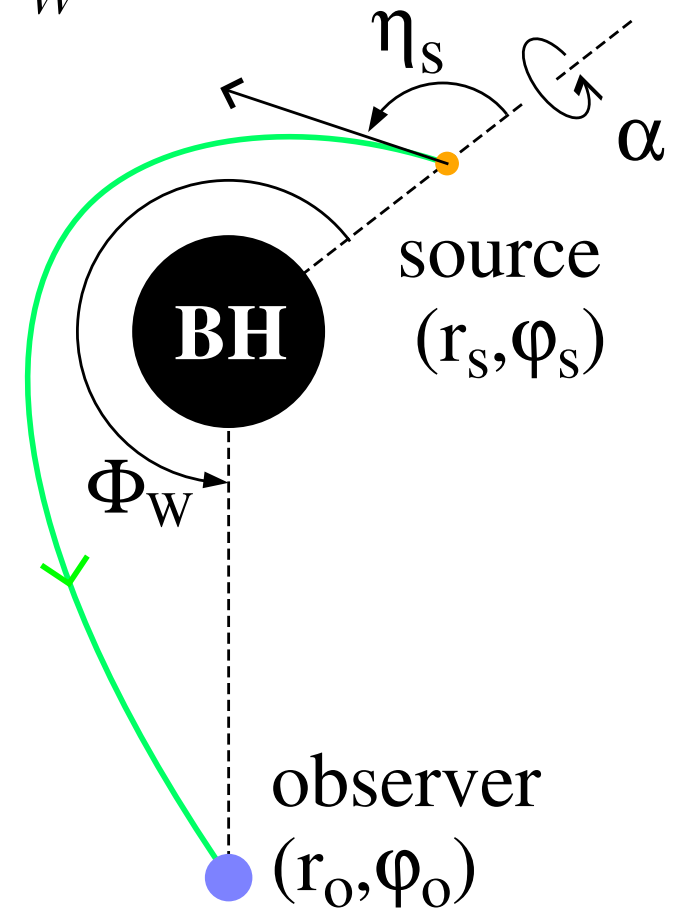
⇓

$$\Delta\Omega_s = \frac{A_o}{r_o^2} \left| \frac{\sin \eta_s \Delta\eta_s}{\sin \Phi_W \Delta\Phi_W} \right|$$

⇓

$$P_W(\nu) = I_W(\nu) \frac{A_o}{r_o^2} \left| \frac{\sin \eta_s \Delta\eta_s}{\sin \Phi_W \Delta\Phi_W} \right|$$

これを，測地線方程式を使ってまとめると...



- 巻付き角 Φ_W の光線（ビーム）の強度：パワースペクトル

$$P_W(\nu) = I_W(\nu) \frac{A_0}{r_0^2} \left| \frac{\beta_W^3 \left(x_s^3 - \frac{1}{3} x_s - \frac{2}{27} \right)}{(2M)^2 \sin \Phi_W \sqrt{F_W(x_s)}} \frac{1}{X_W} \right|$$

ただし，

$$F_W(x) = x^3 - \frac{1}{3}x + Q_W$$

$$X_W = \int_{x_0}^{x_s} F_W(x)^{-3/2} + \varepsilon 2 \int_{x_s}^{x_b} F_W(x)^{-3/2}$$

- ◇ P_W - ν グラフの基本的な形は $I_W(\nu)$ で決まる。
- ◇ $I_W(\nu)$ の係数がBH時空（強い重力レンズ効果）で決まる。

3.4 これから考えること

- β_W を解く前に近日点の有無の判断：何を示せばいいのか？
- 衝突因子の計算法：Mathematica で補間（Interpolation）を使おうか
→ スプライン補間で数値的に積分式を解く
- 重力の効果：時間差 Δt
→ $W = 0$ と $W = 1$ の光線の時間差を数値的に直接計算
… 滅茶苦茶な精度がきつと必要で，ほぼ無理！
→ 上手い解析的表現（半数値的に使える表式）を探す，定式化する。
- 光源の運動の効果：特殊相対論の問題… 解き方は分かっている
{ ビーミング効果：光源の共動系と観測系での $I_W(\nu)$ の関係
{ ドップラー効果：光源の共動系と観測系での ν の関係

4. まとめ

- BHを「見る」とは「曲がった時空の効果」を捉えること

→ 強い重力レンズ効果に注目

$\left\{ \begin{array}{l} \text{見た目の画像} \quad : \text{BHシャドウ} \\ \text{電波の時間変動} \quad : \text{一人時間差干渉 TDS} \end{array} \right.$

- TDSの測定量とBH質量・角運動量の関係： $\left\{ \begin{array}{l} M(\Delta t_{\text{obs}}, \Delta E_{\text{obs}}, \lambda_0, \lambda_1) \\ J(\Delta t_{\text{obs}}, \Delta E_{\text{obs}}, \lambda_0, \lambda_1) \end{array} \right.$

→ Schwarzschild BH の場合で考え中

(具体的課題は§3.4)

- 重力理論の問題 (まだ整理していない論点)

BH地平面が存在すれば光の不安定円軌道も必ず存在するか？

→ 付録A.

付録A. 強い重力レンズに関する根本的な問題点

- 厳密には $\begin{cases} \text{BH シャドウ} & \rightarrow \text{光の不安定円軌道の影} \\ \text{TDSの光} & \rightarrow \text{光の不安定円軌道に巻きつく} \end{cases}$

→ これらの強い重力レンズ効果 $\stackrel{?}{=} \text{BH 地平面の存在} \dots ???$

→ **BH 地平面が存在すれば光の不安定円軌道も必ず存在するか？**

