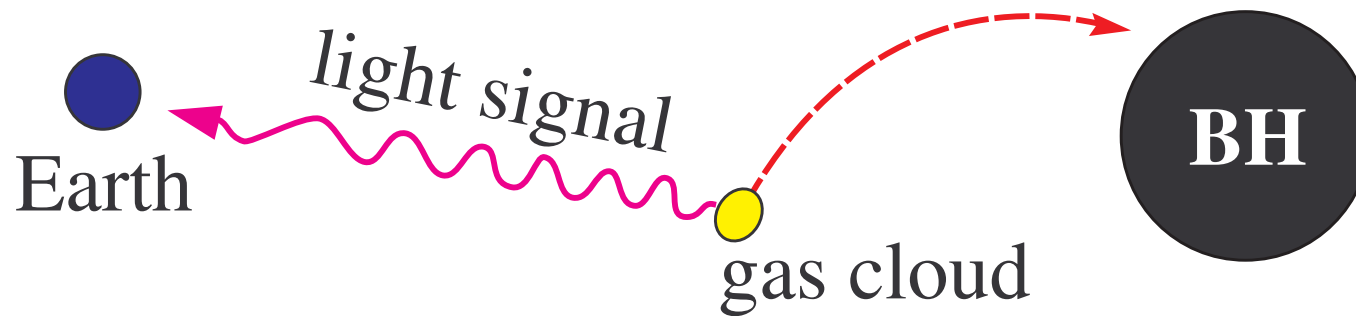


運動論的ドップラー効果（特殊相対論的な効果）
と

重力的ドップラー効果（一般相対論的な効果）

— BH存在の観測的立証へ向けて —

齊田 浩見（大同大学 at 名古屋市）

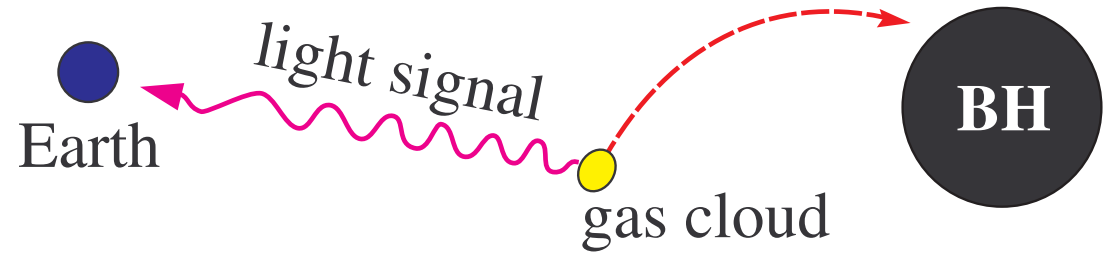


0. 初めに：そこはかたなく書きつくれば

- 低予算・少人数で，資金と人手が潤沢な他グループに勝つには，
「他にはないかつ意味ある目標 Unique and Meaningfull Aim (UMAI)」
を掲げ，それを「適切な時期に実現」すること，が必要でしょうか？
- UMAI の一つは，
『BH候補天体』を『BHそのもの』にする
ことが挙げられないでしょうか？
- 実現するに適切な時期は，「2013年の夏」でしょうか？
それとも「2015 or 16年（一般相対論の建設100周年）」でしょうか？
- VLBIの方々へのアピールで必要なら，
こういう話をどこでもさせていただきます。

1. 導入

1.1 前回の発表のまとめ



- 設定：BHに落ちていく光源が発する光を，遠方の観測者が測定。
- 一般相対論による「観測光の波長」の特徴：
 - ① 観測光はBHの重力で引き延ばされ，放射時点の波長より長くなる。
→ 運動論的ドップラー効果と重力的ドップラー効果の混合
 - ② 光源がBHに近づくほど重力が強くなり，観測光の波長も長くなる。
 - ③ 光源がBHに吸い込まれるとき，観測光の波長は無限に長くなる。
→ 光の振動が凍りつく。(BHに固有の現象)
 - ④ 「光の凍りつき」の際のパワースペクトルがプランク分布に比例。
→ 『温度』と『化学ポテンシャル』はBH質量と角速度できまる。
(BHに固有の現象)

1.2 特徴①～④の意義

- 特徴 ① と ② : 光源がBHに近づいていく途中の現象

→ 必ずしもBH固有の現象ではない。

→ 光源がプラズマのガス塊の場合、

ドップラー効果とプラズマ状態変化の観測的な区別が難しい。

→ これでBH存在を示すには工夫が必要。

- 特徴 ③ と ④ : 光源がBH近傍に到達してから吸い込まれる間の現象

→ 重力ドップラー効果が **BHの重力で極端に大きく** 効いた現象

→ **BHに固有の現象** $\left\{ \begin{array}{l} \text{特徴 ③ の観測 : BHの存在を定性的に示せる} \\ \text{特徴 ④ の観測 : BHの定量的な性質を決める} \end{array} \right.$

BH直接観測には相対論的ドップラー効果のある程度の理解があると良い

1.3 この解説の目標

- 以下を，ある程度 数式も使って説明を試みる。

相対論的ドップラー効果は，

- ◇ 運動論的（特殊相対論的）ドップラー効果と
- ◇ 重力的（一般相対論的）ドップラー効果

の単純な和ではなく，混在したもの。

- 数学的な証明は省いて，時空図を描いてイメージ的な解説をする。
- 前回の繰り返しもあるが，「他にはないかつ意味ある目標（UMAI）」を設定し，「このグループならでは」の具体的な成果を目指した議論ができるとうい。

2. 運動論的ドップラー効果：特殊相対論

2.1 特殊相対論の要点

- 基本原理は2つ

- ⎧ **特殊相対性原理**：任意の慣性系で物理法則は同じ形（式）である。
- ⎧ **光速不変の原理**：任意の慣性系で測定する光速は等しい値 c である。

→ 光速不変の原理から **慣性系によって同時刻が異なる**ことが分かる。

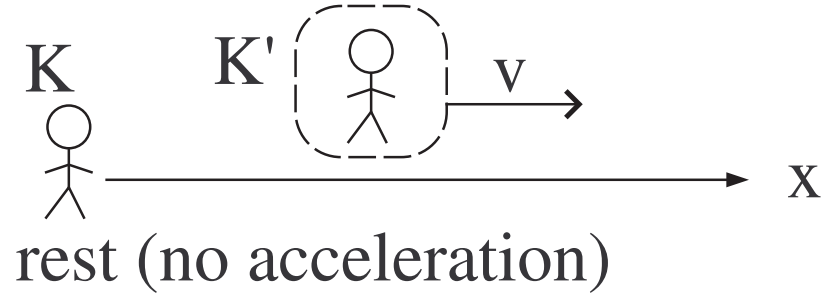
（さらに，2原理を合わせて，**4次元距離** $-(ct)^2 + |\vec{x}|^2$ が分かる。）

→ 次に「同時刻の概念」だけ少し詳しく説明。

- … ⎧ 運動論的ドップラー効果の本質的な要因
- … ⎧ 重力ドップラー効果との違いを知る上で必要
- … ⎧ 「光の測定」という天体観測の基本に関係しそう！?

- 状況設定：慣性系 K に対して K' が x 軸方向に速度 v で慣性運動

$$\begin{cases} \text{Kの座標系} : (ct, x, y, z) \\ \text{K'の座標系} : (ct', x', y', z') \end{cases}$$



- K, K' の世界線

$$\begin{cases} \text{Kの時空図中でのK'} : ct = \frac{c}{v}x \quad (vt = x) \\ \text{K'の時空図中でのK} : ct' = -\frac{c}{v}x' \quad (-vt' = x') \end{cases} \rightarrow \text{これが} \begin{cases} ct' \text{軸} \\ ct \text{軸} \end{cases}$$

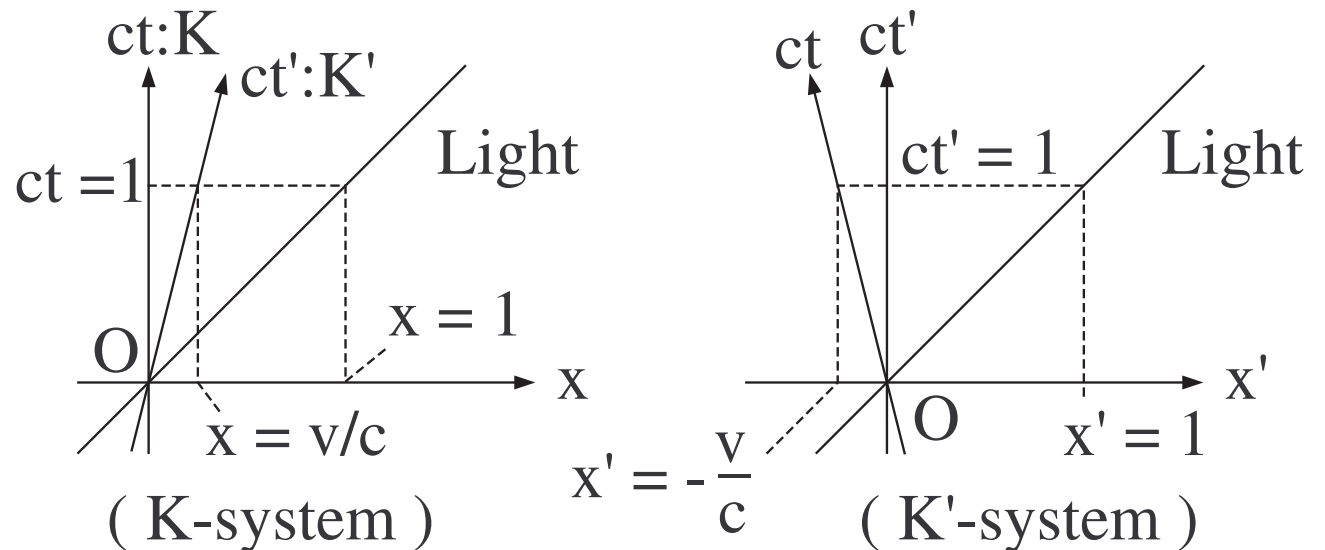
→ ct 軸と ct' 軸は平行でない

- 光の世界線

光速不変の原理から

$$\begin{cases} \text{Kが見て} : ct = x \\ \text{K'が見て} : ct' = x' \end{cases}$$

問題は x 軸 (x' 軸) …



- 定義：『同時刻の空間』 := 『同じ時間座標の値で示す事象の集合』

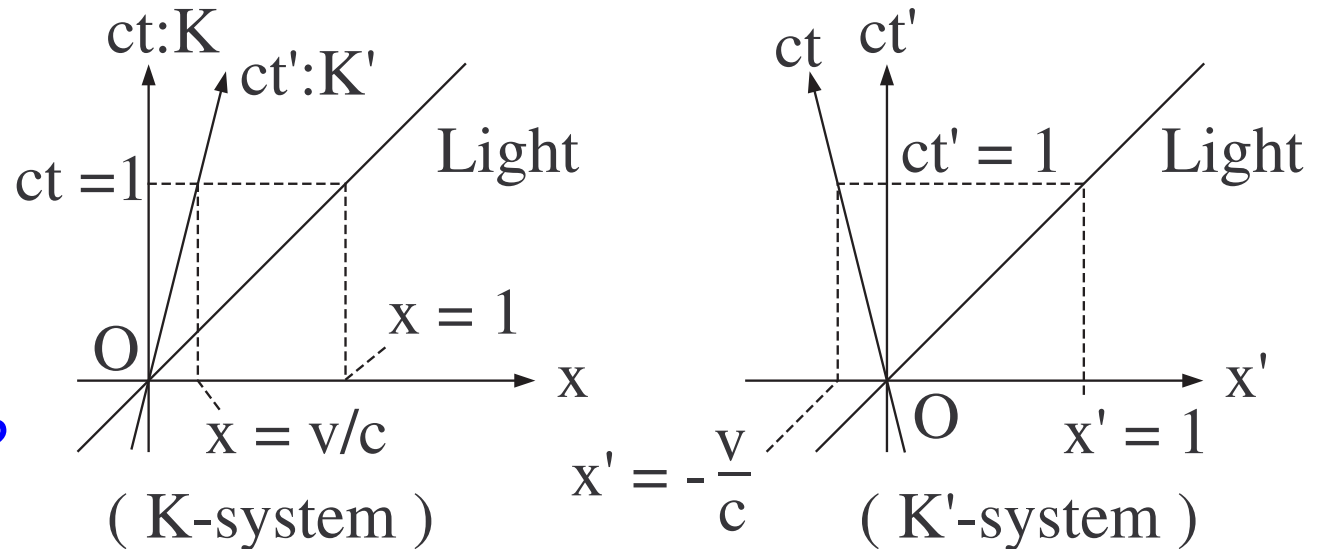
→ $\begin{cases} K \text{ からみて原点 } O \text{ と同時刻の空間} & : x \text{ 軸} \\ K' \text{ からみて原点 } O \text{ と同時刻の空間} & : x' \text{ 軸} \end{cases}$

→ Newton では, x 軸と x' 軸は同一 (平行) だった

(「同時刻の空間」は慣性系に寄らず普遍的な存在だと仮定した)

- 問題

光速不変の原理を優先
すると, x 軸と x' 軸の
関係はどうか?
互いに平行か? 傾くか?



→ 直線の方程式だけで

答えられる! ... Step 1 ~ 3

注意: Newton は空間 [cm] が不変 \longleftrightarrow Einstein は光速 [cm/s] が不変

● Step 1 : 光 (不変なもの) を基準にした 『同時刻の空間』 の特徴

→ 右図 : K から見て事象 O と P は同時刻

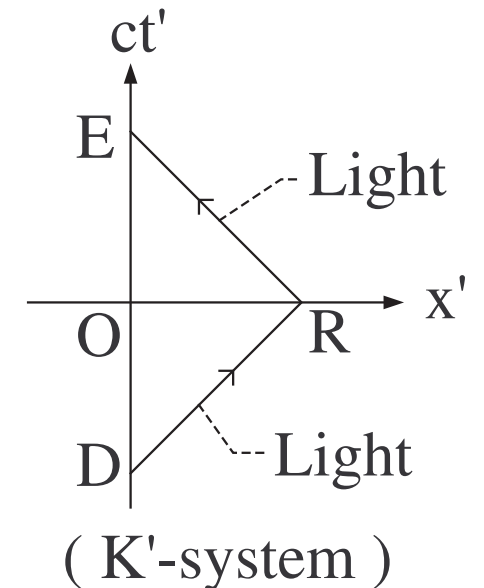
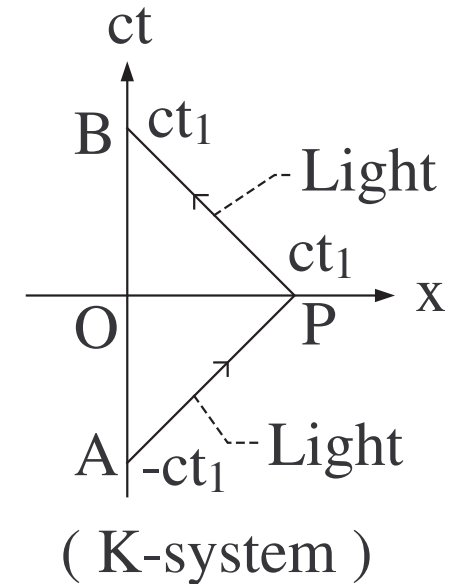
特徴 : $\overline{OA} = \overline{OB}$ ($\triangle OPA \equiv \triangle OPB$)

→ 『K が発した光が $x = ct_1$ の位置に届く時間』 と
『光が ct_1 の位置で反射されて K に戻る時間』 が
等しい (t_1 という時間) 。

→ 同様の特徴は K' から見た時空図も同じ : $\overline{OD} = \overline{OE}$

→ 考えるべき問題は ,

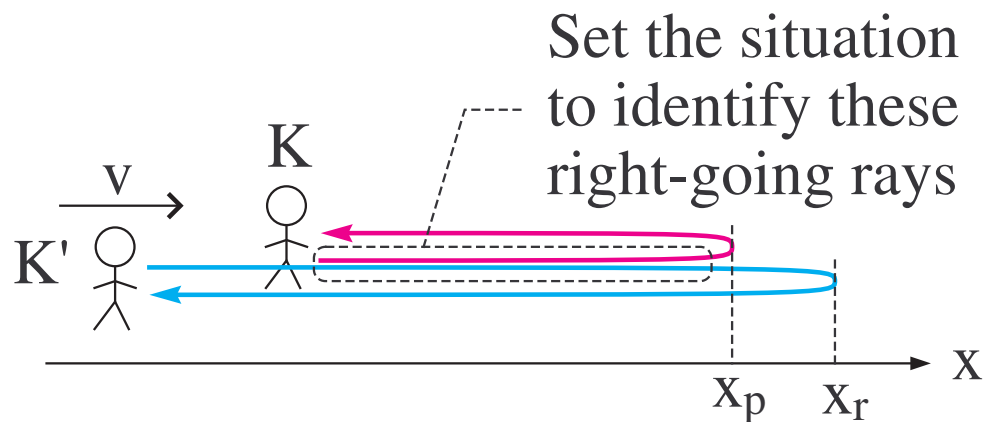
『K' の時空図』 を 『K の時空図』 の上に重ねて
描いたとき , 事象 R が x 軸の上に乗るか ?



● Step 2 : 時空図を重ね描きする上でのアイデア (簡単化)

→ 『Kが出す放射光線』と
『K'が出す放射光線』を
重ねる。

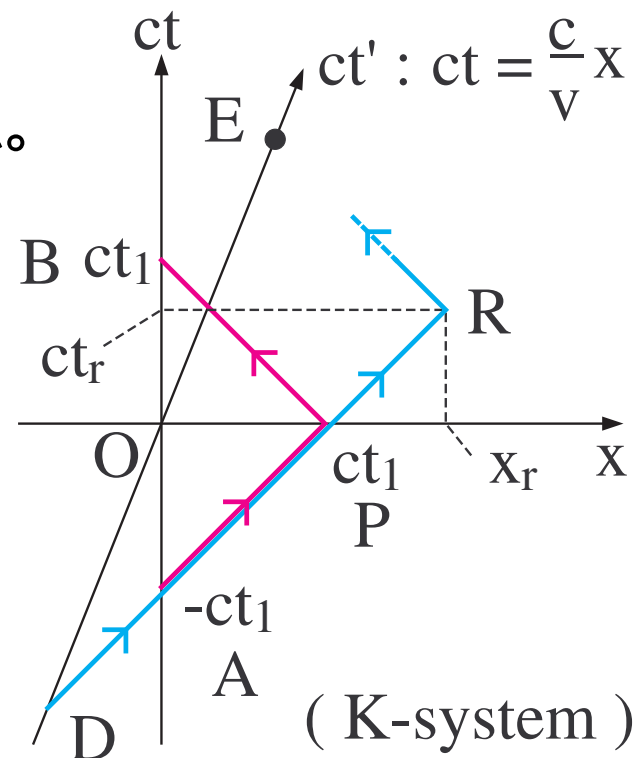
(このように状況を調整する。)



→ { 事象Rは『PとAを通る直線』の上。
事象Dは『PとAを通る直線』と ct' 軸の交点。
(事象Eは ct' 軸上。Step 3の途中で特定。)

→ 最後の問題は、

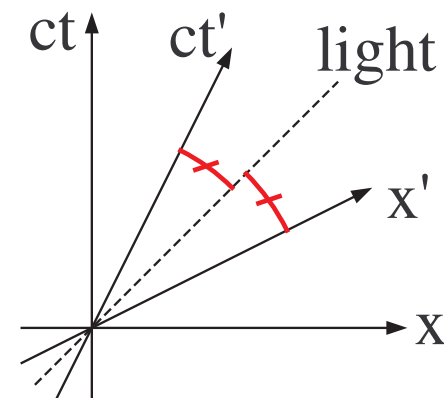
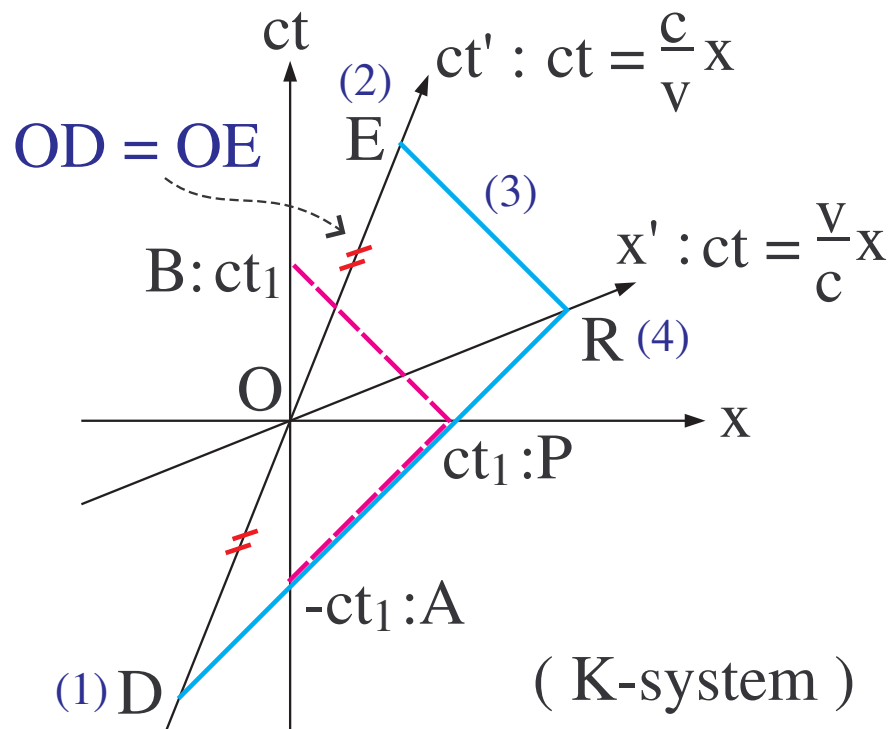
『同時刻の特徴』を使って、Kから見た
事象Rの位置 (ct_r, x_r) を特定すること。



● Step 3 : 直線の式で交点としての事象Rを計算

→ 次の手順で, Kからみた事象Rの座標 (ct_r, x_r) を得る。

- (1) 直線APと ct' 軸の交点としての事象D (ct_d, x_d) を計算。
- (2) 同時刻の特徴 $\overline{OD} = \overline{OE}$ より事象E $= (-ct_d, -x_d)$ を得る。
- (3) 光速不変の原理より, 事象Eを通る光の世界線 : $ct = -(x - x_e) + ct_e$
- (4) 直線APと(3)の光の交点が事象R



→ Kの時空図上に描いた x' 軸 : $ct = \frac{v}{c} x$

→ 結論 : 慣性系によって『同時刻の空間』が異なる!

● 他の重要事項：4次元距離 S_E

→ 『距離』の性質（スカラー量であること・・・特殊相対性原理）

任意の2事象間の4次元距離は，どの慣性系で測っても同じ値。

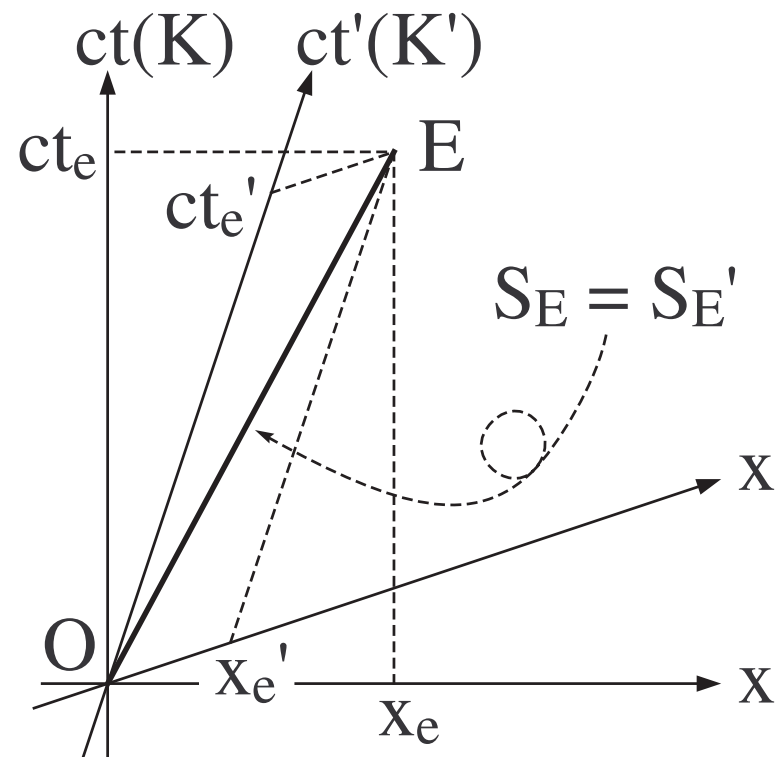
→ この要請を満たす距離の計算式は

「ピタゴラス定理」ではなく次式：

右図の事象OE間の4次元距離 S_E は，

$$\begin{aligned} \underline{S_E^2} &= -(ct_e)^2 + x_e^2 + y_e^2 + z_e^2 \\ &= -(ct'_e)^2 + x_e'^2 + y_e'^2 + z_e'^2 \\ &= S_E'^2 \end{aligned}$$

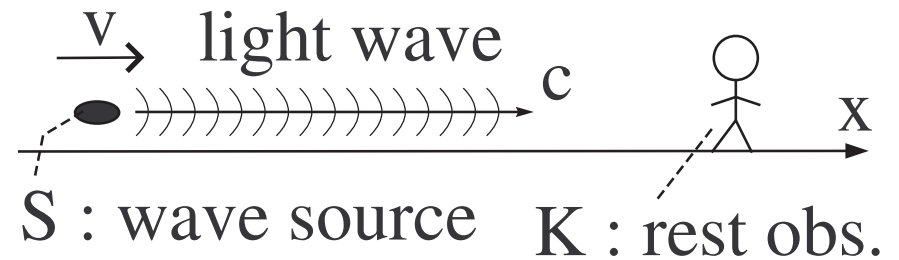
補足：2つの基本原理から $S_E^2 = S_E'^2$ であることが証明される。



2.2 運動論的ドップラー効果

- 状況設定：これまでの設定の K' を光源 S にする（速度 v ）

→ S が K に向かって単色光を放射



→ 光の物理量：

[K が測る	{	周期： T
			波長： $\lambda = cT$
]	S の慣性系で測る	{	周期： T'
			波長： $\lambda' = cT'$

注意：光速不変の原理より，位相速度はどちらで測っても光速 c

→ この状況を時空図で表すと，
運動論的ドップラー効果を幾何的に理解できる。

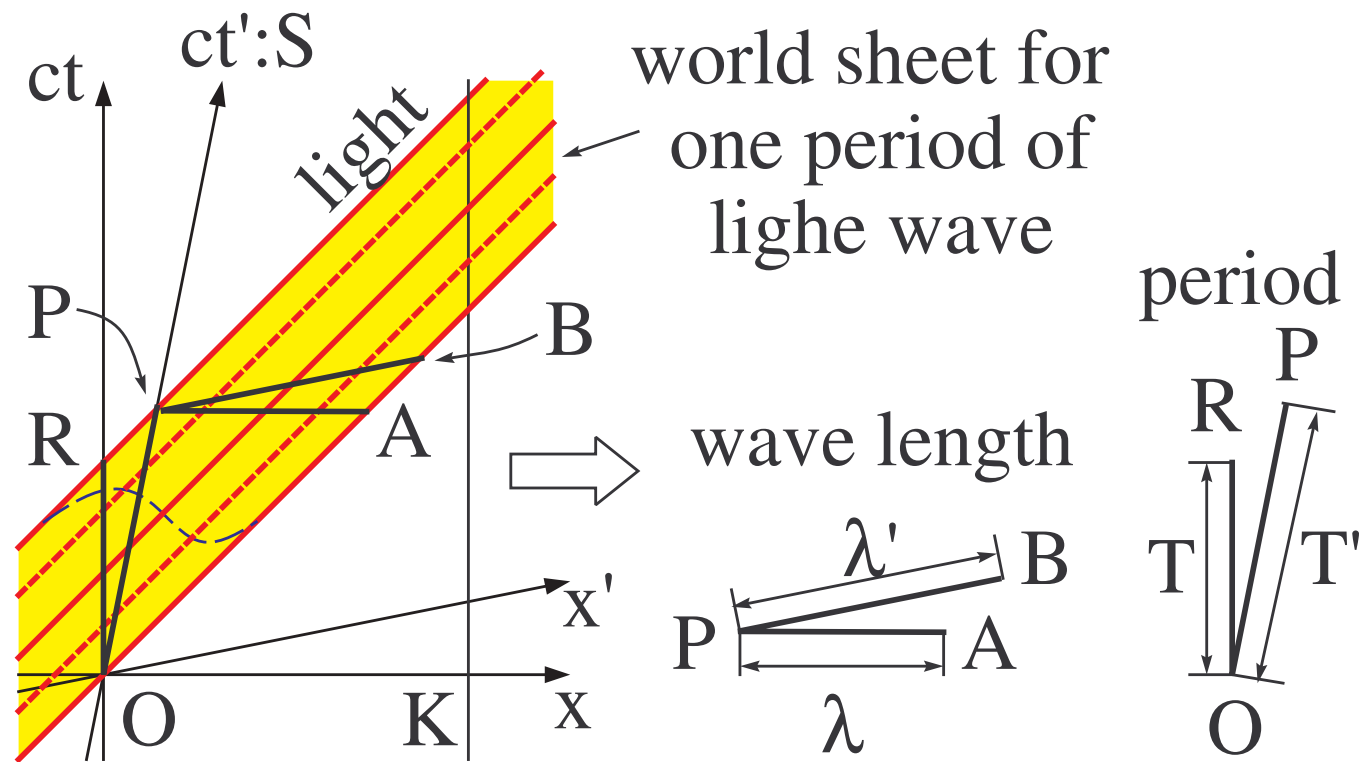
● 時空図で理解：光源Sが放出する『一周期の光』が描く世界線が重要

→ 右図より，

$$\text{波長：} \begin{cases} \lambda = \overline{PA} \\ \lambda' = \overline{PB} \end{cases}$$

$$\text{周期：} \begin{cases} T = \overline{OR} \\ T' = \overline{OP} \end{cases}$$

→ それぞれの線分の長さを4次元距離で測って比較。



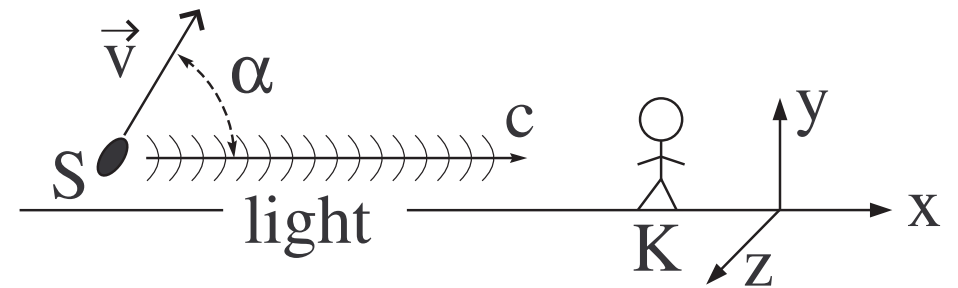
→ 運動論的ドップラー効果： $T = \gamma \frac{c-v}{c} T'$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

$$\left(\omega = \frac{1}{\gamma} \frac{c}{c-v} \omega' , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

- 補足：光源Sの3次元速度 \vec{v} が，慣性系Kの視線方向に沿わない場合。

→ Sの速度の「視線方向成分」を考えればよい。

今はx成分： $v_x = |\vec{v}| \cos \alpha$



→ 運動論的ドップラー効果：

$$T = \gamma \frac{c - v_x}{c} T' \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2}}$$

(注意： γ は v_x でなく $|\vec{v}|$ で計算)

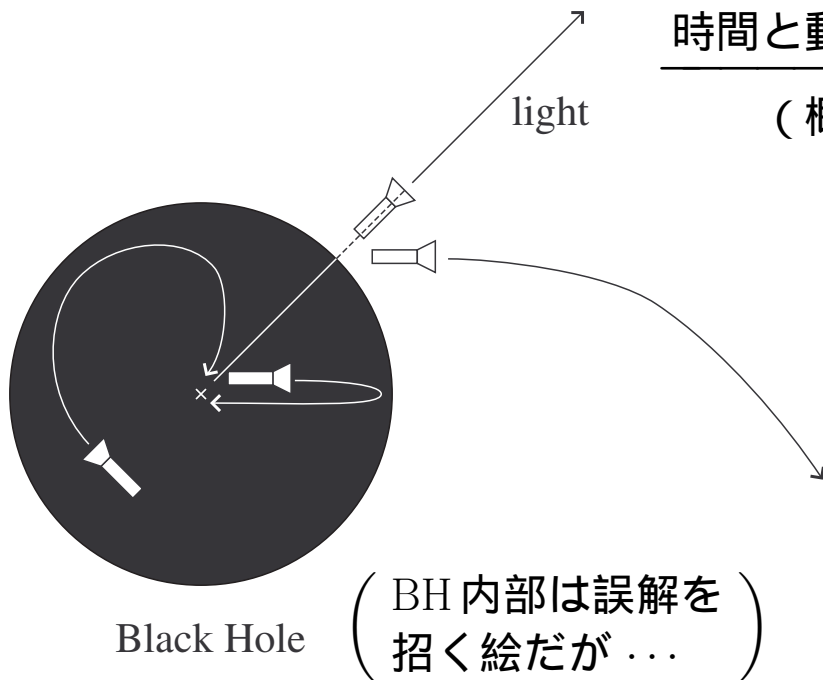
→ 振動数で書き直すと： $\omega = \frac{1}{\gamma} \frac{c}{c - v_x} \omega' \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

注意：運動論的ドップラー効果は，座標の取り方（慣性系の選び方）の違い（見方の違い）で生じる現象。

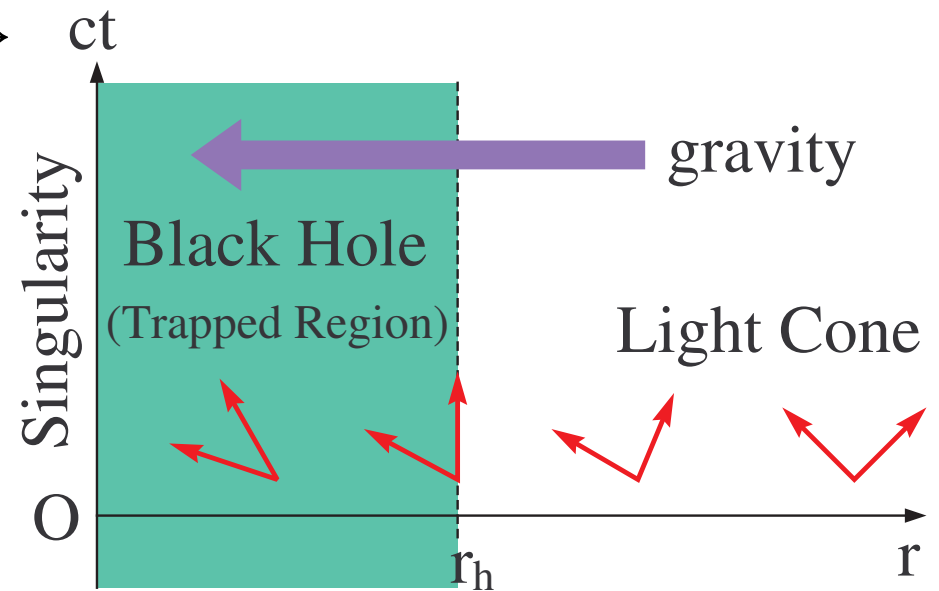
3. 重力的ドップラー効果：一般相対論

3.1 重力と光円錐

- 事実：
 - ◇ 座標軸を決めずとも光の世界線は唯一に定まっている。
→ **光円錐で時空の因果構造が分かる。**
 - ◇ 光の（3次元）軌道は重力で曲がる（等価原理）。
→ **時空図上，光円錐の向きが重力で変わる。**



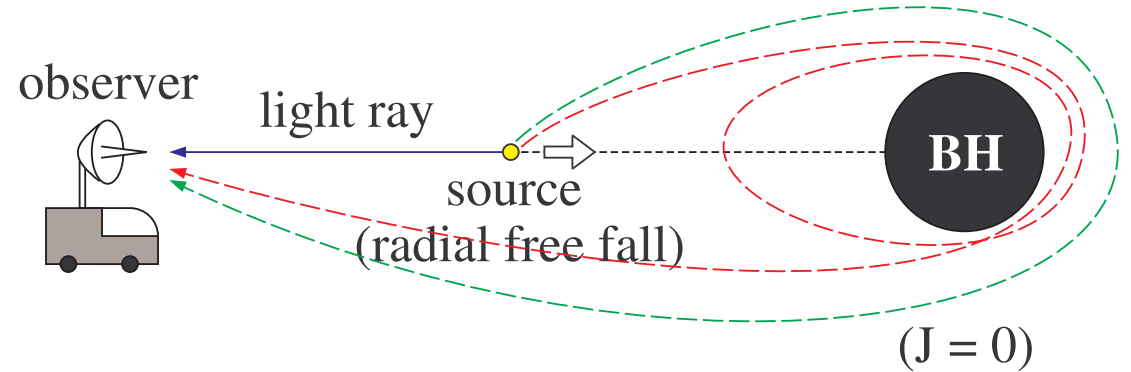
時間と動径の時空図
(概要図)



3.2 光の振動の凍りつき

- 状況設定：無回転BHで...

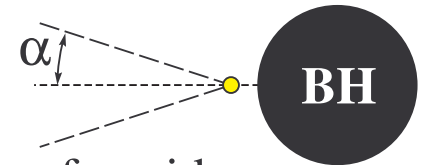
- ◇ 動径方向に
 - 落下する光源
 - 伝播する光
- ◇ 角運動量を持った光は無視



$$\alpha \rightarrow \pi \text{ as } r_s \rightarrow \infty$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ at } r_s = \frac{3}{2} R_{\text{BH}}$$

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ as } r_s \rightarrow R_{\text{BH}} \text{ cone of avoidance}$$



$$\updownarrow R_{\text{BH}} = r_h \text{ (図の転用なので...)}$$

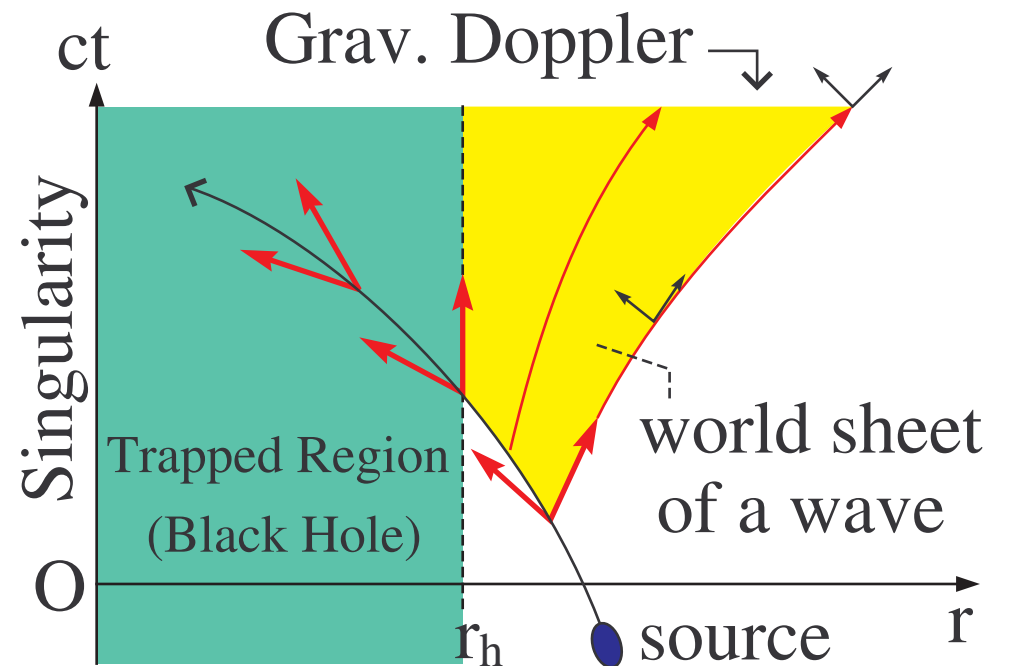
- 右下の時空図

光源で見て有限な時間だけ放射

→ 放射光の波長が延びながら伝播
(重力ドップラー効果)

→ 光源が放射しながら地平面を横切ると、観測波長は無限に引き延ばされる。

(光の振動の凍りつき)



● 注意点

- ◇ 運動論的ドップラー効果は，座標の取り方（慣性系の選び方）の違い（見方の違い）で生じる現象だった。



時空図から分かる違い



- ◇ 重力ドップラー効果による「波長の引き延ばし」は，座標の取り方（観測者の選び方）とは無関係に生じている現象。

→ 観測者が地平面の外側に居る限り「光の振動の凍りつき」
（波長の無限の引き延ばし）が観測される。（BH固有の現象）

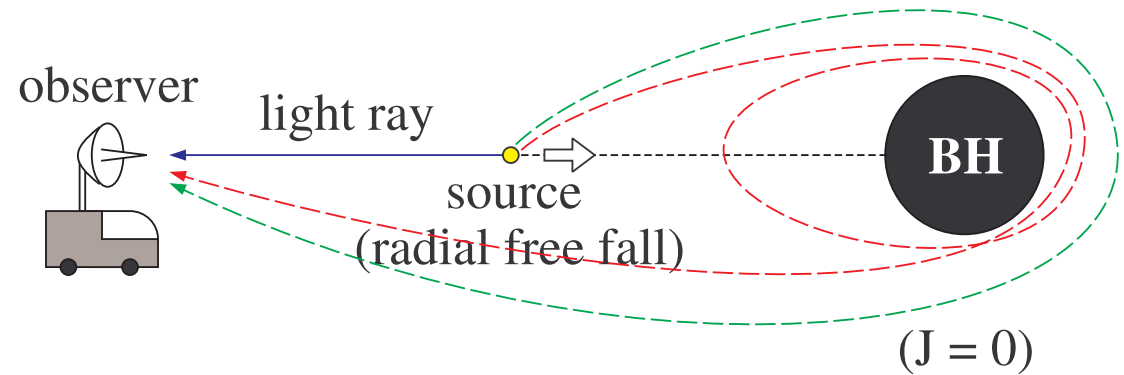
注意：「凍りつく」までの途中の時間変化は，観測者の選び方に寄る。

→ その途中の観測量：重力ドップラーと運動論ドップラーの混合効果

3.3 具体例：単純な設定

- 状況設定 (3.2 に追加)

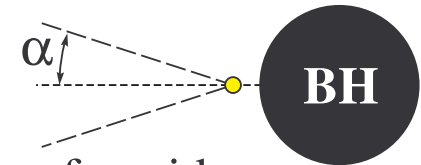
- ◇ 観測者：十分遠方で静止
- ◇ 光源：自由落下
- ◇ 放射光：光源から見て単色
(色が時間変化してもよい)



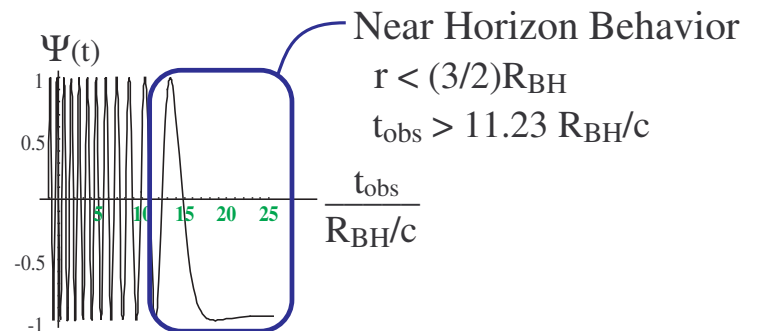
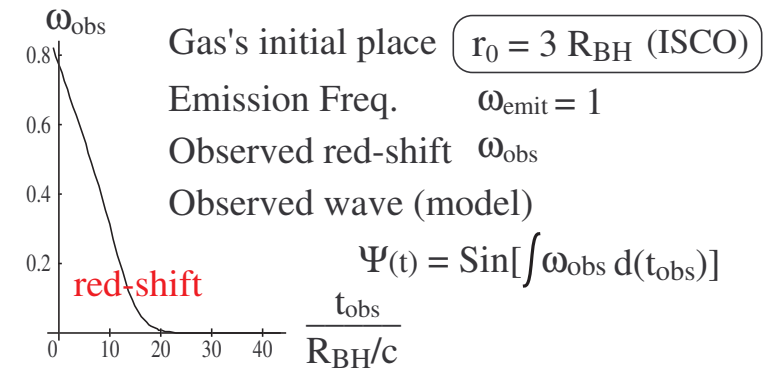
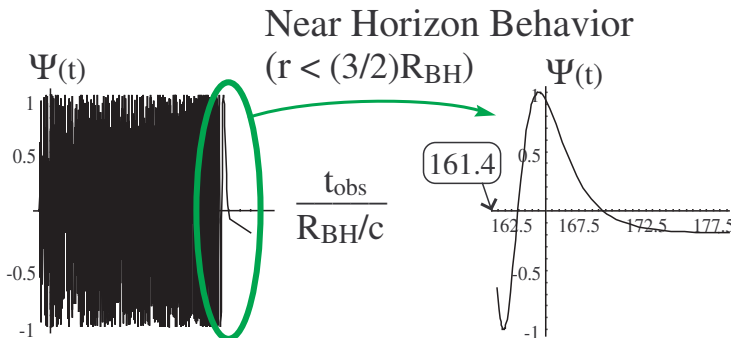
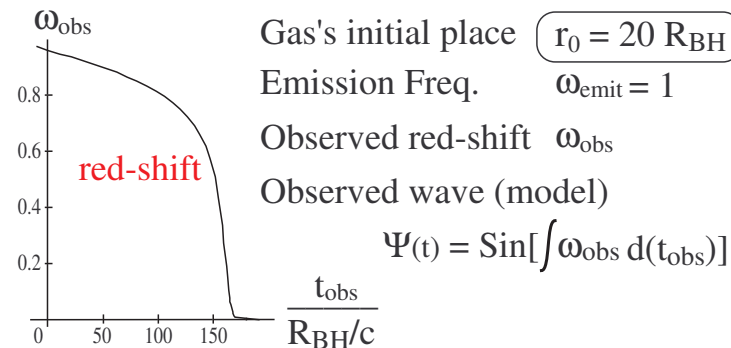
$$\alpha \rightarrow \pi \text{ as } r_s \rightarrow \infty$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ at } r_s = \frac{3}{2} R_{BH}$$

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ as } r_s \rightarrow R_{BH} \text{ cone of avoidance}$$



- 計算結果 (\searrow)
の前に計算概要
(理論屋向け)



◇ 光源の軌道：動径方向の時間的測地線 ($\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$)

Schwarzschild 座標で,

$$\left\{ \begin{array}{l} M : \text{BH質量 } M_{\text{BH}} \text{ を長さに換算 (} M = GM_{\text{BH}}/c^2 \text{)} \\ E : \text{測地線に沿った保存エネルギー } /mc^2 \\ \tau_s : \text{光源の時計で測る時間 (光源の固有時間)} \\ \text{I.C. : } \tau_s = 0 \text{ で } (ct_s, r_s) = (0, r_0), (u_s^{ct}, u_s^r) = (c, 0) \\ \quad (\rightarrow \text{時刻0に, } r_0 \text{ から初速0で落下。)} \end{array} \right.$$

→ 光源の4元速度 $u_s^\mu(\tau_s)$ は,

$$(u_s^{ct}, u_s^r, u_s^\theta, u_s^\varphi) = \left(\frac{cE}{f(r_s)}, -c\sqrt{E^2 - f(r_s)}, 0, 0 \right)$$

ただし, $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ (Schwarzschild 時空)

→ 光源の軌道 $x_s^\mu(\tau_s) = (ct_s(\tau_s), r_s(\tau_s), \frac{\pi}{2}, 0)$ も

媒介変数を使った初等関数で書ける。

◇ 放射光の測地線：動径方向のヌル測地線

$$\omega_p = \text{『測地線に沿った保存振動数』 (光線ごとに異なる値!)}$$

→ Schwarzschild 座標で，光の4元波数：

$$k^\mu = \left(\frac{\omega_p}{cf(r_l)}, \frac{\omega_p}{c}, 0, 0 \right) \quad (r_l : \text{光の } r \text{ 座標})$$

→ 光の軌道 x_l^μ と「光源が発光した瞬間の事象」 x_s^μ の関係（ヌル座標）：

$$ct_l - \tilde{r}_l = [ct_s - \tilde{r}_s]_{\text{at 発光した事象}}, \quad \tilde{r} = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

◇ 観測者の世界線（十分遠方で静止）：

$$x_{\text{obs}}^\mu = \left(ct_{\text{obs}}, r_{\text{obs}}, \frac{\pi}{2}, 0 \right), \quad r_{\text{obs}} = \text{一定} \quad (\rightarrow \infty)$$

→ $\begin{cases} \text{観測者の固有時間} : \tau_{\text{obs}} = t_{\text{obs}} \\ \text{観測者の4元速度} : u_{\text{obs}}^\mu = (c, 0, 0, 0) \end{cases}$

◇ 光の振動数

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{光源からの放射振動数} : \omega_s(\tau_s) := -k_\mu u_s^\mu \quad \text{at } r_s(\tau_s) \\ \text{観測者の測る振動数} : \omega_{\text{obs}}(t_{\text{obs}}) := -k_\mu u_{\text{obs}}^\mu \quad \text{at } r_{\text{obs}} \end{array} \right.$$

→ 前項までの関係から

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_s(\tau_s) = \frac{\omega_p}{f(r_s)} [E + \sqrt{E^2 - f(r_s)}] \\ \text{(注意: } \tau_s \text{ の値ごとに一つの光線が対応} \rightarrow \omega_p \text{ は } \tau_s \text{ の関数!)} \\ \omega_{\text{obs}}(t_{\text{obs}}) = \omega_p \quad (\text{as } r_{\text{obs}} \rightarrow \infty) \end{array} \right.$$

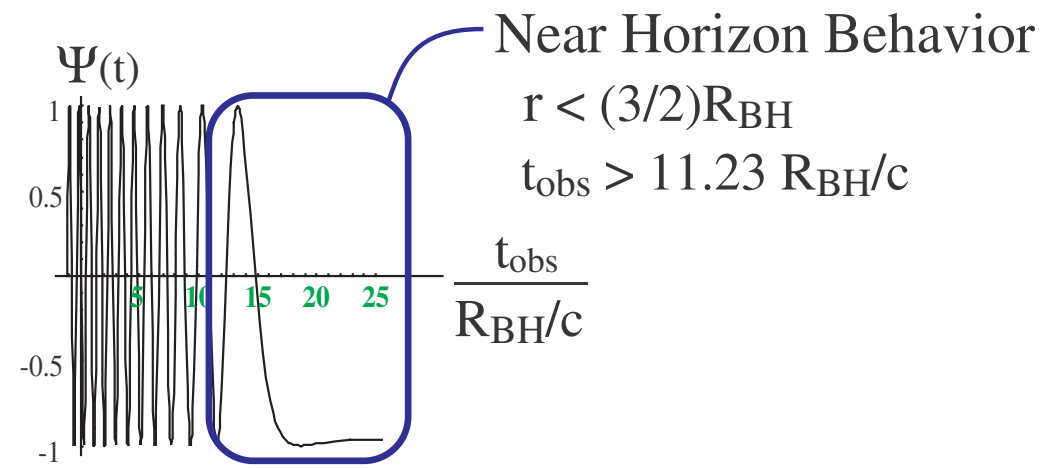
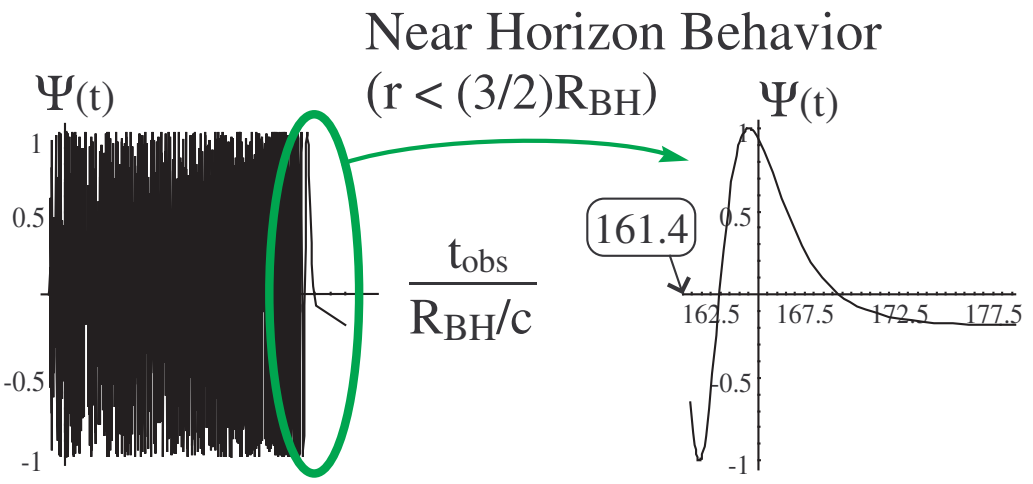
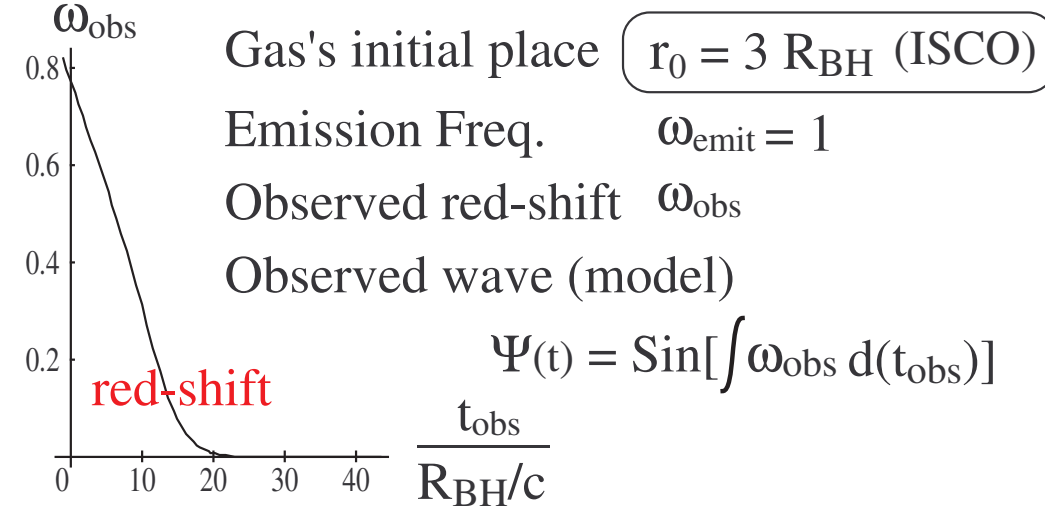
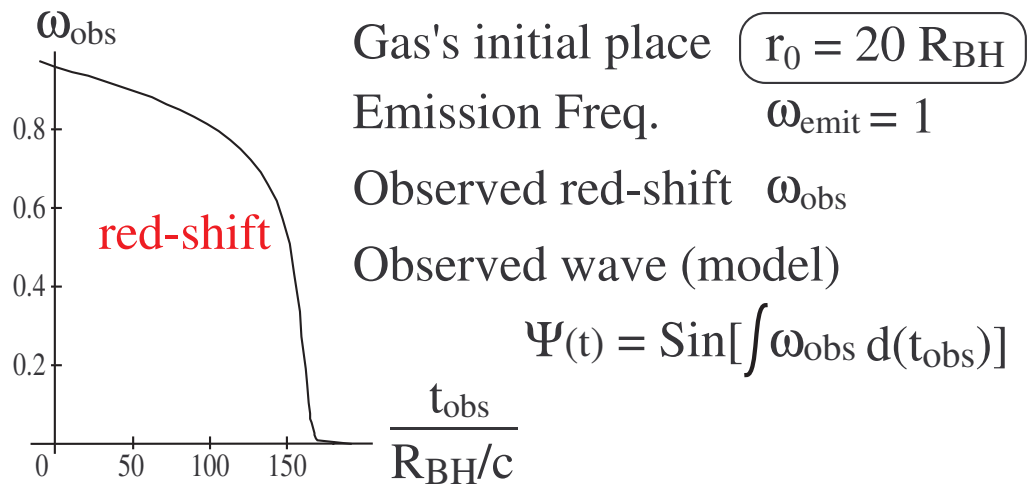
$$\rightarrow \text{観測される振動数: } \omega_{\text{obs}}(t_{\text{obs}}) = \frac{f(r_s)}{E + \sqrt{E^2 - f(r_s)}} \omega_s(\tau_s)$$

ただし遅延時間 (t_{obs} と τ_s の関係): $ct_s(\tau_s) - \tilde{r}_s(\tau_s) = ct_{\text{obs}} - \tilde{r}_{\text{obs}}$

(時刻 τ_s の発光が単色でない場合 → 振動数ごとに上の関係式)

これが**重力的ドップラーと運動論的ドップラーの混合効果**

● 光の振動の凍りつき（波長の無限の引き伸ばし）（ $\downarrow R_{\text{BH}} = 2M$ ）



→ 光源がBH地平面に近づいた後 ($r \sim 3M$) に「凍りつき」が見られる

3.4 パワースペクトル（前の具体例で計算）

BH 地平面の近傍を落ちる光源から出る光の 位相の観測値 は、

$$\Theta(t_{\text{obs}}) = \int \omega_{\text{obs}} dt_{\text{obs}} \sim \omega_{\text{emit}} \exp\left[-\frac{ct_{\text{obs}}}{2R_{\text{BH}}}\right]$$

→ パワー・スペクトルの典型的な形は **プランク分布を含む！**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{典型的な波動} : \Psi(t_{\text{obs}}) = A(\omega_{\text{emit}}) \exp[i\Theta(t_{\text{obs}})] \\ \text{フーリエ変換} : F(\Omega, \omega_{\text{emit}}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega t_{\text{obs}}} \Psi(t_{\text{obs}}) dt_{\text{obs}} \end{array} \right.$$

から、

$$P(\Omega) := |F(\Omega, \omega_{\text{emit}})|^2 \sim \frac{4\pi R_{\text{BH}} |A|^2}{c\Omega} \frac{1}{e^{4\pi R_{\text{BH}}\Omega/c} - 1}$$

→ 「**温度**」 $\frac{\hbar c}{4\pi R_{\text{BH}}}$ のプランク分布が得られれば BH 存在の確証！

（Kerr では「温度」と「化学ポテンシャル」で M, J が得られる。）

しかし、実際の測定がすごく上手くいっても理論的な注意点あり...

● 実数の波動： $\Psi_R(t_{\text{obs}}) := A(\omega_{\text{emit}}) \cos[\Theta(t_{\text{obs}}) + \Theta_0]$ (Θ_0 ：初期位相)

→ フーリエ変換： $F_R(\Omega, \omega_{\text{emit}}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega t_{\text{obs}}} \Psi_R(t_{\text{obs}}) dt_{\text{obs}}$

→ パワースペクトル：

$$P_R(\Omega) := |F_R(\Omega, \omega_{\text{emit}})|^2 \sim \frac{\pi R_{\text{BH}} A(\omega_{\text{emit}})^2}{c \Omega} \frac{h}{e^{4\pi R_{\text{BH}} \Omega / c} - 1}$$

ただし， $\begin{cases} h = e^{4\pi R_{\text{BH}} \Omega / c} + 2 \cos(\Theta_{\infty} + \Theta_0) e^{2\pi R_{\text{BH}} \Omega / c} + 1 \\ \Theta_{\infty} = \Theta(t_{\text{obs}} \rightarrow \infty) : \text{“Frozen” Phase} \end{cases}$

注意：実際に測定される波動では， $A(\omega_{\text{emit}})$ ， Θ_0 ， Θ_{∞} が分からないと，測定値にフィットすべき理論曲線が描けない。

3.5 観測値との比較（前回発表のトラペとほぼ同じだけど）

- 観測屋さん質問：

「波の引き伸ばし」を見るための典型的な時間サイズ

～ BHを光が横切る時間： $\Delta t_{\text{obs}} = \frac{GM_{\text{BH}}}{c^3}$

→ SgrA* の期待される質量スケール ~ 400 万 M_{\odot} ：

$\Delta t_{\text{obs}} \simeq 19$ 秒 ($c \Delta t_{\text{obs}} \simeq 0.04$ AU)

こんな低周波数の電波は $\left\{ \begin{array}{l} \text{そもそも地球まで届きますか？} \\ \text{検出技術はありますか？} \end{array} \right.$

(恒星サイズBH候補天体 $c \Delta t \sim R_{\odot}$ なら可能ですか ???)

→ SgrA* ではどうも無理そうなので (!?) , プランク分布の次善の策：

観測周波数の時間変化から時空の情報を引き出せるか !?

- 観測値 : $\left\{ \begin{array}{l} 102 \text{ GHz} \rightarrow 90 \text{ GHz} : \text{時間差なさそう (誤差はどの程度?)} \\ \hspace{10em} (\text{by 宮崎, 坪井, 堤}) \\ 43 \text{ GHz} \rightarrow 22 \text{ GHz} : \text{時間差 } 20 - 30 \text{ min.} \\ \hspace{10em} (\text{by F.Yusef-Zadeh, et al.}) \end{array} \right.$

→ 「Schwarzschild BH に向かって視線方向に落下する光源」では、
上手く合わせられない:

$$\left\{ \begin{array}{l} 22/43 \simeq 0.5 \text{ という減少を } 30 \text{ 分で起こす} \\ 102 \text{ GHz} \rightarrow 90 \text{ GHz} \text{ の変化を時間差なしで起こす} \end{array} \right.$$

を合わすのが大変。

→ 減少率 0.5 が重力ドップラーだとすると割と強い制限を得られる。

よく考えれば、観測周波数の変化の観測から

BH 質量と角運動量に割と強い制限を与えられると期待。

4. まとめ

- 目標：「BH候補」を「BHそのもの」にする開拓者
- 理論整備：SgrA* に落下するガスの利用
 - Kerr BH に落ちる粒子が出す光のパワースペクトルの測定値からBH時空が備える普遍的なプランク分布の評価
- … この理解のポイントは
 - 重力的ドップラーと運動論的ドップラーの混合効果
 - ↓
 - この意味での「相対論的ドップラー効果」の検出が重要！
- SgrA* に限らず恒星サイズBH候補天体でも、『光の振動の凍りつき』や『プランク分布』を狙える良いターゲットはないか？
 - 銀河中心に限らず，ターゲットの様々な可能性を追及しましょう!?