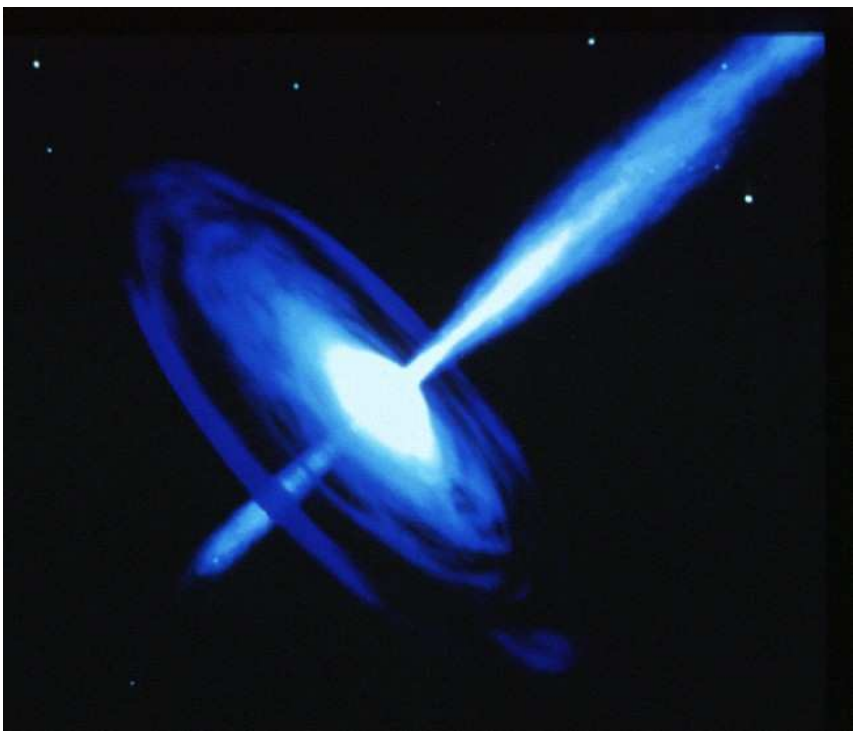
大阪市立大学 *22-24 Feb., 2006*

「ブラックホール・エンジン」を探る

= 一般相対論的磁気流体力学入門 =

高橋真聡 [1]



Jet の起源は？ — BH が黒幕か !?

[1]たかはし まさあき
448-8542 愛知県刈谷市井ヶ谷町広沢１ 愛知教育大学 理科教育講座
email: takahasi@phyas.aichi-edu.ac.jp

目 次

第 1 章 Introduction **4**

第 2 章 Where is a Black Hole ? **6**
2.1 Compact objects としてのブラックホール候補 7
2.2 活動銀河中心核にブラックホールが存在すると考えられる根拠 7
2.3 M87/NGC4261 8
2.4 NGC4258 8
2.5 MCG-6-30-15 9

第 3 章 ブラックホール時空について **10**
3.1 曲がった時空とは ? 10
3.2 重力場の中での粒子の運動 12
3.3 重力場の中での荷電粒子の運動 13
3.4 重力赤方偏移 14
3.5 時空の引きずりについて 15

第 4 章 Energy generation in Black Hole Magnetosphere **18**
4.1 Gravitational energy of accreting matters 18
4.2 Energy extraction from a Rotating Black Hole 18
4.2.1 Penrose process 18
4.2.2 Super-Radiance of waves 20
4.2.3 Blandford-Znajek process 20
4.2.4 Negative-Energy Plasma Accretions 21

第 5 章 Black Hole and Magnetic Fields **23**
5.1 ブラックホールと磁場の基礎知識 23
5.2 Vacuum Magnetosphere 24
5.3 Force-free Magnetosphere 26
5.4 Inflow and Outflow plasmas 27
5.5 The structure of Magnetosphere 28

第 6 章 相対論的磁気流体力学 **30**
6.1 Basic equations 30
6.2 Relativistic Bernoulli Equation and Force-Balance Equation 32

第 7 章 Trans-Magnetosonic MHD flows in the BH Magnetosphere **35**
7.1 Light Surfaces 35
7.2 Alfvén Points 38

7.3 Magnetosonic Points 39
7.4 Trans-Magnetosonic Accretions 42

第 8 章 まとめ **45**
8.1 ブラックホール観測時代に向けて 45
8.2 極限物理学の探求 45

付 録 A Bondi flow model (Newtonian HD flows) **46**

付 録 B Weber-Davis (1967) model [Newtonian MHD flows] **49**
B.1 Basic equations 49
B.2 Wind equation 50

付 録 C Conservation laws for stationary and axisymmetric MHD flows **52**

付 録 D Derivation of the Poloidal equation **55**

付 録 E Derivation of the Trans-field equation **57**

第1章　Introduction

"intro.tex" 06 Jan., 2005

★ 活動銀河中心核 (Active Galactic Nuclei: AGNs) [1]

活動銀河からの放射は、数日から数百日のタイムスケールで急激に変光しており、中心核の活動領域は非常に小さいことがわかる。放出されるエネルギーは通常の銀河の 100 倍から 1 万倍と非常に強く、電波から X 線までの広い波長域にわたっている。 また、中心から吹き出ているジェット (ほぼ光速のプラズマビーム流) も活動銀河の特徴であり、「超高速現象」が見られる天体もある。

- 電波銀河 (**Radio galaxies**) : 通常の銀河に比べて非常に強い電波を放出している銀河。巨大な楕円銀河であることが多い。代表的なものでは、光で見える銀河の外側に伸びた一対の電波源 (二つ目玉電波源) が存在し、そこから電波が出ている。また、しばしば中心領域と二つ目玉電波源を結ぶジェットの吹き出しているものもある。これは銀河中心領域での激しい活動性の結果、電波源が形成されることを示している。　⇒ NGC5128 (ケンタウルス座) , M87 (おとめ座) など。

- セイファート銀河 (**Seyfert galaxies**) : 明るい恒星状の中心核を持つ銀河。渦巻銀河が多く、放射エネルギーの大部分が赤外線領域にあり、全放射エネルギーが通常の銀河よりはるかに多い。セイファート銀河は、電波銀河と同様、活動の盛んな中心核を持ち、変更するものが多い。しかし、セイファート銀河は、電波銀河と違って円盤構造を持つ銀河である。 1 型セイファートと 2 型セイファートに分類されてる。　⇒ NGC4151 など。

- クエーサー (**QSO**) : 電波銀河もセイファート銀河も活動的な中心核を持っているが、とくに活発なものがクエーサーである。この天体は準恒星状天体とよばれ、光源の小さな恒星状に見える。しかし、周辺には淡い恒星の集団があり、銀河である。クエーサーは、普通の銀河の 1000 倍ものエネルギーを中心核から出している。クエーサーのもう一つの大きな特徴は、赤方偏移が大きいことであり、クエーサーは非常に遠くの銀河、すなわち古い銀河と考えられている。したがって、宇宙の誕生間もない頃の状態を知るのに重要な天体である。 ⇒ 3C273 など。

- **BLLac 銀河 (BL Lac objects)** : クエーサーに似てきわめて明るく、変光および偏光しているが、強い輝線を持たない。

- etc

これらの天体のエネルギー源は、銀河の中心核領域にある巨大なブラックホールに落ち込む物質 (降着ガス円盤) が解放する重力エネルギーと考えられている。この重力エネルギーは熱エネルギーに変わり、最終的には光のエネルギーとして放射され、観測されることになる。巨大ブラックホールの質量は典型的には太陽の約 1 億倍、また降着円盤のサイズは 1 pc 程度、中心の温度は 10 万度程度だと見積もられている。活動銀河にはいくつかの種類があるが、放射エネルギー量に大きな

[1] (「地学 II」啓林館 / 「新・宇宙を解く」恒星社)

違いがあるものの、核の構造やエネルギー発生機構は質的に同じだろう、と考えられている。すなわち、中心のブラックホールの周りに降着ガス円盤があって、さらにその外側 10pc ぐらいのところに輝線を吸収するガスのトーラスが存在している。中心領域からはジェットが放出されている。見る方向によって異なる描像が得られることになるが、このことで活動銀河の多様性を説明しようとする考えからで、「AGN の統一モデル」と呼ばれる。

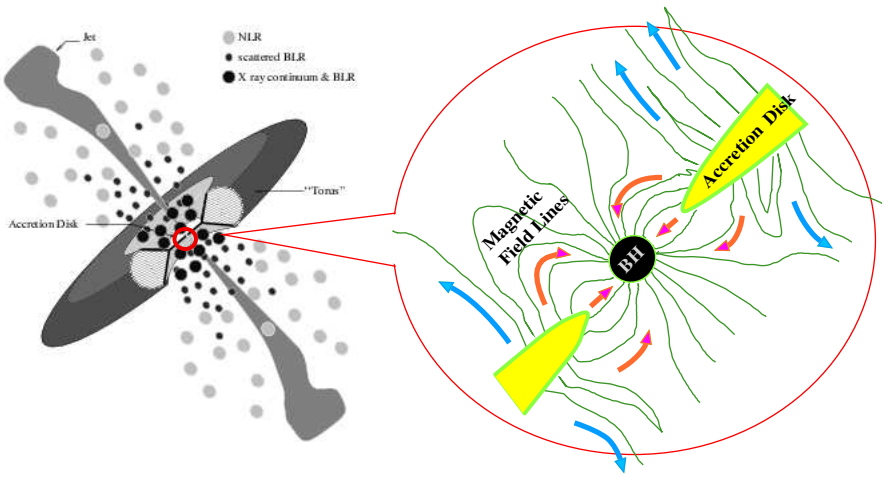


図 1.1: 活動銀河の統一モデル。中心領域には「ブラックホール磁気圏」が存在して激しい活動性を生み出している？

★ 活動銀河中心核の放射メカニズム

- 放射のエネルギー源
  物質降着による重力エネルギーの解放 → 粒子加速とプラズマ加熱に転化 → 電磁放射
  (その電磁放射メカニズムの詳細はよくわかっていない)
- AGN からの電波や光 ··· 非熱的なスペクトル (巾関数型のスペクトル)、顕著な偏光 (polarization)
  → 相対論的高速の電子によるシンクロトロン放射や逆コンプトン効果によるものと解釈。核の近傍で常に粒子の加速が極めて効率よく行なわれている。このことは、宇宙ジェットとどのように結びついて来るのだろうか? (宇宙ジェットは大域的に広がった光速度に近い高速プラズマ噴出流であるが、その源として核の近傍での粒子の加速は重要であろう。)
- 紫外領域では、非熱成分以外に熱的成分と考えられるスペクトルの山が存在する。
  → ブラックホールの周りの降着円盤からの熱放射と考えられる。

★ 宇宙ジェットの発生機構

活動銀河中心核やコンパクト X 線天体からは，しばしば光速近くにまで加速されたプラズマビーム流 (ジェット) が観測されている．また，最近話題のγ 線バースト現象においてもジェットが本質的な役割を果たしていると考えられている。その発生機構については、磁場 (磁気圏) を利用したもの、輻射圧を利用したものなどいくつかあるが、定説はまだ存在しないのが現状である。

第2章　Where is a Black Hole ?

"bh-obs.tex"

- Compact X-ray sources
- Active galactic nuclei (AGNs)
- γ-ray burst ?

Why is a Black Hole required ?

- Huge energy output
- time variability
- super-massive object

The informations from the gravitational field ...

- Gravitational Lens effects
- Gravitational redshift/dragging effects
- Broaden Fe-lines spectrum
- Jets

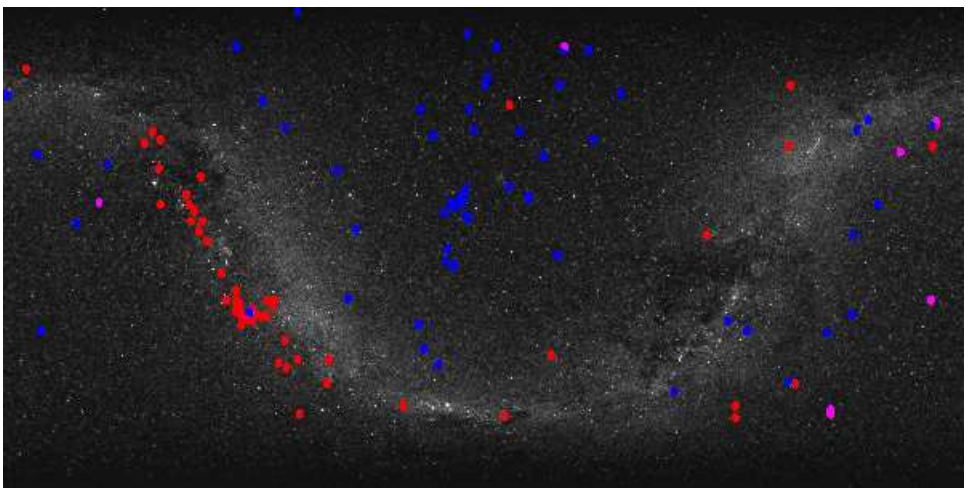


図 2.1: ブラックホール候補天体。巨大 BH (青)、恒星サイズ BH (赤)、中間質量 BH (ピンク) 。

2.1 Compact objects としてのブラックホール候補

Compact objects としてのブラックホール候補としては、まず Cygnus X1 があげられる。この天体は、X-ray binary system を構成しており、その強い X-ray の短い時間変動よりコンパクトであることがわかっている。また、その軌道運動より質量 ($M > 3.20M_{\odot}$) が中性子星の上限質量を越えていることがわかっている。他の候補としては、A0600-00 があげられる ($M > 3.4M_{\odot}$)。大マゼラン星雲の LMC-X3 もブラックホール候補である。その質量は、$M \sim 4$–$9M_{\odot}$ と見積もられている。[2]

★ ブラックホール連星系 [22]

伴星の質量推定値が中性子星質量の理論的上限値 (3 倍の太陽質量) を越えていることらからブラックホールであると信じられている。質量推定は、相方の恒星の軌道運動をドップラー観測で調べることで行なわれる。連星軌道の傾斜角に不確定性が残る場合、質量の下限値ということになるが、3 倍の太陽質量以上という基準を満たすブラックホール連星系は、現在 (1997 年) のところ 10 個程知られている。

質量の推定されている銀河系内ブラックホール候補[1]

名前	質量	コメント
Cyg X-1	$\geq 7M_{\odot}$	はくちょう座 X-1
LMC X-3	$\geq 7M_{\odot}$	大マゼラン星雲
LMC X-1	$\sim 6M_{\odot}$ (?)	大マゼラン星雲
A 0620-00	$\geq 7.3M_{\odot}$	X 線新星
GS 2000+250	$6 \sim 7.5M_{\odot}$	X 線新星 / 1988 年こぎつね座新星
GS 2023+338	$8 \sim 15.5M_{\odot}$	X 線新星 / はくちょう座 V404 星
GS 1124-683	$\sim 6M_{\odot}$	X 線新星 / 1991 年はえ座新星
GRO J 1655-40	$4 \sim 5.4M_{\odot}$	X 線新星
H 1705-250	$\sim 7.5M_{\odot}$	X 線新星
GRO J 0422+32	$\geq 3.2M_{\odot}$	X 線新星

★ X 線領域での性質

- ランダムな激しい時間変動
- 黒体輻射形のエネルギースペクトルとベキ関数型のエネルギー形の間を X 線強度の高低に伴って遷移する

2.2 活動銀河中心核にブラックホールが存在すると考えられる根拠

[5]

- エネルギーの解放効率が良いこと [45][39][38] :
  明るい銀河は平均して $\sim 10^5 h^{-3}\mathrm{M}_{\odot}c^2$ (ここで h はハッブル定数であり、$100\mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}$ を単位としている) のエネルギーを放出しているが、各々の銀河中心部の質量と比べると、

[1]「X 線でさぐるブラックホール」北本俊二著 (裳華房) より

$\geq 0.01h^{-3}$ の割合となる。核エネルギーによるエネルギー生成では、このような高い効率のエネルギー生成は説明できず、重力エネルギーによるエネルギー解放がもっともらしい。

- 短い時間変動 <ブラックホールのサイズ>:
  １分程度の時間周期でスペクトルが時間変動する (特に X 線の波長帯において)。これは、$\sim 10^7 \mathrm{M}_\odot$ のブラックホールの light crossing time と同程度である。大まかにいって、時間変動の周期は AGN の光度が大きい程長くなる。AGN の X 線放射強度の時間変動からブラックホールの質量を推定する方法については林田 (2000)[22] を参照されたい。

- 超光速プラズマ流 :
  宇宙ジェットの存在が数多く観測されている。これは、ほぼ光速度で運動するプラズマの放出流であり、ある特定の方向 (双方向) に $\geq 10^7$ year の広がりを持つ。回転しているブラックホールからのエネルギー放出と関係があるのだろうか (compact gyroscope として働く)?

- 星の速度分散 <ビリアル定理> :
  銀河中心核の星の速度分散はおよそ $\sim 10^{-3}c$ なので、質量 M のブラックホールが存在するとすると、$\sim 10^6 \times$(シュワルツシルド半径) $\sim 10 M_8 \mathrm{pc}$ ($M_8 = M/10^8 M_\odot$) が重力圏となる。このことより、ブラックホールの質量は $\sim 3 \times 10^6 M_\odot$ から $\sim 5 \times 10^8 M_\odot$ と見積もられている。この方法は、我々の銀河中心部や近傍の銀河に適用され、ほとんどの通常銀河の中心部に超巨大ブラックホールが存在していると考えられている。

- ブロードライン <ドップラー効果> :
  多くの銀河核は数千 km/s の faint broad emission lines を持つが、このことは深い重力ポテンシャルの井戸の存在を示している。輝線は、中心核からの連続光がその周りを運動しているガス雲を光電離することで生じていると考えられる。

- 広がりを持った鉄輝線のプロファイル <重力赤方偏移> :
  セイファート銀河において、広がりを持ち “二つのピーク” を持つ 鉄輝線が観測されている。この鉄輝線はブラックホール半径の 数倍以内のところから発せられていると考えられる。今後打ち上げ 予定の天体 X 線観測衛星がもたらす詳細なデータにより、ブラック ホールの周りのプラズマの様子やブラックホールそのものの情報が直接得られると期待される。

銀河中心核には $\sim 10^6 M_\odot$–$10^9 M_\odot$ のブラックホールが存在し、降着円盤を伴っていると考えられている。しかしながら、これ以外にも lower power AGN における radiation、starburst、supernovae、massive stars に由来するもの、 compact stellar remnants などの寄与がありうることに注意すべきである。

2.3 M87/NGC4261

ハッブル宇宙望遠鏡による観測により、回転している円盤 (半径約 60 光年) の観測– 回転速度から円盤の内側の質量を太陽の 10 億倍以上と推定。

2.4 NGC4258

AGN のブラックホール質量を推定するもっとも確実な方法は、ケプラー運動をトレースし、軌道半径 r と速度 v から、天体質量を $M = rv^2/G$ として求めることである。

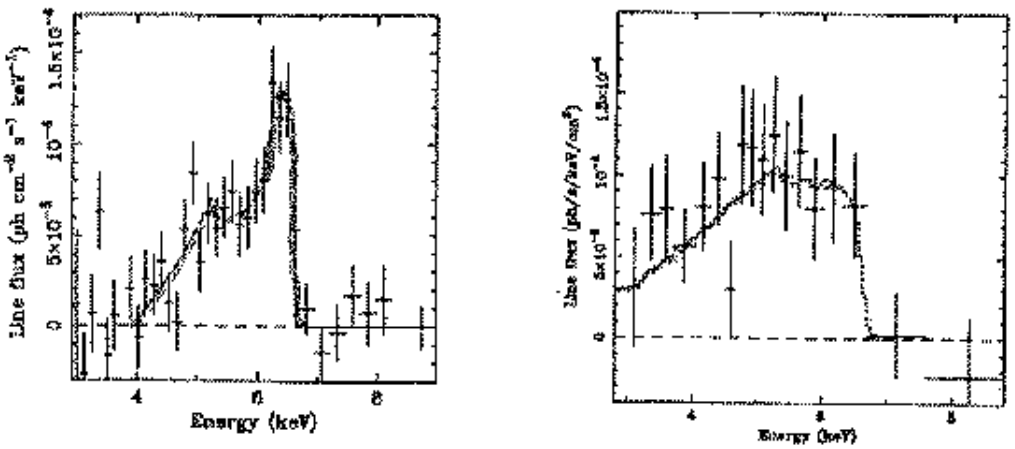


図 2.2: The iron lines of Seyfert galaxies MCG-6-3-15. One is the double-horned shape and the other is extremely broaden shape.

VLBA(超長基線電波干渉計) により、波長 1.3cm の水メーザー線で 3000 分の 1 秒という空間分解能が達成された。[2] NGC4258 の場合、(宇宙膨張膨張による後退速度)$\pm$1000 km/s であり、しかも中心からの距離の 1/2 乗に反比例して外側程速度が減少していた。このことは、ケプラー回転している円盤からの水メーザー線放出と解釈されている。この円盤の半径 (水メーザーの位置) は 0.4 $\sim$ 0.8 光年であり、これより内側の質量は 3.6×10^7 $M_\odot$ である。このスケール内にこれだけの質量が存在することより、中心に超巨大ブラックホールが存在していると考えられている。[3]

2.5 MCG-6-30-15

X 線天体観測衛星 ASCA により、二つのピークをもつ線幅の広い鉄輝線が観測された (図 2.2)。この輝線は非対称であり、赤い側に伸びたテールを持つ。これは、ブラックホールの周りを回転するガスから放出された鉄輝線が回転によるドップラー効果と強重力による赤方偏移により作られたスペクトル形状と考えられる。今後、観測の精度が向上することにより、ブラックホール現実に存在する有力な直接的証拠になると期待されている。

[2]メーザー現象が起こるためには、原子・分子の分布においてエネルギー準位に逆転現象が生じていることが必要である。熱平衡状態 (ボルツマン分布) からずれた状態でエネルギーの高い準位によりたくさんの原子・分子が分布することが求められる。星間空間では物質の密度が極端に低いため、しばしば熱平衡からずれてこのような逆転現象が起こる。

[3]他の天体にも適応されつつあるが、メーザーが観測にかかるためにはエッジオンの系でないと難しいようである。

第3章　ブラックホール時空について

"bh-space.tex"

3.1　曲がった時空とは？

< 場の古典論 [30, 10 章-§82] >

慣性基準系 (デカルト座標系) では、世界間隔 ds は次の関係で与えられる：

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.1}$$

このような 4 次元座標系はガリレイ的とよばれる。

非慣性基準系の場合は、より一般的な 2 次形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.2}$$

で表される。ここで、4 次元座標系 x^0, x^1, x^2, x^3 は曲線座標であり、$g_{\mu\nu}$ はこれらの座標のある関数である。この $g_{\mu\nu}$ は、時間・空間の計量 (**metric**) とよばれ、各曲線座標のすべての幾何学的性質を決定する。

< 問題 >　角速度 Ω で一様に回転している座標系での世界間隔を求めよ。ds^2 がもはや 4 つの座標系の微分の 2 乗の和でなくなることを確かめよ。

[1]

等価原理について....
"非慣性基準系は適当な重力場に同等である。" という原理
しかしながら、非慣性基準系に同等な場は慣性系へ移ると消えてしまうのに対し、重力場はどのように基準系を選んでみても消去し尽くしてしまうことができない。基準系の適当な選択によって達成できることは、場を一様と見なしてもよいくらいに小さな空間の与えれた領域の中で、重力場を消去することである。

さて、"真の" 重力場は、いかなる座標変換によっても消去することができない。すなわち、重力場が存在するときの時間・空間は、どのような座標変換をほどこしても $g_{\mu\nu}$ を全空間にわたって

[1] < < 答 > > 軸の回りに回転するとして、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

によって変換すると、世界間隔は

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt$$

という形になる。時間座標の変換がどうあろうとも座標の微分の 2 乗の和で表すことはできない。

ガリレイ的な値を持つようにはできない。座標変換によってガリレイ的な座標系に変換可能な時空が平坦な空間とよばれるのに対して、そのよう変換が不可能な時空は曲がっているといわれる。

曲線座標について： 重力場を研究する場合には、曲線座標系において現象を考察する必要に直面する。

反変ベクトル:
$x^\mu = f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ 座標変換を考える。

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} dx'^\lambda \tag{3.3}$$

共変ベクトル:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x'^\lambda} \tag{3.4}$$

ここで、ϕ はあるスカラーである。

共変微分:
曲線座標系でのベクトルの微分を考える。2 つの無限にわずか隔たったベクトルを比べるためには、それらの一方を他方の位置する点まで “平行移動” させなければならない。このとき、ガリレイ座標系においてはベクトルの成分は変化しないが、曲線座標を使うときには一般にベクトルの成分は変化する。また、基底ベクトルの微分についても考慮しなければならない。したがって、ガリレイ座標系ではベクトル A^μ の微分はふつうの微分 dA^μ であるが、曲線座標系ではベクトルの差は dA^μ と一致しない。このずれを δA^μ と書けば、いまや同一点にある 2 つのベクトルの差 DA^μ は

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu \tag{5a}$$

である。ベクトルの成分の差 δA^μ は、成分の大きさ A^μ と移動した距離 dx^μ に比例し、

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{5b}$$

の形に書ける。ここで、$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ は座標の関数であり、クリストッフェル記号とよばれるものであり、以下で与えられる。

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}) \tag{3.6}$$

このクリストッフェル記号は、任意の座標系で $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ という対称性をもつ。[2]

ベクトル $\vec{A} \equiv A^\alpha \vec{e}_\alpha$ の微分として、

$$A^\alpha_{;\beta} \equiv A^\alpha_{,\beta} + A^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \tag{3.7}$$

を定義し、共変微分と呼ぶ。基底一形式 $\tilde{p}$ の共変微分は

$$p_{\alpha;\beta} \equiv A_{\alpha,\beta} - A_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

さらに、二階のテンソルに関しては、

$$T_{\mu\nu;\beta} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta} \tag{3.9}$$

$$A^{\mu\nu}{}_{;\beta} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} \tag{3.10}$$

$$B^\mu{}_{\nu;\beta} = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - B^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \tag{3.11}$$

[2]ある座標系で与えられた集合 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は、別の座標系の集合 $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$ がらのテンソル変換では得られない。たとえば、デカルト座標においては $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv 0$ であるが、他の座標系ではゼロではない。このことより、$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ はテンソルの成分ではないとされる。 （シュッツ「相対論入門 (上)」江里口、二間瀬 訳）

3.2　重力場の中での粒子の運動

< 場の古典論 [30, 10 章-§87] >

特殊相対性理論によると、自由な物質粒子の運動は最小作用の原理

$$\delta \int ds = 0 \tag{3.12}$$

によって決まる。この原理によれば、粒子の世界線は与えられた世界点を結ぶ停留曲線となる — 今の場合直線となり、通常の 3 次元空間では一様な直線運動に対応する。さて、世界間隔 ds は、以下のように書くことができる：

$$ds = (g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2} d\lambda \tag{3.13}$$

ここで、$\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda = p^\alpha = mu^\alpha$ であり、λ は世界線に沿った任意のパラメータである。この粒子の運動に対して，(3.12) が実現するためにはラグランジアン

$$\mathcal{L} = (g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2} \tag{3.14}$$

に対する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{3.15}$$

が満足されなければならない。

一般相対性理論の場合には、重力場は (ds の表式において) 4 次元空間の計量 $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ を通じて表現されている。したがって、重力場の中での粒子の運動は、(3.12) 式と同じかたちの最小作用の原理によって決定されるはずである。重力場中の粒子の運動は、ラグランジアン

$$\mathcal{L} = [g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2} \tag{3.16}$$

によって見出すことができる。運動方程式は、$Du^\alpha = 0$ あるいは

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \tag{3.17}$$

となる。この方程式が与える停留曲線 (4 次元空間における測地線) はもはや “直線” ではなく、現実の粒子の運動は一様でもまっすぐでもない。重力場中の粒子の運動は $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ という量によって決まることがわかる。導関数 d^2x^α/ds^2 は粒子の 4 元加速度であるから $-m\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$ という量は、重力場の中の粒子に働く “4 元力” とよぶことができる。ここで、テンソル $g_{\alpha\beta}$ は重力場の “ポテンシャル” の役割をしている— $g_{\alpha\beta}$ の導関数が場の “強さ” $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ を決定する。

有効ポテンシャル:

ブラックホールの周りを運動するテスト粒子の運動は (静止質量を m , 粒子の 4 元速度を u^α とする) , 上記の座標系を用いて運動方程式を解くことで得られる . 定常・軸対称の仮定より粒子のエネルギーと角運動量が保存することが示される ($E \equiv p_t = \text{constant}$, $L \equiv -p_\phi = \text{constant}$, $p_\alpha \equiv mcu_\alpha$) . 粒子のエネルギーは , 運動エネルギー K の部分と有効ポテンシャル V の部分に分けて考えることができる . すなわち ,

$$E = K + V \ , \tag{3.18}$$

と書けるが，この有効ポテンシャルが決まれば，その中を一定のエネルギーで運動する粒子の運動は理解できる．Kerr black hole が作る有効ポテンシャルは，重力場の強さと時空の引きずりの程度，および粒子の単位質量当りの角運動量 L/μ に依存して決まり，粒子に対するハミルトン-ヤコビ方程式 $g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta - \mu^2 c^2 = 0$ により (e.g., Misner, Thorne & Wheeler 1973)

$$V_\pm^{1/2} \equiv \frac{E}{|L|} = \frac{\pm g^{t\phi} + \sqrt{(g^{t\phi})^2 - g^{tt}(g^{\phi\phi} - m^2/L^2)}}{g^{tt}} \ . \tag{3.19}$$

で与えられる．複合の上側の符号は順方向の軌道 ($L > 0$) を示し，下側の符号は逆方向の軌道 ($L < 0$) を示している．Kerr black hole に降着するまでに物質が解放できる重力エネルギーは，最大で静止質量の約 42% である．このエネルギーは，ブラックホールの周りの最も内側の安定軌道に至るまでに解放できるエネルギーである．

3.3 重力場の中での荷電粒子の運動

定常 · 軸対称な電磁場 A_μ :

$$A_r = A_\theta = 0 \tag{20a}$$
$$A_t = A_t(r,\theta) \tag{20b}$$
$$A_\phi = A_\phi(r,\theta) \tag{20c}$$

が存在するとき、電荷 e を持つ粒子のラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - eA_\alpha \dot{x}^\alpha \tag{3.21}$$

である。このラグランジアンに関する Euler-Lagrange 方程式は、時間座標 t と方位角 ϕ に関して積分できて、 2 つの運動の保存量

$$E \equiv mu_t + eA_t = \text{constant} \ , \tag{22a}$$
$$-L \equiv mu_\phi + eA_\phi = \text{constant} \tag{22b}$$

を得る。また、r、θ 方向の運動に関しては、ローレンツ力による運動方程式

$$mu^A_{;\mu} u^\mu = eF^A{}_\mu u^\mu \qquad (A = r, \theta) \tag{3.23}$$

と等価である。ここで、$F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルで $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ である。

有効ポテンシャル:

荷電粒子の運動を理解する上で、以下のような (重力+遠心力+電磁力による) 有効ポテンシャルを導入すると便利である。$u_\alpha u^\alpha = 1$ に保存量 (22a)、(22b) を代入し、E についての表式を求め、$u^A = 0$ (poloidal 方向の運動エネルギーをゼロとする) としたときの $E = E_0$ を有効ポテンシャル $V(r, \theta; a, L, A_\mu)$ と定義する。すなわち、

$$g^{tt}E_0^2 - 2g^{t\phi}E_0(L + qA_\phi) + g^{\phi\phi}(L + qA_\phi)^2 - m^2 = 0 \tag{3.24}$$

より[3]

$$V_{\text{eff}} = \frac{E_0}{m} = \frac{q}{m}A_t \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \left(\frac{L}{m} + \frac{q}{m}A_\phi \right) - \frac{1}{g_{\phi\phi}} \left\{ \rho_w^2 \left[\left(\frac{L}{m} + \frac{q}{m}A_\phi \right)^2 - g_{\phi\phi} \right] \right\}^{1/2} \tag{3.25}$$

[3] E.P.Esteban & I.R.Medina, 1990, PRD, 42, 307

と表される。シュバルツシルド・ブラックホールの場合、$(a = 0,\ A_t = 0)$ には、

$$V_{\rm eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{L}{m} + \frac{qA_\phi}{m}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.26}$$

$$= \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{(GM/c^2)^2}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{L\cdot c}{mc^2\cdot GM/c^2} + \frac{qA_\phi}{mc^2\cdot GM/c^2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.27}$$

となる。参考までに、 $c = G = 1$ の単位系を用いない場合の表現を二段目の式として示した。具体的な物理量を入れた議論が必要な場合には、単位を通常の (cgs または MKS) に戻す必要がある。

< 発展 >　いろいろな磁場形状 (一様磁場、ダイポール磁場など) を仮定して、荷電粒子の軌道を調べてみよう。

3.4　重力赤方偏移

電磁波の発信機 (emitter) と受信機 (receiver) を用意する。これらの装置は、静的な重力場中のある位置にそれぞれ固定されているとする。発信機の発する光線の振動数を ν とすると、これは波の山から山へ位相を変化させるのに要する固有時間[4] の逆数であり、

$$\nu_{\rm em} = \frac{1}{d\tau_{\rm em}} = \frac{c}{(g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}_{\rm em}} \tag{3.29}$$

となる。いま、発信機は空間の固定点にあるので、$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ である。受信機に関して同様のことを考えると、(3.29) 式と同様の式が得られ、

$$\frac{\nu_{\rm rec}}{\nu_{\rm em}} = \frac{[(g_{tt})^{1/2}dx^0]_{\rm em}}{[(g_{tt})^{1/2}dx^0]_{\rm rec}} \tag{3.30}$$

を得る。さて、いま重力場は静的であるので、波の山から山へ位相を変えるのに要する座標時間間隔 dx^0 は、発信機と受信機で同じとなる (ある時間間隔 dx^0 を置いて発せられた 2 本の光線は、空間的には全く同じ経路をたどり、時間軸方向に dx^0 だけシフトした世界線を描くことになる)。したがって、

$$\frac{\nu_{\rm rec}}{\nu_{\rm em}} = \frac{(g_{tt})^{1/2}_{\rm em}}{(g_{tt})^{1/2}_{\rm rec}} \tag{3.31}$$

を得る。このことは、発信機と受信機の位置における重力ポテンシャルの違いによる振動数の変化の様子を意味している (重力赤方偏移)。

[4]「二つの事象間を実際に通過する時計によって刻まれた時間」として “固有時間” τ が定義されている。この時計は、質点とともに運動する座標系 $\bar{O}$ において静止 $(d\bar{x} = d\bar{y} = d\bar{z} = 0)$ しているので、

$$ds^2 = -d\tau^2 \tag{3.28}$$

の関係が成り立つ。(質点の静止系で計った時間を表わす。)

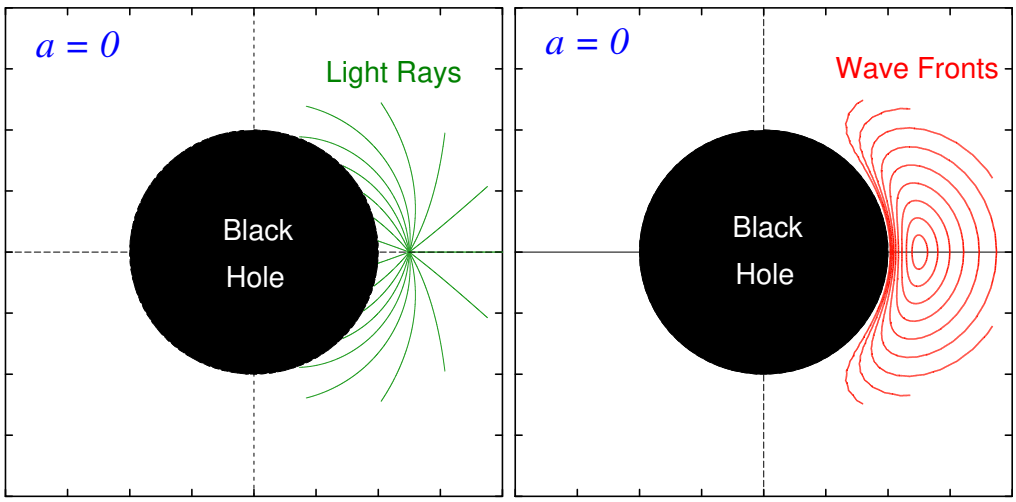


図 3.1: シュバルツシルト時空における光線の軌道 (left) と光波面 (right)。

3.5 時空の引きずりについて

回転しているブラックホール (Kerr Black Hole) が作る時空は、Boyer-Lindquist (1967) coordinate:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2+\frac{4aMr\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi \\ &\quad -\left(r^2+a^2+\frac{2a^2Mr\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2-\frac{\Sigma}{\Delta}dr^2-\Sigma d\theta^2 \end{aligned} \tag{32a}$$

によって記述される。ここで、

$$a \equiv \frac{J}{M} \tag{32b}$$

$$\Delta \equiv r^2-2Mr+a^2 \tag{32c}$$

$$\Sigma \equiv r^2+a^2\cos^2\theta \tag{32d}$$

であり、ブラックホールは $+\phi$ の方向に回転しているとする。

$\Delta=0$ のとき上記の metric は発散するが、この発散は物理的なものではなく、座標の選び方によるものである。例えば、自由落下する観測者に張りついた座標系にとってはこの発散は生じない。$\Delta=0$ の地点は “event horizon” と呼ばれ、

$$r_+ = M+\sqrt{M^2-a^2} \tag{3.33}$$

で与えられる。この座標系は $r\to\infty$ で球座標に漸近する。

< 問題 > Kerr 時空におけるテスト粒子の運動方程式を導け。また、 3 つの運動の保存量が存在することを確かめよ。

[5]

[5] Kerr 時空におけるテスト粒子の運動については、例えば参考文献 [3]、[40, 12 章]、を参照すること。

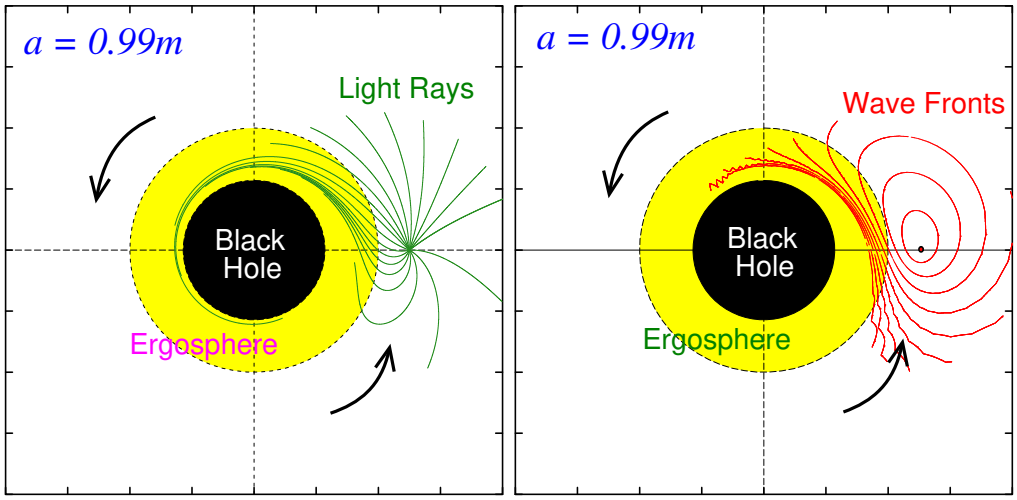


図 3.2: カー時空 (自転する BH の場合) における光線の軌道 (left) と光波面 (right)。

次に、定常観測者 (statinary observer) を考えよう。この観測者は、 r と θ が固定され、一定の角速度 $\Omega \equiv d\phi/dt = u^\phi/u^t$ で回転している。この観測者が timelike な世界線をえがくためには、$u_\alpha u^\alpha = 1$ の条件より

$$\Omega_{\rm min} < \Omega < \Omega_{\rm max} \tag{3.34}$$

でなければならない。ここで、

$$\Omega_{\rm max/min} = \frac{g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{(-g_{\phi\phi})} = \omega \pm \frac{\rho_w}{(-g_{\phi\phi})} \tag{3.35}$$

である。ただし、$\omega \equiv -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ であり、$\rho_w^2 \equiv g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \Delta \sin^2\theta$ である。

上式で特に注意すべき点は、$g_{tt} = 0$ のとき $\Omega_{\rm min} = 0$ となることである。このときの半径は、

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$$

であるが、$r_+ < r < r_0$ の観測者に対しては常に $\Omega > 0$ となる。このことは、この領域のある地点に静止 $(\Omega = 0)$ した観測者が存在できないことを意味する。この領域では、ブラックホールによる $(+\phi$ 方向への) 時空の引きずりが光速度を越えており、"ergosphere" とよばれる。

一方、event horizon $(\rho_w^2 = 0)$ では、$\Omega_{\rm max/min} = \omega_H \equiv (-g_{t\phi}/g_{\phi\phi})_H = a/(2Mr_H)$ となり、すべての観測者がこの速度で回転する事になる。このとき、ブラックホール静止系から見ると、ϕ 方向への運動が存在しない事になる (r 方向のみ)。

< 問題 > Kerr 時空のなかのテスト粒子に対して、
(1) 有効ポテンシャルを導け。特に、粒子の角運動量が負の場合、ergosphere 内部が負のポテンシャル領域になっていることを確かめよ。
(2) 円軌道の半径を求めよ。この半径は、粒子の角運動量の値に応じて決まってくる。
(3) パソコンを利用して、(1) で求めた有効ポテンシャルの等高線を (r, θ)-plane 上にプロットせよ。

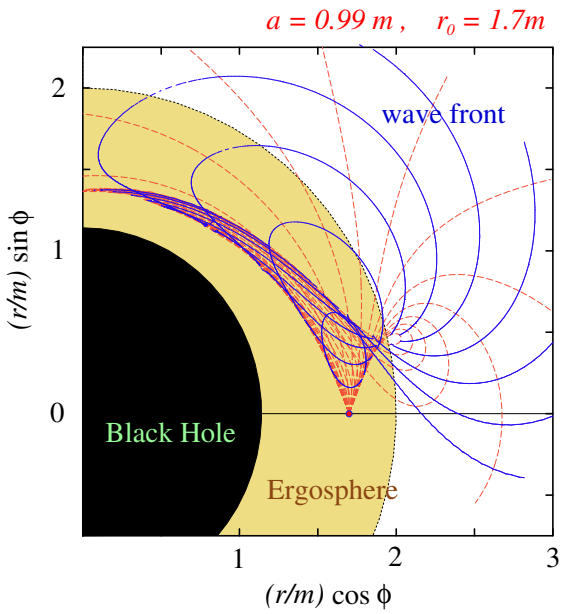


図 3.3: エルゴ領域内で発生した光線の軌道 (left) と光波面 (right)。時空の引きずりのため、光波面は自転方向と反対方向へは伝播できない (自転方向に吹き流されている)。

第4章　Energy generation in Black Hole Magnetosphere

"ene-ex.tex"

4.1　Gravitational energy of accreting matters

- gravitational energy of accreting plasmas
  - 回転ブラックホール — ガスの静止エネルギーの最大で 42% を放出できる
  - 回転してないブラックホール — 最大で 6%

- hole's rotational energy extraction by the Blandford-Znajek (1977) process
  - 質量 $10^8 M_\odot$ のブラックホールが最高速で回転している場合、約 3×10^{48} KWh となる。これは、平均的なクエーサーが数十億年にわたって同じ高度で輝き続けるのに等しい量である。ただし、ブラックホールの回転エネルギーのすべてを抽出可能なわけではないことに注意。具体的な評価には、ガスの降着率 (エネルギーや角運動量をブラックホールに持ち込む) や BZ-process による回転エネルギー抽出の効率のモデルが必要。ブラックホールの進化の問題として研究されている。

- High-energy radiation

- Plasma ejection from the Disk (Jet/Wind)

4.2　Energy extraction from a Rotating Black Hole

回転するブラックホールは，回転エネルギーの形で膨大なエネルギーを蓄えることができる．回転エネルギーの抽出機構として "Penrose process" と "super-radiant scattering (seper-radiance)" さらに 電磁気的な相互作用による機構 "Blandford-Znajek process" およびその MHD への拡張版を紹介する．

4.2.1　Penrose process

(Penrose 1969, Wagh & Dadhich 1989)

一般相対論的な効果として注目すべきは，static limit surface 上でポテンシャルの値はゼロとなり，ergosphere では負の値となることである．すなわち，ergosphere 内においては粒子の負のエネルギー軌道が可能となるのである．

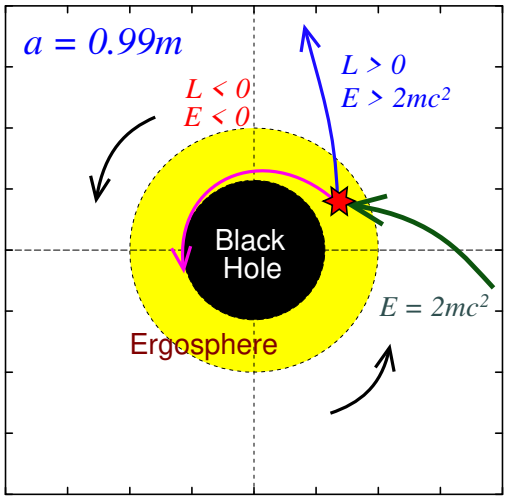


図 4.1: Penrose process (Christodoulou 1970). エネルギー E_0 で ergosphere 内に入射された粒子を 2 つの粒子に分裂させる．一方の粒子が負のエネルギー E_1 でブラックホールに落下するとき，他方の粒子は $E_2 > E_0$ で遠方に脱出できる．斜線のついた曲線は，それぞれの粒子に関しての有効ポテンシャルである．

このエルゴ領域における負エネルギー軌道の存在を利用して、ブラックホールの回転エネルギーを引き抜く機構が考えられた。あるエネルギーと角運動量をもつ粒子をブラックホールから離れた地点からエルゴ領域へ放り込んでやり、エルゴ領域内でこの粒子を 2 つの断片に分裂させる。一方を負のエネルギー軌道に落とすことが出来れば、他方は入射時 (分裂前の粒子が持ち込んだエネルギー) よりも大きなエネルギーを持って遠方に去ることができる。このことは、ブラックホールからの (回転) エネルギーの引き抜きを意味する。ただし、分裂粒子を負のエネルギー軌道に落とすためには、分裂時の相対速度が $0.5c$ 以上でなければならず、天体現象を説明するためには現実的ではないと考えられている。

- 散乱による過程 (collisional Penrose process)
  (Piran & Shaham 1977, Kafatos & Leiter 1979)
- 多粒子の衝突と emmision process による過程 (Phinney 1983)
- 粒子が電磁場中に存在しているとき (Wagh & Dadhich 1989) [1]

Penrose process はブラックホールの回転エネルギーを引き抜く機構としてきわめて魅力的であり，銀河中心核への応用もいくつか試みられた (Wheeler 1971, Mashoon 1973, Fishbone 1973) . しかしながら，銀河中心核のモデルとしては，この節の後半で述べるような分裂速度に関してのきびしい制限が課せられており，現実的でないとされた (Bardeen et al. 1972, Wald 1974a) . その後，Piran & Shaham (1977) は，2 つあるいはそれ以上の粒子が ergoaphere 内で散乱されることで，粒子を負のエネルギー軌道に落し，他の粒子を脱出させることでブラックホールの回転エネルギーを取り出すことを考えた (collisional Penrose process) . もちろん，散乱粒子に関しても分裂速度に関した制限が課せられているわけだが，photon と electron のコンプトン散乱によって electoron を負のエネルギー軌道に押し込めるこは可能である . この photon は，X-ray や γ-ray と

[1] see, Appendix (“penrose-1.tex”)

して遠方へ放出されるだろう．その他，γ-ray photons によって引き起こされる電子と陽電子の対生成により，エネルギーを引き抜くことが考えられた (Kafatos & Leiter 1979) .

4.2.2 Super-Radiance of waves

ブラックホールに向けて入射された波が、回転するブラックホール (の有効ポテンシャル) に散乱されて増幅されて反射される機構である。この反射波が持ち出すエネルギーは、ブラックホールの回転エネルギーに由来する。

ブラックホールへの入射波を考えるとき、通常入射波はポテンシャルの壁で反射されるが、一部はすり抜けてブラックホールへ吸い込まれる。したがって、反射波は入射波より弱められると考えられる。しかしながら、もし波の位相速度がブラックホールの回転角速度より小さい場合には、反射波は増幅され[2] ブラックホールはエネルギーを失う。Press & Teukolsky (1972) は、ブラックホールをシェル状の “鏡” でおおってやり、増幅された波を再びブラックホールへ反射し、super-radiance を繰り返すことで、“black-hole bomb” が作れると指摘している。鏡の役割を果たすものとしては、周りに分布するガスなどを考えている。なお、Scalar 場の場合よりも、vector 場、tensor 場に対してより大きな増幅率をもつことが示されている。

4.2.3 Blandford-Znajek process

(Blandford & Znajek 1977)

ブラックホールの周りに分布する大局的磁場による磁気トルクにより、ブラックホールの回転にブレーキをかける機構である。その反作用として、周囲の磁気圏にエネルギーが渡されることになる。

Force-free 磁気圏において、電流は磁場に沿ってながれるが、ブラックホールと遠方との相互作用は、磁力線を導線とした電流回路のアナロジーにより議論することができる。この立場では、ブラックホールは仮想的に 30Ω の電気抵抗を持つ金属球のように振舞うことになり [67] 、ブラックホールからのエネルギーの引き抜きが可能となる。大まかに見積もると、ブラックホールの持つ回転エネルギーの半分が引き抜きうる。

Force-free 磁気圏における電磁気的なエネルギーフラックス $\mathcal{E}^A \equiv T^A_t$ と角運動量フラックス $\mathcal{L}^A \equiv -T^A_\phi$ (ここで $A = r, \theta$) は、

$$\mathcal{E}^r = \frac{\Omega_F A_{\phi,\theta} B_\phi}{4\pi\sqrt{-g}} , \tag{4.1}$$

$$\mathcal{E}^\theta = -\frac{\Omega_F A_{\phi,r} B_\phi}{4\pi\sqrt{-g}} , \tag{4.2}$$

また、$\mathcal{E}^A = \Omega_F \mathcal{L}^A$ で与えられる。ブラックホールを貫く磁力線によって引き抜かれるまたは流れ込むエネルギーは、トロイダル磁場の event horizon での境界条件 [66]

$$B_\phi[A_{\phi,\theta}(r_{\rm H}, \theta)] = \frac{\sin\theta (r_{\rm H}^2 + a^2)(\omega_{\rm H} - \Omega_F)}{\Sigma_{\rm H}} A_{\phi,\theta}(r_{\rm H}, \theta) \tag{4.3}$$

を用いて、

$$\mathcal{E}^r = \frac{\Omega_F (\omega_{\rm H} - \Omega_F)(r_{\rm H}^2 + a^2)}{4\pi\Sigma_{\rm H}^2} A^2_{\phi,\theta} \tag{4.4}$$

[2] これと同様の現象は、回転する重力場に限らず、プラズマ波に関するものとして Ostrovskii (1972) の研究があり、また半導体中の音波に関して、carrier のドリフト速度が音波の位相速度より大きいときに、音波が増幅されるとした Gulyaev & Pustovoit (1965) の研究がある。これらはすべて、媒質の運動速度が波の位相速度より大きいときにみられる (Zel'dovich 1972)。

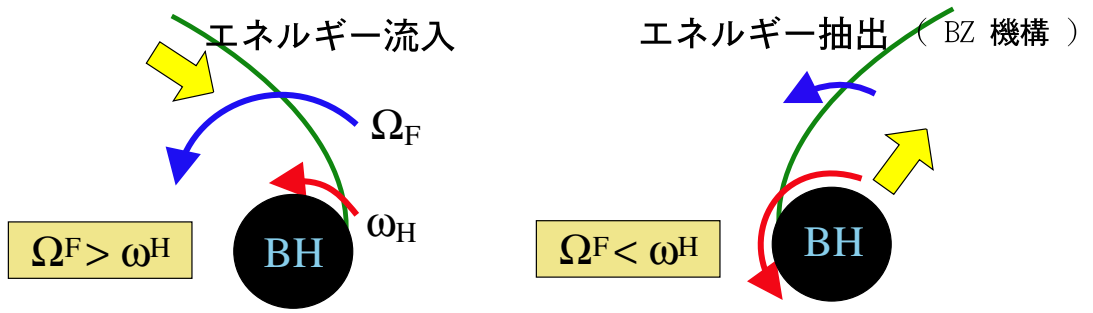


図 4.2: ブラックホールの自転角速度とトロイダル磁場。Ω_F と ω_H の大小で B_ϕ の符号が変わることに注意しよう。

となる [7]。したがって、$0 < \Omega_F < \omega_{\rm H}$ であるときには、$\mathcal{E}^r > 0$ となり、ブラックホールから正のエネルギーが出て行くと解釈することができる。このとき、角運動量に関しては $\mathcal{E}^r \leq \omega_{\rm H}\mathcal{L}^r$ が成り立つがこのことはブラックホールの面積増大則が満たされていることを保証している。引き抜かれるエネルギーは、磁場の強さと、磁気圏の角速度に依存しているが、ある角速度 $\omega_{\rm H}$ で回転しているブラックホールに関して、最大の引き抜きパワーを与える Ω_F は、$\Omega_F = (1/2)\omega_{\rm H}$ になっている。ブラックホールの回転が速いほど、引き抜きの効率は良いように思えるが、この場合回転の効果は磁力線を event horizon から締め出してしまうので (Bicak & Dvorak 1976, 1980)、電磁気的な引き抜き効率はかえって悪くなるであろう。[3]

4.2.4 Negative-Energy Plasma Accretions

(Takahashi et al. 1990)

磁気圏中にプラズマが分布しブラックホールへのプラズマ降着がある場合でも、磁場とプラズマ流体のトータルのエネルギーが負になりうる。プラズマは正のエネルギー (質量エネルギー・運動エネルギー・内部エネルギー) をブラックホールに持ち込むが、磁場が十分強い場合には依然 Blandford-Znajek process が有効であることが示された。このことは、磁気流体降着流における臨界点 (アルフェン点) の解析から明らかになった。ブラックホール近傍の磁場が、プラズマの慣性の効果に対して十分支配的であるとき、アルフェン点は light surface に位置するが、このときに負エネルギーの磁気流体降着流が実現する。このような light surface およびアルフェン点は ergosphere 内に位置する。

ブラックホールから引き抜かれた回転エネルギーは、電磁気的なエネルギーフラックス (ポインティング・フラックス) として、磁気圏に流れ込むが、磁気流体としての相互作用により、プラズマのエネルギーに転化されることができる。ブラックホール磁気圏には、プラズマ源を堺とした inflow 領域と outflow 領域が存在するが、ブラックホールからのエネルギーは (inflow 領域における負のエネルギー降着流)、一旦プラズマ源に運ばれることになる。ブラックホールからのエネルギーのすべてがそのまま遠方に向けて再放射されるのか、プラズマ源でのエネルギー吸収があるのか、あるいはプラズマ源自体のエネルギー放出も加わって増幅されたエネルギー放射として振舞う

[3]ただし、event horizon の外側の時空においても、時空の引きずりは行なわれているので、ほぼ最高速に回転しているブラックホールがほとんどの磁力線を締め出す状況においても、ブラックホールからの電磁気的な引き抜きは期待できる。詳細のためには、event horizon 極近傍でのプラズマ (もはや流体として扱えるとは限らないが) と電磁場の相互作用を議論する必要があるだろう。

のかは、もちろんプラズマ源のモデルに依るだろうが、いずれにしろ放出されたエネルギーは磁場のエネルギー成分がらプラズマの運動エネルギーへの転化が可能であり、加速されたプラズマ流が得られる。

磁気圏中のプラズマに作用する電磁力 ($\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$: ローレンツ力) のうち、プラズマの加速に使われる成分は、$(j_p)_\perp \times B_\phi$ であり、磁気面を横切る電流 $(j_p)_\perp$ と磁場のトロイダル成分 B_ϕ が重要である。磁気面を横切る電流 (の向き) は磁気面の分布 (磁束管の断面積変化など) と密接に絡んでいる。磁場のトロイダル成分 B_ϕ は磁気圏を流れるポロイダル電流とプラズマの慣性の効果によって決まるが、中心天体や周りのプラズマが回転していることに由来している。

第5章　Black Hole and Magnetic Fields

"magneto.tex"

ブラックホールと磁場の相互作用は古くから研究されており、天体現象への適用も試みられている。この章ではまず、磁場との相互作用に関しての基本事項を整理し、真空磁気圏、Force-free 磁気圏について紹介する。

5.1　ブラックホールと磁場の基礎知識

ブラックホール地平面での境界条件により、電磁場はいくつかの特徴的な振舞を示すことになる。ここでは、本論文で関わり合いを持つと思われる事項を紹介しておく。

(1) ブラックホールは "毛が三本"(質量 M, 角運動量 J, 電荷 Q のみで特徴づけられる)。ブラックホール自体は、磁場の源になれない (中性子星とは異なる)。ただし、帯電したブラックホールが回転することで外部に磁場を作ることはできる。

(2) ブラックホールを貫く磁場は、ブラックホール外部環境で用意する必要がある。例えば、磁化プラズマの降着に伴い持ち込まれる、あるいは降着円盤の表面電流によって作られた磁場が、ホライズンまで達するなど。

(3) ブラックホールの外部環境で作られた磁力線は、ブラックホールを貫くことが可能。ブラックホールと降着円盤あるいは遠方のプラズマを繋ぐ磁力線も分布可能である。

(4) ホライズンでの境界条件 : ベクトルポテンシャル $A_\phi = A_{\phi\mathrm{H}}(\theta)$ は有限値である。また、$B_{\phi\mathrm{H}} \sim O(1)$, $B_{\theta\mathrm{H}} \sim O(1)$, $B_{r\mathrm{H}} \sim O(1/\Delta)$, $E_{r\mathrm{H}} \sim O(1)$, $E_{\theta\mathrm{H}} \sim O(1)$, $E_\phi = 0$ である。

(5) 高速に回転しているブラックホールは、磁力線をホライズン内から締め出す。最高速に回転している場合、磁力線はブラックホールから完全に締め出される (貫くことができなくなる)。

(6) 電磁気的揺るまい (アナロジーとして) において、ブラックホール表面は金属球表面に例えることができて、電気抵抗 $30\ \Omega$ に相当する。これは真空の持つ電気抵抗に対応する。回転するブラックホールには起電力が生じるが、内部抵抗を持つ電池として扱える。[1]

(7) ブラックホールに (リング電流と供に) 落ち込むループ状磁場は、ホライズン上で散逸して消滅する。電磁場エネルギーはブラックホール質量に転化する。

[1] 電気回路によるアナロジーは、定常解において BH パワーを評価するする際など、ブラックホールが関わる電磁気現象の理解を助ける側面がある。しかしながら、曲がった時空の概念が失われてしまうデメリットもあるので、取扱いには注意が必要である。特に、ダイナミカルな現象を扱う場合や、因果律を議論する際には一般相対論による理解が不可欠になる。

5.2 Vacuum Magnetosphere

一般相対論で電磁場の構造を求めるためには、厳密には Einstein-Maxwell equation を解く必要がある。しかし、この方程式系の厳密解を解くことは一般に困難である。今までに求められている解としては、

- Reisnerr-Nordström solution — charged Schwarzschild B.H.
- Kerr-Newmann solution — charged Kerr B.H.
- Ernst solution — Schwarzschild B.H. in the uniform magnetic field

が知られている。

また、電磁場が重力場に比べて弱い場合に、Einstein-Maxwell equation を厳密に解く代わりに電磁場を重力場に対する摂動と考え、線形化した Maxwell equation を解く試みも行なわれた。具体的には Schwarzschild または Kerr metric $g_{\mu\nu}$ を与えて、その与えられた時空上で (1a) 式、(1b) 式を解くのである。この方法は、６０~７０年代にブラックホールの摂動論と共に発展した。

シュバルツシルド時空やカー時空において線形化されたマックスウエル方程式の解としては、

- Schwarzschild-Dipole magnetic field *(Ginzbrug & Ozernoi 1965)* [20]
- Kerr-Uniform magnetic field *(Wald 1974)* [63]
- Kerr-Stationary-Axisymmetric electromagnetic field *(Petterson 1975; Chitre & Vishveshwara 1975; King, Losota & Kundt 1975)* [43][13][27]
- Stationary axisymmetric electromagnetic field in the Kerr geometry *(Linet 1979)* [31]
- シュバルツシルド時空における真空磁場 (Ghosh 2000) : 多重極展開したベクトルポテンシャルを議論している (図 5.1 参照)。
- Black Hole magnetosphere around Thin Disk in the Schwarzschild geometry *(Tomimatsu & Takahashi 2001)* [59] 磁場の源として赤道面上 $r > r_{\rm in}$ 領域にトロイダル電流分布を与えて解いた [6] Thin Disk を伴う解 (Tomimatsu & Takahashi 2001) が得られている。これは、ディスクの内端を考慮した境界条件のもとで多重極展開したベクトルポテンシャルを重ね合わせて得た解であり、ブラックホール表面と遠方で発散しない条件を要請している (図 5.2 参照)。

これらの試みは、プラズマの存在しない “真空” の下で行われているが、ブラックホールと降着円盤から成る磁気圏モデル構築の基盤なる研究である。[2]

[2]NOTE: No current distributes in a vacuum magnetosphere.

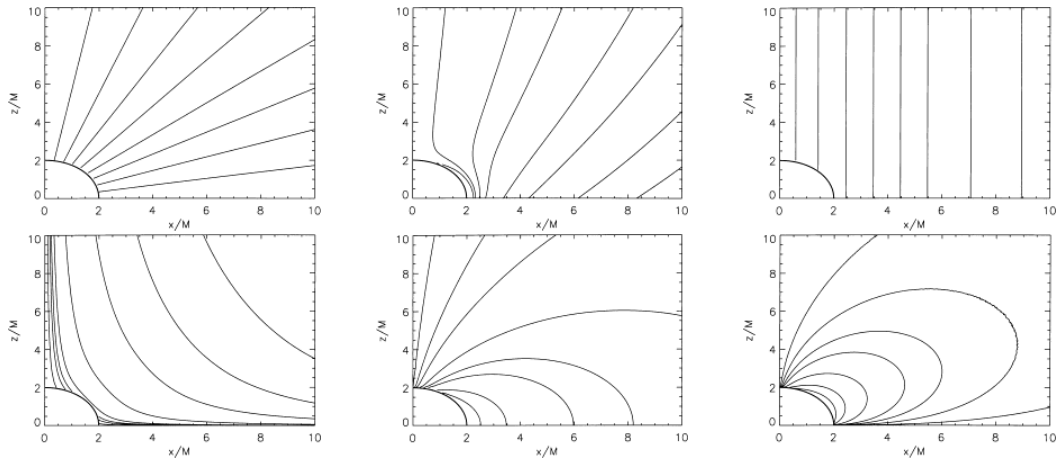


図 5.1: The multipolar interior and exterior solutions (Ghosh 2000): (a) the Schwarzschild monopole, (b) the separable Schwarzschild paraboloid, (c) the uniform field, (d) the Schwarzschild $m = 2$ interior solution, (e) the Schwarzschild dipole, (f) the Schwarzschild quadrupole.

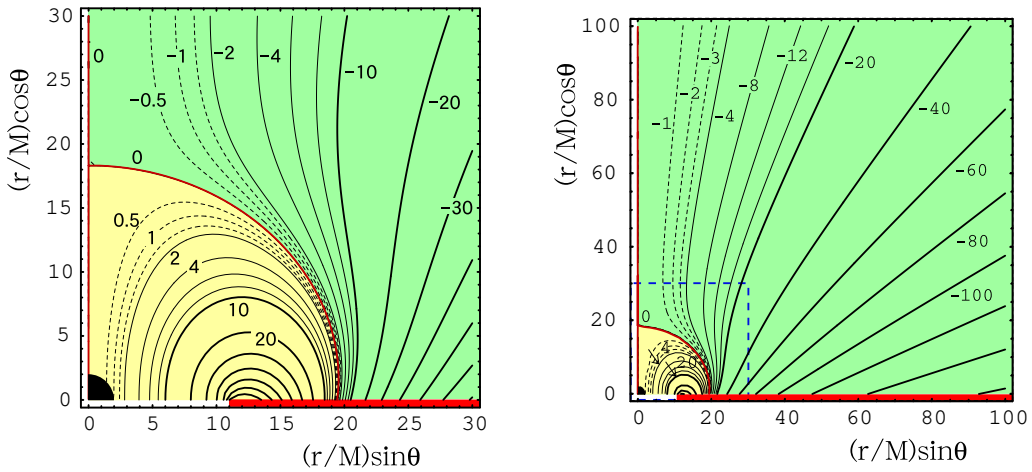


図 5.2: Thin Disk を伴う真空磁気圏 (Tomimatsu & Takahashi 2001): この磁気圏の磁場は 2 つの領域 (内側に Loop field + 外側に Open field) に分離されている所が興味深い。BH を貫く磁力線は、内端より外側に離れたディスク面につながる。十分遠方では放射状になる。

5.3 Force-free Magnetosphere

プラズマの分布はあるものの磁場が卓越し、プラズマの慣性の効果が無視できると近似できる磁気圏である。パルサー磁気圏では、高速回転中性子星の強磁場ゆえに、force-free 近似が成立している。この force-free 近似においては、プラズマの慣性項は無視される。すなわちプラズマに作用するローレンツ力はゼロである : $F_{\mu\nu}j^{\nu} = 0$。ここで $F^{\mu\nu}$ は電磁場テンソル、j^{ν} は current 4-vector。電流は磁気面に沿って流れる。磁力線は剛体回転し、 2 枚の (inner and outer) Light surface が存在する。これらは、磁力線の回転速度が光速度となる点で構成される。ブラックホール近傍では、重力赤方偏移のため光速度が遅くなるように観測されるが、このためホライズン近くに磁力線の回転速度のほうが光速度より速い領域が生じる。その境界が inner light surface であり、ホライズン面を包み込むように分布する。磁気圏の回転によりトロイダル磁場とポロイダル電場が発生するが、これにより磁力線に沿って電磁気的なエネルギー / 角運動量が輸送 (Poynting flux) される。ブラックホール磁気圏モデルとしては、例えば Blandford & Znajek (1977) model、Lovelace et al. (1987) Jet-Disk model、等がある。非相対論ではあるが重要なモデルとしては、Blandford (1976)、Blandford & Payne (1983) 等もがある。

ブラックホールを貫く磁場は、ブラックホールの外部で作られたものである。例えば、赤道面上に降着円盤として分布するプラズマ中を流れる電流などによる。

- Blandford (1976) model
- Blandford & Znajek (1977) model
- Lovelace et al. (1987) Jet-Disk model

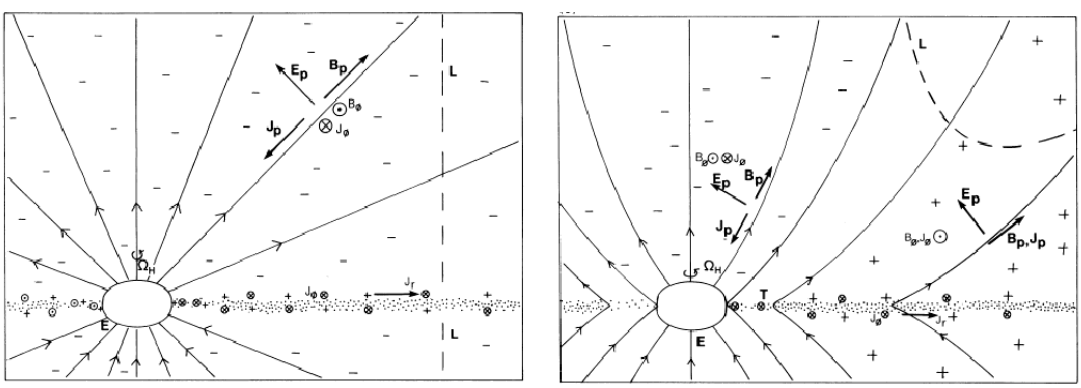


図 5.3: Blandford & Znajek (1977) の force-free magnetosphere model. トロイダル電流に加えて、ポロイダル電流がディスク表面と磁力線に沿って流れている (トロイダル磁場が発生)。磁力線は放物面上にあり、回転軸の周りに螺旋形状を描きながら、回転軸方向に湾曲した形状となっている。

ブラックホールを貫く磁力線が回転軸に沿って遠方に伸びている場合には、ブラックホールの自転エネルギーを電磁気エネルギーとして遠方に輸送することが可能になり、宇宙ジェットやガンマ線バーストのエネルギー源としても注目されている。実際、活動銀河中心核に存在するとされるブ

ラックホールが最高速度で回転しているとすると、観測されるエネルギー放出を十分説明できるだけのエネルギーをブラックホールは保持できるのである。ただし、宇宙ジェットやガンマ線バーストに見られるような衝撃波形成のためには、ブラックホールと衝撃波面の途中の領域で、電磁気エネルギーからプラズマの運動エネルギーへの変換機構が必要で、プラズマの寄与を取り入れた “磁気流体プラズマ” によるエネルギー輸送が議論の主流になってきた。

5.4 Inflow and Outflow plasmas

ブラックホールはそれ自身磁場の源にはなれない。降着プラズマが持ち込む磁場やその降着プラズマが引き起こすダイナモ効果によって磁場が形成される。実際、観測的にも磁場の存在とその重要性が指摘されている。

★ Magneto-hydrodynamical (MHD) treatment:

- *Plasma's inatia effects and Pressure effects are important.*
- There are Alfven-wave mode and two magnetosonic-waves modes.
- We see the interaction between magnetic field and plasma.

★ For ideal MHD, — The magnetosphere is a *perfect* conductor.

- (magnetic firld lines) = (plasma's stream lines)
- five conserved physical quantities $(E, L, \Omega_F, \eta, S)$

★ プラズマ流速の大きさ： ポロイダル方向の速さが、 Alfven-wave や magnetosonic-waves speeds と等しくなった時、 .... あるいは、トロイダル方向の速さが光速になる地点ではどうなる？

- inner/outer light surfaces — *not critical points*
- inner/outer Alfvén surfaces — *multipole-critical points*
- inner/intermediate/outer fast magnetosonic point — *X-type or O-type critical points*

★ プラズマ源 / 降着プラズマ流について

- プラズマ源は、 *inner* light surface と *outner* light surface の間に位置することができる
  - the surface and corona of an accretion disk
  - $e^{\pm}$ pair creation regions

- ブラックホールへの降着流は、アルフェン点および磁気音速点を通過後に、ブラックホールに落ちる。

1. Plasma source
2. Slow magnetosonic point

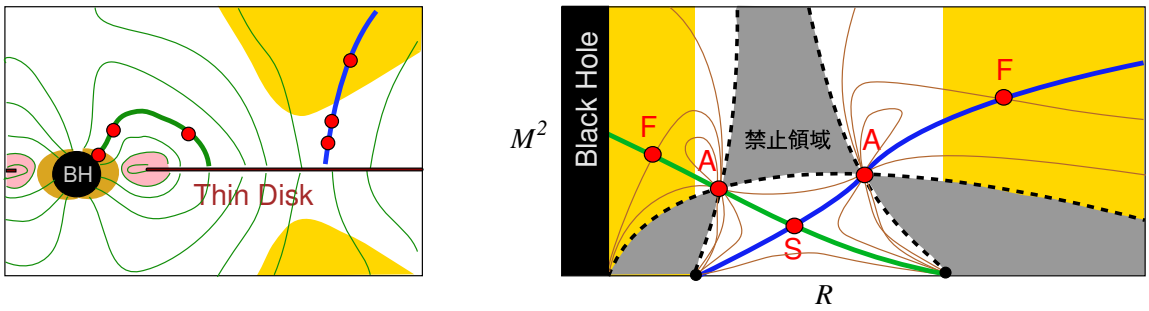


図 5.4: (左図) ブラックホール磁気圏は、Inflow と Outflow の領域が共存するシステムである。定常・軸対象の磁気圏において理想プラズマは磁力線に沿って流れる。プラズマ源から落下するプラズマおよび外向きに放出されるプラズマは、アルフェン点および磁気音速点を通過後に、ブラックホールに落ちる、あるいは遠方に wind/jet として飛ばされる。(右図) ブラックホールへの降着流解 (右下から左上への緑色の曲線) とブラックホール近傍から遠方への wind 解 (左下から右上への青色の曲線)。

3. Alfvén point
4. Fast magnetosonic point
5. Event horizon

MHD inflow/outflow 解に関してのアルフェン点の分類と負のエネルギー降着流の詳細については Takahashi et al. (1990) [50] を参照されたい。

5.5 The structure of Magnetosphere

(a) The GS equation with the poloidal equation in a stationary and axisymmetric magnetosphere. It is very hard to solve these equations with considering the critical conditions. (see, §6)
(b) The informations from the plasma cannot propergate outer region (to the plasma source, far distant region) after passing the fast point. How is the magnetosphere determined without the boundary condition at the black hole ?

磁気圏構造と因果律の問題
fast magnetosonic point を越えてブラックホールへ落ち込んでしまったガスの情報は、もはや速い磁気音波を持ってしても得ることができない。ブラックホールの質量や回転速度が変化した時その情報は、backgrand metric の変化として反映されることになる。

(c) MHD simulations of accretion onto a black hole (time-dependent black hole magnetospheres)

- Willson (1977)
- Yokosawa (1993)

- Koide (1999)
- McKinney & Gammie (2004)

(d) Slef-similar magnetosphere models

- Blandford & Payne (1982)
- Li, Chiueh & Begelman (1992)

(e) Dynamo processes by accreting plasma

The structure of magnetic field near the Event Horizon. The frame dragging effect stretches not only magnetic fields but also electric field. An azimuthal electric field is generated.

- Khanna & Cammenzind (1996) — MHD simulations
- Brandenburg (1996) — MHD simulations
- Egi, Tomimatsu & Takahashi (1997) — analitic study

This process would be important when we discuss the electromagnetic extraction of the hole's rotating energy.

(f) Plasma Instabirities in the magnetosphere

- Gruzinov (1999)
- Li (2000)
- Tomimatsu, Matsuoka & Takahashi (2001)

第6章　相対論的磁気流体力学

"mhd-basic.tex"

6.1 Basic equations

相対論では、流体要素に伴うすべてのスカラー量 (粒子数密度、エネルギー密度、温度、圧力、といった量) は、各流体要素ごとに、その静止系 (総運動量の空間成分がゼロ) での値を使って定義ざれる。この静止系は、MCR 系 (Momentarily Comoving reference frame) と呼ばれる。この系は瞬間的にのみ共動している。流体要素は加速運動されうるので、すぐに別の慣性系が MCR 系に置き換わる。また、二つの別の流体要素は、相対運動をするので、共通の MCR 系を持つことはない。例えば、流体要素の MCR 系での粒子数密度 n は、粒子が静止していない系 (粒子の速度を v として) では $n/\sqrt{1-v^2}$ となる。このことは、同じ粒子に着目すれば、どちらの系でも粒子数は同じであるものの、粒子の占める体積がローレンツ収縮によって $\sqrt{1-v^2}$ 倍に減少することによる。

- Maxwell 方程式

$$F^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \tag{1a}$$

$$F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0 \quad \text{or} \quad {}^{*}F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{1b}$$

- 一般化されたオームの法則

  The electric current is the sum of the two terms coressponding respectivery to the convection current and to the conduction current;

$$j^{\mu} = c\varepsilon u^{\mu} + \sigma F^{\mu\nu} u_{\nu} \ , \tag{6.2}$$

  where ε is the proper density of electric charge. [1]

  We assume the ideal MHD conditions ($\sigma \to 0$)

$$u^{\mu} F_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{6.4}$$

- 粒子数保存の式

$$(nu^{\mu})_{;\mu} = 0 \tag{6.5}$$

[1] The conductivity of the fluid, σ, is

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_{\rm p}[1 + (e\tau B/m_{\rm p})]} \ , \tag{6.3}$$

where n_e is the electron density, τ is the collision time, e and $m_{\rm p}$ are the electoron's charge and mass, and $B^2 \equiv -B^{\alpha} B_{\alpha}$ (Bekenstein and Oron 1978)[4].

- **運動方程式**

  重力場中のプラズマの運動は、運動方程式

$$T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0 \tag{6.6}$$

  によって記述される。ここで、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ (energy momentum tensor) **は以下のように与えられる:**

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\delta}F_\delta{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2\right) \tag{6.7}$$

  以下の議論では、熱伝導や粘性による散逸効果は無視する。[2] **ここで、**ρ, P, n **は、全エネルギー密度** (the total energy density), **プラズマの圧力** (the pressure), **粒子数密度** (the proper particle density)**。 電磁場テンソル** (the electromagnetic field tensor) $F^{\mu\nu}$ **は、**Maxwell **方程式を満たなければならない。また、**u^μ **は流体の四元速度** (the four-velocity of plasma) **である。**[3]

  定常・軸対象時空の場合には二つのキリングベクトル (Killing fields) k **と** m **が存在し、エネルギーモーメンタムテンソルと縮約することで、二つのフラックス保存則を得る。**[4]

$$\mathcal{E}^\alpha \equiv T^\alpha_\beta k^\beta \ : \quad \text{the energy current} \tag{6.13}$$

$$\mathcal{L}^\alpha \equiv -T^\alpha_\beta m^\beta \ : \quad \text{the angular momentum current} \tag{6.14}$$

  これらは、以下の条件式を満たす。

$$\mathcal{E}^\alpha_{\ ;\alpha} = 0 = -\mathcal{L}^\alpha_{\ ;\alpha} \tag{6.15}$$

- **ポリトロピック関係式** (the polytropic equation of state: Tooper 1965)

$$P = K\rho_0^\Gamma = K\rho_0^{1+1/\hat{n}} \tag{6.16}$$

  where

$\rho = \rho_0 + \hat{n}P = \rho_0 + \frac{1}{\Gamma-1}P$	: the total energy density
$\rho_0 = nm_{\rm p}$	: the rest mass density
Γ	: the adiabatic index
$\hat{n}$	: the politropic index

[2] The corresponding relativistic expressions for the stress-energy tensor (the relativistic Navier-Stokes equation) are discussed in **??**.

[3] **(特殊)相対論における完全流体については、シュッツ「相対論入門(上)」江里口、二間瀬 訳 を参考にされたし。**

[4] The existance of the Killing fields k and m, defined by the stationary and axisymmetry of the space-time, leads to two conserved quantities. By contraction with the energy momentum tensor $T^{\mu\nu}$ we get two currents.

The conserved energy flux (Blandford & Znajek 1977) : From the equation of motion and the Killing equation,

$$T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0 \ , \tag{6.8}$$

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \ , \tag{6.9}$$

we obtain equation

$$(\xi_\mu T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \ . \tag{6.10}$$

For a stationary and axisymmetric flow, we find two current

$$\mathcal{E}^\mu \equiv T^{\mu\nu}\chi_\nu = T^\mu_t \ , \tag{6.11}$$

$$\mathcal{L}^\mu \equiv -T^{\mu\nu}\eta_\nu = -T^\mu_\phi \ , \tag{6.12}$$

where $\chi^\nu = (1,0,0,0)$ is the timelike Killing vector and $\eta^\nu = (0,0,0,1)$ is the axial Killing vector.

- **エンタルピー** (the relativistic entalpy)

$$\mu = \frac{\rho + P}{n} = m_{\rm p} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\frac{P}{n} \tag{6.17}$$

遠方の観測者 (我々) から見た磁場と電場は、以下のように定義される

$$B_\alpha \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta F^{\gamma\delta} \tag{6.18}$$

$$E_\alpha \equiv F_{\alpha\beta}k^\beta \tag{6.19}$$

ここで、$k^\alpha = (1,0,0,0)$ は the time-like killing vector であり、$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ である。
共同座標系 (comoving) での磁場は、

$$\overline{B}_\alpha \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\beta F^{\gamma\delta} \tag{6.20}$$

$$\overline{E}_\alpha \equiv F_{\alpha\beta}u^\beta \tag{6.21}$$

で与えられる。u^α は流体の 4-velocity である。この磁場は、$u^\alpha \overline{B}_\alpha = 0$ を満たす。

6.2 Relativistic Bernoulli Equation and Force-Balance Equation

磁気圏構造 [流速 (密度) 分布，磁場形状] を解くための方程式 (定常・軸対称を仮定)

- the relativistic Bernoulli equation along magnetic field lines
  — *Poloidal equation*
- the force-balance equation across the magnetic field lines
  — *Grad-Shafranov (GS) equation*

流れに沿って，5 つの保存量が存在する：(付録 C 参照)

$$\Omega_F = -\frac{F_{tr}}{F_{\phi r}} = -\frac{F_{t\theta}}{F_{\phi\theta}}\ , \tag{6.22}$$

$$E = \mu u_t - \frac{\Omega_F}{4\pi\eta}B_\phi\ , \tag{6.23}$$

$$L = -\mu u_\phi - \frac{1}{4\pi\eta}B_\phi\ , \tag{6.24}$$

$$\eta = -\frac{nu^r}{B^r}G_t = \frac{nu^\theta}{B^\theta}G_t = -\frac{nu^t g_{tt}(\Omega - \Omega_F)}{B^\phi} \tag{6.25}$$

where

$$G_t \equiv g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F\ , \tag{6.26}$$

$\Omega = u^\phi/u^t$, and B_ϕ is the toroidal component of the magnetic field. As a final conserved quantity is K in a polytropic equation of state, which is related to the specific entropy S; S = constant implies K = constant.

5 つの保存量が存在することにより、運動方程式のポロイダル磁場方向の成分を、積分することができる：(付録 D 参照)

$$\mu^2(1+u_p^2) = E^2\left[(\alpha - 2M^2)f^2 - k\right] \tag{6.27}$$

with

$$\alpha \equiv g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2 \ , \tag{6.28}$$

$$k \equiv (g_{\phi\phi} + 2g_{t\phi}\tilde{L} + g_{tt}\tilde{L}^2)/\rho_w^2 \ , \tag{6.29}$$

$$f \equiv -\frac{G_\phi + G_t\tilde{L}}{\rho_w(M^2-\alpha)} \ , \tag{6.30}$$

$$G_\phi \equiv g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega_F = -g_{\phi\phi}(\Omega_F - \omega) \ , \tag{6.31}$$

where $\tilde{L} \equiv L/E$ and $\rho_w^2 \equiv g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$.

- u_p is the poloidal component of the velocity defined by $u_p^2 \equiv -u_A u^A$ $(A = r,\, \theta)$

- $\alpha^{-1/2}$ is the "gravitational Lorentz factor" of the plasma rotating with the angular velocity Ω_F

- $\omega \equiv -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ is the angular velocity of the zero angular momentum observer with respect to distant observers.

- The relativistic Alfvén Mach-number M is defined by

$$M^2 \equiv \frac{4\pi\mu n u_p^2}{B_p^2} = \frac{4\pi\mu\eta u_p}{B_p} \ , \tag{6.32}$$

- B_p is the poloidal component of the magnetic field seen by a lab-frame observer

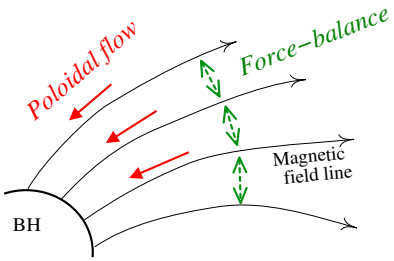
$$B_p^2 \equiv -B_A B^A \frac{1}{G_t^2} \ = \ -\frac{1}{\rho_w^2}[g^{rr}(\partial_r\Psi)^2 + g^{\theta\theta}(\partial_\theta\Psi)^2] \ . \tag{6.33}$$

- For a polytropic equation of state, the relativistic specific enthalpy μ is written by *(see, Camenzind 1987)*,

$$\mu = m_{\rm p}\left[1 + \mu_{\rm inj}\left(\frac{n}{n_{\rm inj}}\right)^{\Gamma-1}\right] = m_{\rm p}\left[1 + \mu_{\rm inj}\left(\frac{u_p^{\rm inj}B_p}{u_p B_p^{\rm inj}}\right)^{\Gamma-1}\right] \ , \tag{6.34}$$

where ("inj" = injection point)

$$\mu_{\rm inj} \equiv \frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P_{\rm inj}}{n_{\rm inj}m_{\rm p}} \ , \tag{6.35}$$



The ideal MHD plasmas stream along magnetic field lines.

The configuration of field lines is determined by the force–balance between the field.

The force-balance equation is derived by Nitta et al.(1991) (付録 E 参照)

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha - M^2}{4\pi}(\partial^r\partial_r\Psi + \partial^\theta\partial_\theta\Psi) + \frac{\hat{B}_p^2\rho_w^2}{4\pi\sqrt{-g}}\left[\frac{\sqrt{-g}}{\rho_w^2}(\alpha - M^2)\right]' \\ + & \frac{4\pi\mu^2\rho_w^2}{M^2}\eta\eta' + \frac{2\pi}{M^2}\left[g_{\phi\phi}(E^2\eta^2)' + 2g_{t\phi}(EL\eta^2)' + g_{tt}(L^2\eta^2)'\right] \\ - & \frac{4\pi\eta^2\rho_w^2}{M^4}(\mu^2 G_\phi - e\mu u_\phi)\Omega_F' - \frac{4\pi}{M^2}\left[G_\phi(E\eta)' + G_t(L\eta)'\right](E\eta)\hat{f} \;=\; 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

where the prime $(') \equiv -(1/\hat{B}_p^2)[(\partial^r\Psi)\partial_r + (\partial^\theta\Psi)\partial_\theta]$, $\hat{B}_p \equiv \rho_w B_p$ and $\hat{f} \equiv \rho_w f$.

第7章　Trans-Magnetosonic MHD flows in the BH Magnetosphere

"mhd-trans.tex"

ブラックホール磁気圏は、Inflow と Outflow の領域が共存するシステムである。定常・軸対象の磁気圏において理想プラズマは磁力線に沿って流れる。図 7.1 中の $k_0 = 0$ 面は inner/outer light surfaces であり、$k_0 = M^2$ 面は inner/outer Alfvén surfaces である。ブラックホールの強重力のため、ブラックホール近傍に inner light surface と inner Alfvén surface が生じる。関数 k_0 は、重力赤方偏移と角速度 Ω_F で回転する系 (磁力線) のローレンツファクターを含む関数である。M は Alfven Mach number である。

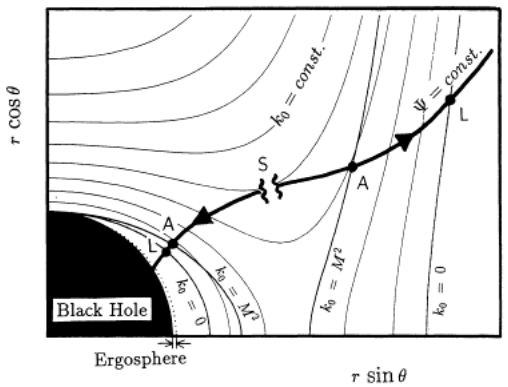


FIG. 2.—Illustration of typical inflow and outflow in the black hole magnetosphere. Both start from the injection point I and pass through the Alfvén surface A and the light surface L. The point where the flow line is tangent to a curve of k_0 = constant becomes the separation point.

図 7.1: 磁力線に沿ったプラズマ流。 ブラックホール磁気圏は、Inflow と Outflow の領域が共存するシステムである。

7.1　Light Surfaces

There are *two* light surfaces, bounding an intermediate zone where particles are created and can corotate with the magnetic field lines. Byound the outer light surface, particles must move outward; within the inner light surface, particle must approach the horizon.
(Blandford(1989) in Proc."Theory of Accretion Disk")

- *the inner light surface* :
  This is formed by the strong gravity of the black hole; the light velocity seen by a distance observer becomes small because of the gravitational red-shift effect, and this surface locates

very close to the event horizon.

- *the outer light surface* :
  This is formed by the rapid rotation of the magnetosphere in the same manner as in pulsar magnetosphere models.

In the black hole magnetosphere streaming both an accretion and a wind (or jet) from a plasma source, there are two light surfaces, where the rotational velocity of the magnetic field line equals the light velocity. The locations of the light surfaces are given by $\alpha = 0$ (e.g., [66, ?]). The inner light surface is formed by the strong gravity of the black hole; the light velocity seen by a distance observer becomes small because of the gravitational red-shift effect, and this surface locates very close to the event horizon. The outer light surface is formed by the rapid rotation of the magnetosphere in the same manner as in pulsar magnetosphere models. In the intermediate zone, the plasma can corotate with the magnetic field lines, while outside the outer light surface particles must move outward along the rotating magnetic field lines; within the the inner light surface, particle must fall into the event horizon.

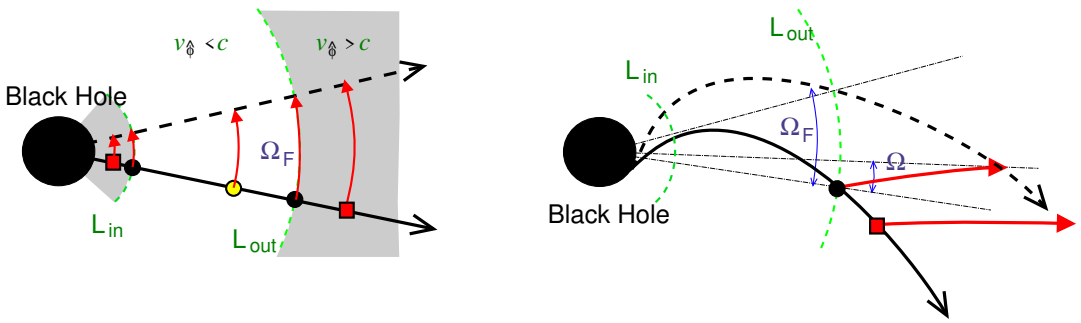


図 7.2: Outside (inside) the outer (inner) light surface, the plasma must stream outward (inward) along the bending magnetic field lines.

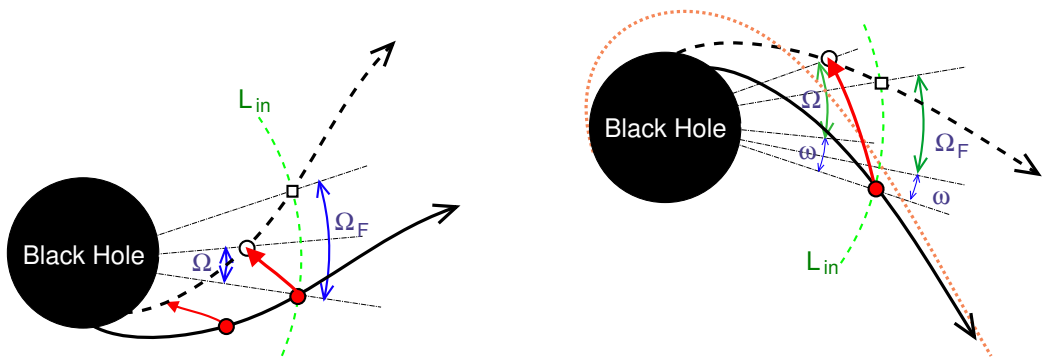


図 7.3: The ingoing plasma flow. For slowly-rotating black hole case, the plasma falls into the black hole along a trailed magnetic field lines, while the plasma falls along a leading magnetic field line for rapidly-rotating case.

The locations of the light surfaces are determined by $\alpha \equiv g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_F + g_{\phi\phi}\Omega_F^2 = 0$.

- They depend on parameters $\Omega_F(\psi)$ and a.
- A function $\Omega_F = \Omega_F(\psi)$ should be given by the boundary condition at the plasma source.
- To obtain the spatial shapes of the two light surfaces, we must treat the force-balance equation with the poloidal equation. (It is very hard probrem.)
- Maximum/Minimum Ω_F — $(\Omega_{\max},\ \Omega_{\min})$

When we solve a configuration of magnetic field lines, $\psi(r,\theta)$, by solving the force-balance equation with the poloidal equation, and obtain a function $\Omega_F = \Omega_F(\psi)$ as the boundary condition at the plasma source, we can determine the spatial shapes of the two light surface. The plasma sources, which might be the surface of an accretion disk and the particle-production gap described in Blandford and Znajek [7], must locate between a zone between the two light surface.

The locations of the light surfaces depend on parameters Ω_F and a. To exist the corotating region sandwiched by two light surfaces, there are maximum and minimum values of Ω_F; Ω_F equals to the maximum or minimum value when $r_{\rm L}^{\rm in} = r_{\rm L}^{\rm out}$. When $\Omega_F = \omega_H$ for a magnetic field line, the inner light surface reaches the event horizon. When $\Omega_F = 0$, the inner light surface locates on the static limit surface, while the outer light surface goes to infinity. If the black hole drags the magnetosphere ($0 < \Omega_F < \omega_H$),the inner light surface locates inside the ergosphere.

★ どの様な場合に、inner-light surface が生じているのか？
Light surface の場所は $\alpha = 0$ により与えられるが、

$$\alpha = \alpha_Z^2 \left[1 - (v^{\hat{\phi}})^2\right] = 0 \tag{7.1}$$

と書き直す事ができる。ここで、

$$\alpha_Z \equiv \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\rm ZAMO} = \frac{1}{\sqrt{g^{tt}}} \tag{7.2}$$

は、“lapse function” (“redshift fastor”) と呼ばれる。また、

$$v^{\hat{\phi}} \equiv \frac{(-g_{\phi\phi})}{\rho_w}(\Omega_F - \omega) \tag{7.3}$$

は、ZAMO 系で見た磁力線の toroidal 3-velocity である。ZAMO で見て磁力線の回転角速度が光速となるところで $\alpha = 0$ となることがわかる。

★ inner-light surface と event horizon のあいだの領域では、プラズマは磁力線と共回転できず、ブラックホールに向かって流れていなければならない。プラズマが “共回転する” ということは、プラズマの回転速度が光速を越える事を意味するのだが、もちろんこれは許されない。プラズマは、その慣性の効果により磁力線を ϕ 方向 (回転方向と逆向き) に捩じり、スパイラル状の磁場配位をつくり出す。そして、そのスパイラル磁場に沿って、内向きに運動することで、自身の回転速度を常に光速度以下にしながら、ブラックホールに落下する。この inner-light surface と event horizon のあいだの領域では、トロイダル成分のみの磁場配位、あるいはディスクから伸びたルー

プ状磁場配位 (プラズマ源のある場所から伸びた磁力線が、ブラックホールを貫かずにプラズマ源の別の地点と接続する) は実現できず、必ずブラックホールを貫く磁場となっている。[1]

7.2 Alfvén Points

★ アルフェン点：

The function appeared in the poloidal equation:

$$f = -\frac{G_\phi + G_t \tilde{L}}{\rho_w (M^2 - \alpha)} , \tag{7.4}$$

When $M^2 = \alpha$, it seems that the function f diverges. To obtain the physical accretion flow, which streams with a finite velocity, we must require the condition

$$\tilde{L} = \left(\frac{G_\phi}{G_t} \right)_{\rm A} \tag{7.5}$$

at there. Then, we obtain a finite value:

$$f = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{ finite} \tag{7.6}$$

This point can be called as the general-relativistic version of the Alfvén point.

★ アルフェン点の特徴：

- $\alpha_{\rm A} = M_{\rm A}^2 > 0$
  $\Rightarrow$ The Alfvén points must locate between two light surfaces.
- one or two Alfvén point(s)
  - $\omega_H < \Omega_F$ — [2]
  - $0 < \Omega_F < \omega_H$ — [1]
  - $\Omega_F < 0$ — [2]
- Forbidden regions
- Negative Energy Accretion

★ エネルギー / 角運動量：

We can express the total energy E and the angular momentum L as functions of the position of the Alfvén point (A) and the total energy $\mathcal{E} \equiv E - L\Omega_F$ seen by a corotating observer

$$E = \left(\frac{G_t}{\alpha} \right)_{\rm A} \mathcal{E} , \tag{7.7}$$

$$L = \left(\frac{-g_{\phi\phi}}{\alpha} \right)_{\rm A} (\Omega_F - \omega_{\rm A})\, \mathcal{E} . \tag{7.8}$$

[1] ただし、ideal MHD の範疇において。Ideal MHD の扱いの下でも、局所的に閉じたループ磁場が磁場の源 (リング電流など) もろともブラックホールに落ちてしまうことは構わない。ブラックホール近傍においては局所的な乱流的磁場は、ブラックホールに飲み込まれてしまい (磁場のクリーニング効果)、大局的な磁場配位のみが生き残っていると考えられる。

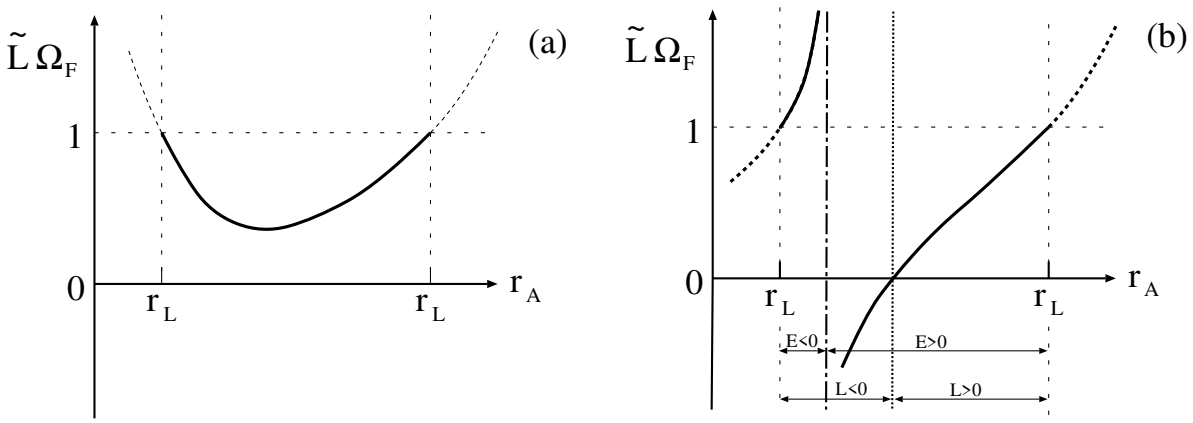


図 7.4: Relations of $\tilde{L}\Omega_F$ to $r_{\rm A}$: (a) $\Omega_F < 0$ or $\omega_H < \Omega_F$, (b) $0 < \Omega_F < \omega_H$. The vertical dot-dashed line denotes the $(G_t)_{\rm A} = 0$ line and the vertical broken line denotes the $\Omega_F = \omega_{\rm A}$ line. In the case of (a), $L\Omega_F$ is always positive; the energy of the accretion must be positive. In the case of (b), however, the negative energy accretion is realized if the Afvén point satisfies the condition $(G_t)_{\rm A} < 0$. The Alfvén point for $E < 0$ must locate inside the ergosphere.

Thus, if $(G_t)_{\rm A} < 0$, we see the negative energy MHD accretion flow, while always $\alpha_{\rm A} > 0$, $(-g_{\phi\phi})_{\rm A} > 0$ and $\mathcal{E} > 0$.

This means that *the energy extraction from the rotating black hole to the magnetosphere is possible.*

Alfvén surfaces. Interestingly, when $L/E > 1$, we find that the total energy of MHD accretion becomes negative; this means the energy extraction from the rotating black hole.

7.3 Magnetosonic Points

To see the behavior of accretion solution, I reduce the Bernoulli equation to the differential form. We should note that when the poloidal velocity equal to the Alfven wave speed, the fast or slow magnetosonic wave speed, it seem this equation diverges. To realize the physical wind solution, we must require the numerator is also zero. So, we obtaina finite value at that point. These points are called as the Alfven point, the fast and slow magnetosonic point, respectively.

相対論的ベルヌーイ方程式の微分形は、以下のように表される：

$$(\ln u_p)' = -\left(\frac{u_p^2}{M^2}\right)^3 \frac{\mathcal{N}}{\left(u_p^2 - u_{\rm AW}^2\right)^2 \left(u_p^2 - u_{\rm FM}^2\right)\left(u_p^2 - u_{\rm SM}^2\right)} , \tag{7.9}$$

where the relativistic Alfvén wave speed $u_{\rm AW}$, the fast magnetosonic wave speed $u_{\rm FM}$ and the slow magnetosonic wave speed $u_{\rm SM}$ are defined by [2]

$$u_{\rm AW}^2(r;\Psi) \equiv \frac{B_p^2}{4\pi\mu n}\alpha , \tag{7.10}$$

[2]アルフェン波と遅い磁気音波は電磁波の変形した波に、速い磁気音速波はイオン気体中の音波に対応していることが知られている。磁気音波の位相速度は磁力線に対する方向により異なるため、その波面の書き方は複雑になる。(「気体力学」朝倉書店、森岡 著、p165 ~ p166 参照)

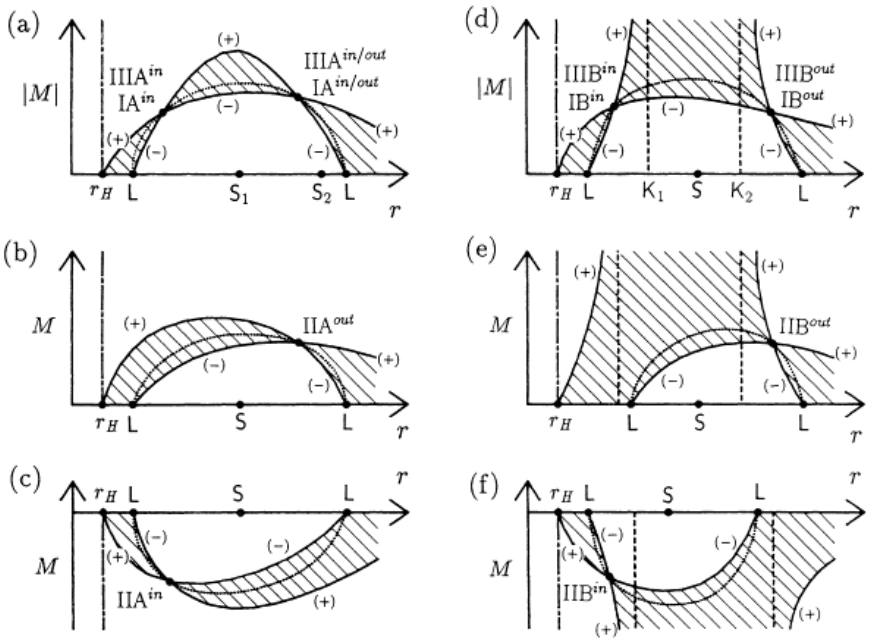


FIG. 5.—Shape of the flow's forbidden (*shaded areas*). The marks (+) and (−) indicate the branches of $M = M_+$ and $M = M_-$. The dotted and broken lines indicate the curves $E^2 = 0$ and of $k_4 = 0$, respectively. The light surface and the separation point are denoted by L and S. In the case of (*a*), either S_1 or S_2 can be selected. The negative M means the inflow.

$$u^2_{\rm FM}(r;\Psi) \equiv \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{Z^2 - 4C^2_{\rm sw}u^2_{\rm AW}}\right) , \tag{7.11}$$

$$u^2_{\rm SM}(r;\Psi) \equiv \frac{1}{2}\left(Z - \sqrt{Z^2 - 4C^2_{\rm sw}u^2_{\rm AW}}\right) , \tag{7.12}$$

with

$$Z \equiv u^2_{\rm AW} + \frac{B^2_\phi}{4\pi\mu n\rho^2_w} + C^2_{\rm sw} , \tag{7.13}$$

$$B_\phi = -4\pi\eta E\rho_w f . \tag{7.14}$$

(7.9) 式の分子は、

$$\mathcal{N} = \left(\frac{E}{\mu}\right)^2 \left\{\left[\mathcal{R}(M^2-\alpha)C^2_{\rm sw} + M^4\mathcal{A}^2\right](\ln B_p)'\right\} + (1/2)(1+C^2_{\rm sw})\left[M^4(M^2-\alpha)k' - \mathcal{Q}\alpha'\right]\Big\} , \tag{7.15}$$

である。ここで、

$$\mathcal{A}^2 \equiv e^2 + \alpha k = f^2(M^2-\alpha)^2 , \tag{7.16}$$

$$\mathcal{R} \equiv \alpha e^2 - 2e^2M^2 - kM^4 , \tag{7.17}$$

$$\mathcal{Q} \equiv \alpha e^2 - 3e^2M^2 - 2kM^4 , \tag{7.18}$$

$$e \equiv 1 - \Omega_F\tilde{L} . \tag{7.19}$$

The prime $(\cdots)'$ denotes $[(\partial_\theta\Psi)\partial_r - (\partial_r\Psi)\partial_\theta]/(\sqrt{-g}B_p)$ which is a derivative along a stream line. The relativistic sound velocity $a_{\rm sw}$ is given by

$$a^2_{\rm sw} \equiv \left(\frac{\partial\ln\mu}{\partial\ln n}\right)_{\rm ad} = (\Gamma-1)\frac{\mu - m_{\rm p}}{\mu} , \tag{7.20}$$

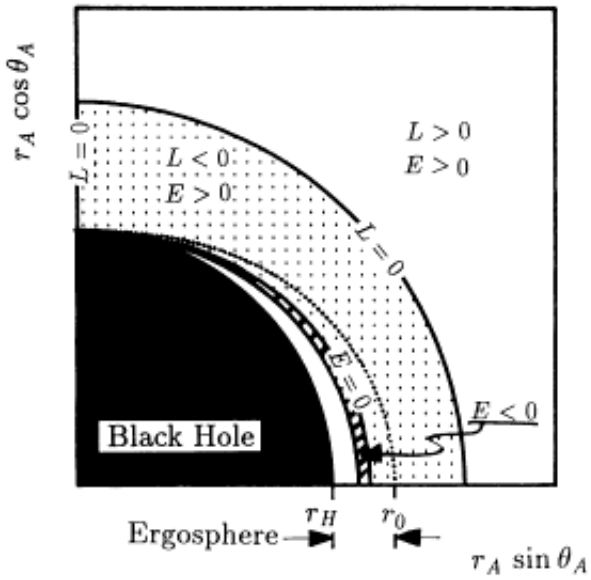


FIG. 6c

FIG. 6.—Contour maps of (*a*) the total energy and (*b*) the angular momentum of flows on the equatorial plane as functions of r_A and Ω_F, and (*c*) the spatial position of the Alfvén point which gives a negative energy flow or a negative angular momentum flow for the case $\Omega_F = 0.3\Omega_{\max}$ ($a = 0.8m$).

図 7.5: The spatial position of the Alfven point generated a negative energy or a negative angular momentum accretion.

and the sound four-velocity is given by $C_{\rm sw}^2 = a_{\rm sw}^2/(1 - a_{\rm sw}^2)$.

When $u_p^2 = u_{\rm AW}^2$, $u_p^2 = u_{\rm FM}^2$ or $u_p^2 = u_{\rm SM}^2$, the denominator becomes zero. Therefore, at these critical points, we must require $N = 0$ to obtain physical wind and accretion solutions which pass through these critical points smoothly. This condition gives a relation for the particle flux η against the location of the magnetosonic point.

From the condition of $u_p^2 = u_{\rm FM}^2$ or $u_p^2 = u_{\rm SM}^2$ at the fast or slow magnetosonic points, the poloidal velocity at these critical points is written as

$$u_{\rm cr} = \left[\frac{\mathcal{R}C_{\rm sw}^2(M^2-\alpha) + M^4\mathcal{A}^2}{\mathcal{R}(M^2-\alpha) - M^4\mathcal{A}^2}\right]_{\rm cr}^{1/2} , \tag{7.21}$$

and by use of the definition of Mach-number (6.32), the particle flux through a flux tube η is

$$\eta = \left(\frac{B_p}{4\pi\mu}\right)_{\rm cr} \frac{M_{\rm cr}^2}{u_{\rm cr}} , \tag{7.22}$$

where the critical Mach-number $M_{\rm cr}^2 \equiv M^2(r_{\rm cr})$ is obtained as a solution of a cubic-equation for M^2, which is derived from $N = 0$ and the poloidal equation (6.27) by eliminating the sound velocity. Thus, the accretion rate for each magnetic tube is denoted by the location of the fast or slow magnetosonic point.

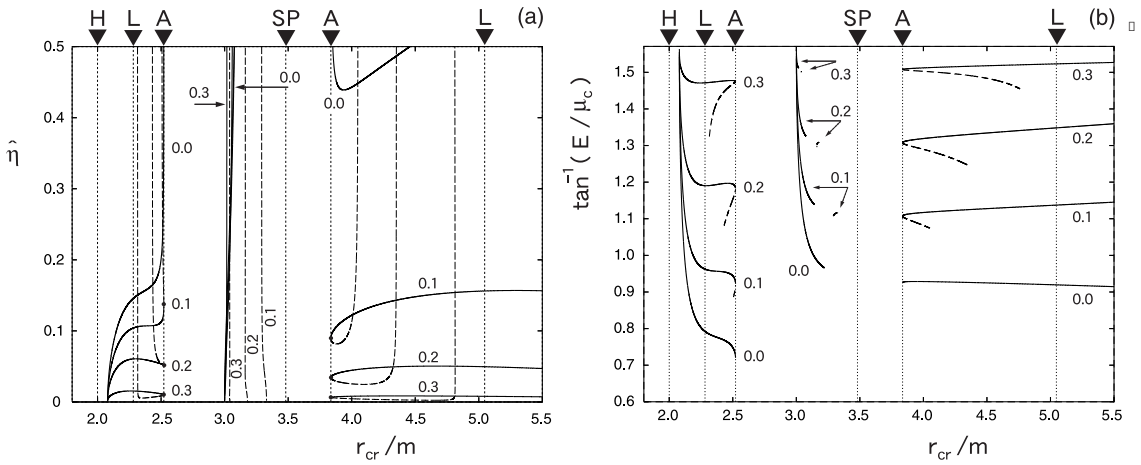


図 7.6: (a) Relations between $r_{\rm cr}$ and $\hat{\eta}$ and (b) relations between $E/\mu_{\rm c}$ and $r_{\rm cr}$ for a radial flow with $\delta = 0$ in a Schwarzschild black hole magnetosphere with several $\zeta_{\rm cr}$ values (0.00, 0.10, 0.20, 0.30). The angular velocity of the magnetic field is $\Omega_F = 0.8\Omega_{\rm max}$, where $m\Omega_{\rm max} = 0.192$. The location of the Alfvén point is specified by $x_{\rm A} = 0.8$, which corresponds to $\Omega_F \tilde{L} = 0.7287$. The solid-curves indicate $\hat{\eta} = \hat{\eta}(r_{\rm F})$ with $r_{\rm cr} = r_{\rm F}$. The dashed-curves indicate $\hat{\eta} = \hat{\eta}(r_{\rm S})$ with $r_{\rm cr} = r_{\rm S}$. The shape of forbidden regions corresponds to type IA.

7.4 Trans-Magnetosonic Accretions

We assume split monopole magnetic field.

- the locations of the trans-fast magnetosonic points
  - inner Fast mafnetosonic point
    between the inner light surface and the event horizon
  - intermediate Fast mafnetosonic point
    between the inner and outer Alfvén points

- the restriction on the fast points
  - For a smaller η value, two states of the accretion are possible. (Fig.7.5a)
  - For a larger η value, the inner branch do not give the fast magnetosonic point. (Fig.7.5b)

- two regimes of the trans-fast MHD accretion solutions
  - inner A.P ⇒ inner F.P. ⇒ E.H.
  - outer A.P ⇒ intermediate F.P. ⇒ E.H.

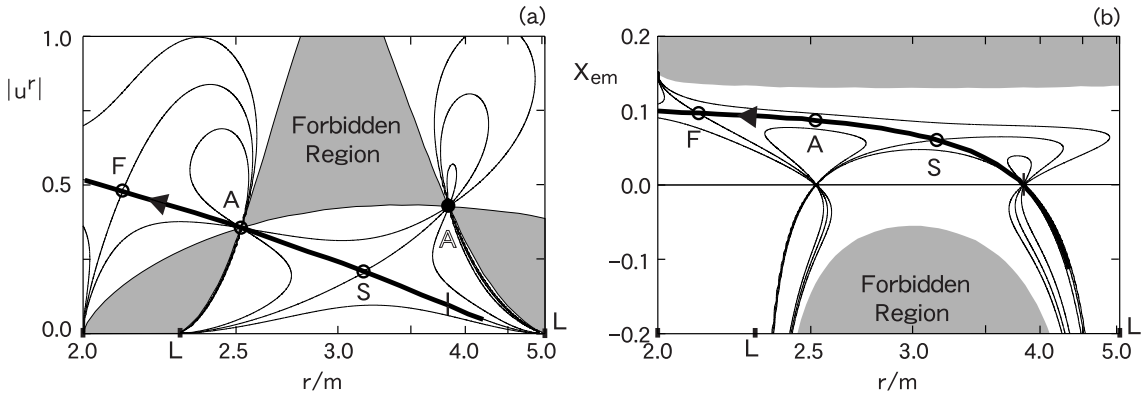


図 7.7: An example of the trans-fast MHD accretion solution (thick curves); (a) radial 4-velocity and (b) the ratio of the electromagnetic energy to the total energy. This solution passes through the inner Alfvén point and the inner fast magnetosonic point (S → A → F → H), where $a = 0.0$, $\Omega_F = 0.8\Omega_{\rm max}$, $\delta = 0.0$, $\Gamma = 4/3$ and $\zeta_{\rm F} = 0.2$. The location of the Alfvén point is specified by $x_{\rm A} = 0.8$, which corresponds to $\Omega_F \tilde{L} = 0.7287$. The location of the fast magnetosonic point is $r_{\rm F} = 2.10935m$, which gives $E_{\rm F}/\mu_{\rm c} = 3.6643$ and $\hat{\eta} = 0.0337$. The requirement that $\hat{\eta} < \hat{\eta}_{\rm max}$ is satisfied.

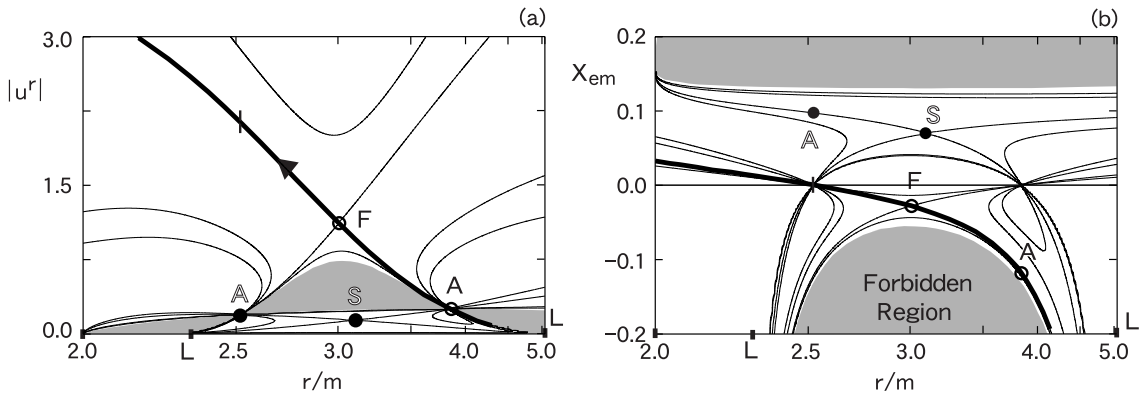


図 7.8: An example of the trans-fast MHD accretion solution (thick curves) passing through the outer Alfvén point and the middle-fast magnetosonic point; (a) radial 4-velocity and (b) the ratio of the electromagnetic energy to the total energy. The location of the fast magnetosonic point is $r_{\rm F} = 3.00490m$, which gives $E_{\rm F}/\mu_{\rm c} = 9.8666$ and $\hat{\eta} = 0.0378$.

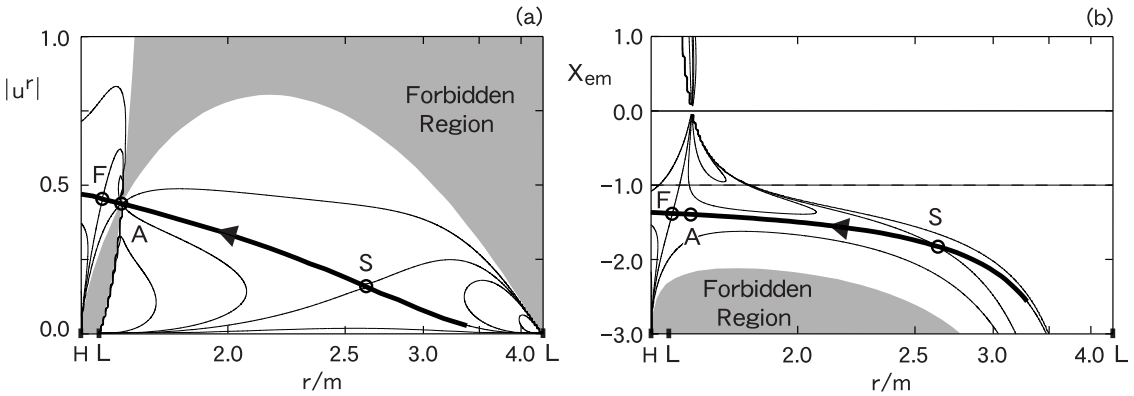


図 7.9: An example of a negative energy trans-fast MHD accretion solution (thick curves); with (a) radial 4-velocity and (b) the ratio of the electromagnetic energy to the total energy. The flow parameters are $a = 0.8m$, $\Omega_F = 0.6\Omega_{\rm max}$, $\delta = 0.0$, $\Gamma = 4/3$, $\zeta_{\rm F} = 0.1$, $x_{\rm A} = 0.95$ ($\Omega_F \tilde{L} = 5.1710$) and $r_{\rm F} = 1.647934m$, which gives $E_{\rm F}/\mu_{\rm c} = -0.15855$ and $\hat{\eta} = 0.0297$.

Magnetically Dominated Limit (force-free limit):

$$\eta \to 0 \ , \quad E \to \infty \ , \quad L \to \infty \ , \tag{7.23}$$

but

$$\eta E \to finite \ , \quad \eta L \to finite \ . \tag{7.24}$$

- The inner Alfven point moves toward the inner light surface.
- The inner fast point moves towards the event horizon.
- The intermediate fast point disappears.
- The accretion must pass through the inner fast point after passing through the inner Alfvén point.

Fluid's pressure dominated accretion onto a black hole

- The forbidden region shrink vertically in Figure.
- The inner fast point disappears.
- Fast magnetosonic wave speed → sound wave speed
- ⇒ Hydro-dynamical accretion solution

第8章　まとめ

“bh-summary.tex”

8.1　ブラックホール観測時代に向けて

- ブラックホール質量 / スピン等 の測定を如何に行うか？
  - 重力レンズ効果　　（ * ）
  - ブラックホール影　　（ 電波 ）
  - スペクトル線のシフト　（ X 線 ）
  - 時空タイプ / 揺らぎ　　（重力波）
  - 重力崩壊　　（ニュートリノ等）

- 黒幕から表舞台へ：「BH 天文学」
  - 銀河形成とブラックホール形成
  - ブラックホール・エンジン　— 磁気圏 ： 太陽プラズマ物理学が参考になる
  - ブラックホール環境の進化 (過去 / 未来)

8.2　極限物理学の探求

- 強重力場の実験場として:「BH 物理学」
  - 一般相対論はどこまで正しいのか？
  - ブラックホールは作れるか？（ by 加速器 ）
  - 裸の特異点は見えるのか？　量子重力？

- 超高エネルギープラズマ物理学の実験場:

付 録A　Bondi flow model (Newtonian HD flows)

"newton-mhd.tex"

(i) 定常・軸対称、球対称、ニュートン重力を仮定。

- 連続の式：

$$\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}(4\pi r^2 \rho v) = 0 \tag{A.1}$$

- 運動方程式：

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} \tag{A.2}$$

- 状態方程式 (ポリトロピック関係式)：

$$P = K\rho^{\Gamma} \tag{A.3}$$

ここで、K と Γ は定数である。断熱的な場合には、Γ は定圧比熱と定積比熱との比を表している。

⇓

(ii) 式 (A.1)、式 (A.2) をそれぞれ積分して、

$$4\pi r^2 \rho |v| = \dot{M} \tag{A.4}$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{a_{\rm sw}^2}{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E \tag{A.5}$$

ここで、$\dot{M}$、E は積分定数である。$\dot{M}$ は、ガスの質量降着率 $(v < 0)$ あるいは 放出率 $(v > 0)$。また、E はエネルギーを意味する。また、$a_{\rm sw} \equiv \sqrt{(\partial P/\partial\rho)_{\rm ad}} = \sqrt{\Gamma P/\rho}$ は音速である。式 (A.4) と 式 (A.5) より、

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\Gamma K}{\Gamma - 1}\left(\frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v}\right)^{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E \tag{A.6}$$

⇓

(iii) 式 (A.2) の右辺 1 項目を、式 (A.1)、式 (A.3) を用いて変形させると

$$(v^2 - a_{\rm sw}^2)\frac{1}{v}\frac{dv}{dr} = \frac{2a_{\rm sw}^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \tag{A.7}$$

あるいは、

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dr} = \frac{(2/r)a_{\rm sw}^2 - (GM/r^2)}{v^2 - a_{\rm sw}^2} \tag{A.8}$$

と書ける。この表式において、$v^2 = a_{\rm sw}^2$ のときには、dv/dr が有限の値を持つためには (物理的な解はこの値が有限であるべき)、式 (A.7) の右辺 (あるいは 式 (A.8) の右辺の分子) が同時にゼロ

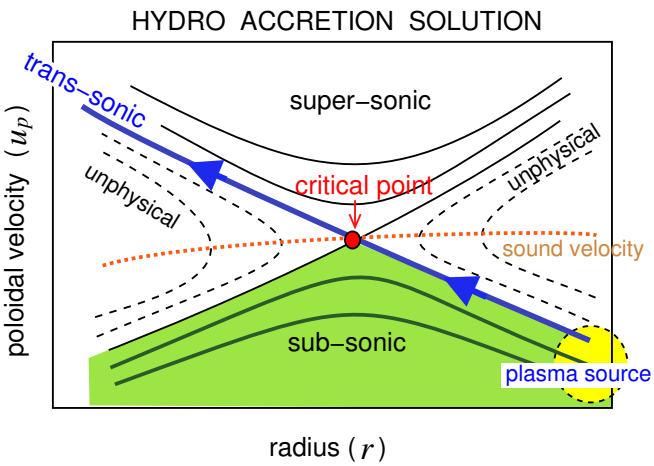


図 A.1: (定常) 遷音速降着流解。音速を超えて超音速になるためには、音速点 (critical point) での臨界条件を満たす必要がある。

になっていなければならない。この条件は、臨界条件 (critical condition) とよばれる。この条件より、音速点の位置は

$$r_{\rm cr} = \frac{GM}{2a_{\rm sw}^2} = \frac{(5-3\Gamma)GM}{4(\Gamma-1)E} \tag{A.9}$$

とあらわされ、天体の質量と流れのエネルギーに依存して決まる。この事情は、本質的にはラバール管を通過するガスの流れの場合と同様である。[1]

この音速点に関し、$\Gamma = 5/3$ のときは音速点を通過する解が存在しなくなることに注意すべきである。完全電離したプラズマが完全に断熱されていた場合には $\Gamma = 5/3$ となるが、このようなプラズマが遠方からの降着する (無限遠で静止) 場合、遷音速とはならず、至るところ亜音速ということになる。初期に亜音速の流れが遷音速となるためには、非断熱効果 (熱伝導や輻射冷却など) によって $\Gamma < 5/3$ となる必要がある。(岩波講座『天体高エネルギー現象』高原文郎 著)

[1] ラバール管の場合には、管の断面積がくびれて最小となる地点に音速点が位置したが、Bondi-flow の場合の流束管の断面積は放射状であり、その断面積は単調に減少 (または増加) である。Bondi-flow の場合には、重力場の存在が effective に断面積を変化させる役割 (流速管がくびれることに相当) を果たしている。ラバール管を通過する流れに関しては、流体力学の教科書を参照。

＜問題＞
(a) 速度と半径をそれぞれ音速と音速点の半径で無次元化して、式 (A.4)、(A.5) をそれぞれ書き換えよ。
[$\bar{v} = v/a_{\rm sw}$、$\bar{r} = r/r_{\rm cr}$ などとおく。]

(b) つぎに、$\bar{v} = 1$、$\bar{r} = 1$、のときの $\dot{\mathcal{M}}$ の値を E の関数として求めよ。

(c) さらに、$\dot{\mathcal{M}} = f(r, u_p; E)$ の形に式を変形し、いろいろな E の値について、r-u_p 面上に $\dot{\mathcal{M}}$ の等高線をプロットせよ (一つの E の値に対して 1 枚の等高線図)。あるエネルギー E に対して、等高線の各曲線は異なる $\dot{\mathcal{M}}$ の値に対して描かれるが、それらの曲線は流体の流れの様子を示す解になっている。

付 録B　Weber-Davis (1967) model [Newtonian MHD flows]

"newton-mhd.tex"

B.1　Basic equations

- **オームの法則**

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \eta \boldsymbol{J} \tag{B.1}$$

- **連続の式**

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{v}) = 0 \tag{B.2}$$

- **運動方程式** (rarial **成分**:Wever-Davis model)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})_r + \frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \tag{B.3}$$

ここで $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{e}_r + v_\phi \boldsymbol{e}_\phi$, $\boldsymbol{B} = B_r \boldsymbol{e}_r + B_\phi \boldsymbol{e}_\phi$ **である。**

- **重力ポテンシャル** [1]

  - Normal stars　[non-relativistic stars]

$$\Psi(r) = -\frac{GM}{r}$$

  - Compact massive stars　[relativistic stars]

$$\Psi(r) = -\frac{GM}{r - r_g}\ , \quad r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

We assume a stationary ($\partial/\partial t = 0$) and axisymmetric ($\partial/\partial \phi = 0$) magnetosphere with ideal MHD ($\eta = 0$) plasma streaming along radial magnetic field lines. [2]

(1) Energy conservation law : **エネルギー保存則**

$$E = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_\phi^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\frac{P}{\rho} + \Psi(r) - \frac{rB_\phi B_r \Omega_F}{4\pi\rho u} \tag{B.4}$$

(2) Angular momentum conservation law : **角運動量保存則**

$$L = rv_\phi - \frac{rB_\phi B_r}{4\pi\rho u} \tag{B.5}$$

---

[1] $\boldsymbol{F} = -\nabla\Psi = -\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

[2] Here, we use the notations in [12].

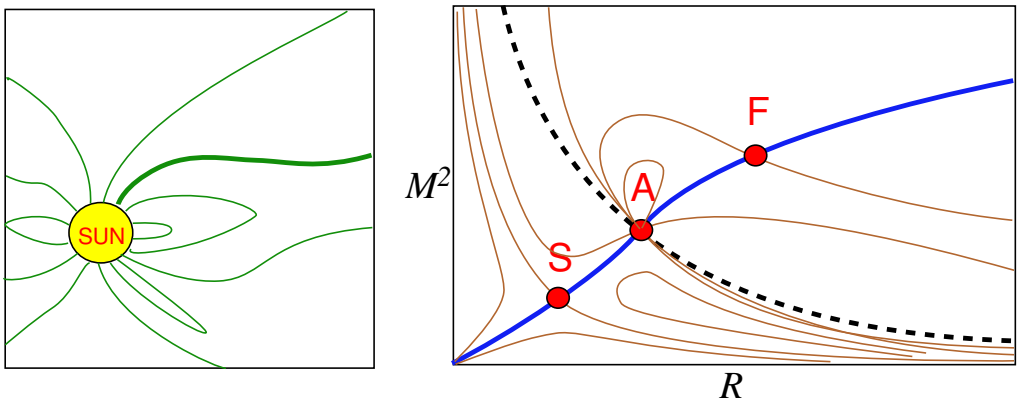


図 B.1: 太陽風のモデル (遷磁気音速流の解)。

(3) Mass flux conservation law : 質量フラックス保存則

$$\dot{M} = \rho u \left(\frac{B_0}{B_r} \right) \tag{B.6}$$

(4) radial magnetic-flux conservation law : 磁気フラックス保存則
放射状形状を仮定した場合 :

$$B_0 = B_r r^2 \tag{B.7}$$

(5) Perfect conducting fluid : Maxwell 方程式より — 完全導体流体

$$r(uB_\phi - v_\phi B_r) = -\Omega_F B_0 \tag{B.8}$$

B.2 Wind equation

The plasma streams along a magnetic field line. There are five conserved quantities for each stream lines.
プラズマは磁力線に沿って流れるが、この流れに関して保存量が存在する。

(i) Total energy of the MHD flow : トータル・エネルギー

$$\mathcal{E} = E - \Omega_F L = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_\phi^2 + na^2 + \Psi(r) - rv_\phi\Omega_F \tag{B.9}$$

(ii) Total angular momentum of the MHD flow : トータル・角運動量

$$L = rv_\phi - CrB_\phi \tag{B.10}$$

(iii) Mass ejection rate : アクリーションレート

$$\dot{\mathcal{M}} = a^{2N} u r^2 \ , \tag{B.11}$$

where $a = (\Gamma P/\rho)^{1/2}$, $N = 1/(\Gamma - 1)$, and

$$C = \frac{B_r}{4\pi\rho u} = \frac{B_0}{4\pi\dot{M}}$$

By using these conserved quantities, we obtain

$$v_\phi = \frac{uL - \Omega_F B_0 C}{ru - (B_0 C/r)} \ . \tag{B.12}$$

v_ϕ は、$u = B_0 C/r^2 (\equiv u_{\rm A})$ のとき、分子がゼロになる。この半径 $r = r_{\rm A}$ は Alfvén radius と呼ぶ。流れの解がスムーズにこの地点を通過して super-Alfvénic flow となるためには、同時に分子もゼロ、すなわち $L = \Omega_F r_{\rm A}^2$ が満たされなければならない。流れの角運動量と磁力線の回転角速度の値により、アルフェン半径の位置が決まる。解曲線中の点 $(r_{\rm A}, u_{\rm A})$ はアルフェン点と呼ばれる。

The equation of motion for solar wind is written

$$\frac{du}{dr} = \frac{N}{D} \ , \tag{B.13}$$

where

$$N = ur\left[(ur^2-1)^2(u-1)\Omega_F^2 + \left(\frac{2a^2}{r^2} - \frac{\Psi'}{r}\right)(ur^2-1)^3 + u\Omega_F^2(1-r^2)(u-1)(ur^2+1)\right] \tag{B.14}$$

$$D = (u^2-a^2)(ur^2-1)^3 - u^2r^2\Omega_F^2(r^2-1)^2 \tag{B.15}$$

先程のアルフェン点での条件に加えて、速い磁気音速点と遅い磁気音速点も流れの臨界点になっている。速い磁気音速点では流速が速い磁気音速に等しくなり、遅い磁気音速点では流速が遅い磁気音速に等しくなる。これらの地点では、上式の分母はゼロとなる。流れの解がスムーズにこの地点を通過して遷磁気音速流となるためには、同時に分子もゼロにならなければならず、(角運動量以外の) 残された流れのパラメータに制限を加えることになる。この事情は、本質的には (磁場無しの場合の) Bondi flow と同様である。

付 録C Conservation laws for stationary and axisymmetric MHD flows

"mhd-deriv.tex" Feb., 2006

We assume an ideal MHD flow ($\sigma \sim \infty$).

(a) the angular frequency[4]

Equation (6.4) can be written

$$F_{\mu\nu}u^{\nu} = -\frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{4\pi}F^{;\nu}_{\mu\nu} + \varepsilon u_{\mu}\right] = 0\ , \tag{C.1}$$

or

$$\begin{aligned} F_{tr}u^{r} + F_{t\theta}u^{\theta} &= 0\ , & \text{(2a)}\\ F_{rt}u^{t} + F_{r\theta}u^{\theta} + F_{r\phi}u^{\phi} &= 0\ , & \text{(2b)}\\ F_{\theta t}u^{t} + F_{\theta r}u^{r} + F_{\theta\phi}u^{\phi} &= 0\ , & \text{(2c)}\\ F_{\phi r}u^{r} + F_{\phi\theta}u^{\theta} &= 0\ . & \text{(2d)} \end{aligned}$$

From eq.(2a) and (2d), we find

$$\frac{F_{tr}}{F_{r\phi}} = \frac{F_{t\theta}}{F_{\theta\phi}} \equiv \Omega_F \tag{C.3}$$

The Maxwell equation (1b) gives

$$\begin{aligned} F_{tr,\theta} + F_{\theta t,r} &= 0, & \text{(C.4)}\\ F_{\phi r,\theta} + F_{\theta\phi,r} &= 0. & \text{(C.5)} \end{aligned}$$

From equations (2a) and (2d), we have

$$\begin{aligned} F_{t\theta} &= -\frac{u^{r}}{u^{\theta}}F_{tr}, & \text{(C.6)}\\ F_{\phi\theta} &= -\frac{u^{r}}{u^{\theta}}F_{\phi r}. & \text{(C.7)} \end{aligned}$$

Substituting equation (C.6) into (C.4), then we get

$$u^{A}(\ln F_{tr})_{,A} = -u^{\theta}\left(\frac{u^{r}}{u^{\theta}}\right)_{,r} \quad (A = r, \theta) \tag{C.8}$$

Similarly from equations (C.7) and (C.5) one gets

$$u^{A}(\ln F_{\phi r})_{,A} = -u^{\theta}\left(\frac{u^{r}}{u^{\theta}}\right)_{,r} \quad (A = r, \theta) \tag{C.9}$$

Now by subtracting (C.8) from (C.9) we see

$$u^A[\ln \Omega_F]_{,A} = 0. \tag{C.10}$$

That is, Ω_F is conserved along the flow lines.

(b) the particle flux per flux tube [4]

Let us now return to equation (C.9) and write it as

$$u^A(\ln F_{\phi r})_{,A} = -u^\alpha_{;\alpha} + u^\alpha u^\theta_{;\alpha}/u^\theta \ . \tag{C.11}$$

From baryon-number conservation it follows that

$$u^\alpha_{;\alpha} = -u^A(\ln \sqrt{-g}n)_{,A} \ . \tag{C.12}$$

With the aid of this we can cast equation (C.11) into the form

$$u^A[\ln \eta]_{,A} = 0 \ , \tag{C.13}$$

where

$$\eta \equiv \frac{\sqrt{-g}nu^\theta}{F_{r\phi}} \tag{C.14}$$

From equation (2d), (2b) and (2c), we also obtain the next relations

$$\eta = \frac{\sqrt{-g}nu^r}{F_{\phi\theta}} = \frac{\sqrt{-g}nu^t(\Omega - \Omega_F)}{F_{\theta r}} \tag{C.15}$$

where $\Omega \equiv u^\phi/u^t$.

(c) The energy and angular momentum [8, Appendix]

The conservation laws (6.5) and (6.15) imply therefore

$$N^\alpha(\tilde{\mu}u_a)_{,\alpha} - \frac{1}{4\pi}\left(\overline{B}^\alpha \overline{B}_{a,\alpha} + \overline{B}_a \overline{B}^\alpha_{;\alpha}\right) = 0, \quad (a = t, \phi) \tag{C.16}$$

where $\tilde{\mu}$ is the generalized enthalpy, $\tilde{\mu} = \mu + (\overline{B}^2)/(4\pi n)$.(The electric field $\overline{E}_\alpha$ as seen by the comoving observer is zero.) From $B_\alpha h^\alpha_\beta T^{\beta\delta}_{;\delta} = 0$, we obtain

$$\overline{B}^\alpha_{;\alpha} = -\overline{B}^\alpha(\ln \mu)_{,\alpha} \ , \tag{C.17}$$

By using the relation (C.17), equation (C.16) can be reduced as

$$N^\alpha(\tilde{\mu}u_a)_{,\alpha} - \frac{\mu}{4\pi}\overline{B}^\alpha(\overline{B}_a/\mu)_{,\alpha} = 0 \ . \quad (a = t, \phi) \tag{C.18}$$

From the definitions of $\overline{B}^\alpha$, η, we obtain

$$\overline{B}^A = -\left(\frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{\eta}\right) N^A \ . \tag{C.19}$$

Then, equation (C.18) can be expressed as

$$N^A\left[\breve{\mu}u_a + \frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{4\pi\eta}\overline{B}_a\right]_{,A} = 0 \ , \tag{C.20}$$

where $\breve{\mu} \equiv \mu - \frac{1}{4\pi\eta}(\overline{B}_t + \Omega_F \overline{B}_\phi)$. That is, for the ideal MHD flow, the 'total energy' E and the 'total angular momentum' L, which are defined as

$$E \equiv \breve{\mu} u_t + \frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{4\pi\eta}\overline{B}_t = \mu u_t - \frac{u_t \Omega_F}{4\pi\eta}(\overline{B}_\phi + \ell \overline{B}_t) \tag{C.21}$$

and

$$-L \equiv \breve{\mu} u_\phi + \frac{u_t + \Omega_F u_\phi}{4\pi\eta}\overline{B}_\phi = \mu u_\phi + \frac{u_t}{4\pi\eta}(\overline{B}_\phi + \ell \overline{B}_t) \ , \tag{C.22}$$

are conserved along the stream lines, where $\ell \equiv -u_\phi / u_t$.

付 録D Derivation of the Poloidal equation

[9][50] "mhd-deriv.tex"

From the definitions of $\overline{B}^{\alpha}$ and η, we also obtain

$$\sqrt{-g}\,\overline{B}^{t} = \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}u^{r}u_{r} + \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}u^{\theta}u_{\theta} - u_{\phi}F_{r\theta}\ , \tag{1a}$$

$$\sqrt{-g}\,\overline{B}^{\phi} = \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}\Omega_{\theta}u^{r}u_{r} + \frac{n\sqrt{-g}}{\eta}\Omega_{r}u^{\theta}u_{\theta} + u_{t}F_{r\theta}\ , \tag{1b}$$

where $F_{r\theta}$ can be expressed

$$F_{r\theta} = -\frac{n\sqrt{-g}}{\eta}\left[u^{\phi} - \Omega_{r}u^{t}\right] \tag{1c}$$

Then we obtain the next relations,

$$u_{t}(\overline{B}_{\phi} + l\overline{B}_{t}) = \frac{n}{\eta}(u_{t}G_{\phi} - u_{\phi}G_{t}) \tag{D.2}$$

with

$$G_{t} \equiv (g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_{F})\ ,$$

$$G_{\phi} \equiv (g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega_{F})\ .$$

By using above relations, we can rewrite equations (C.21), (C.22) as

$$E = \mu u_{t} - \frac{\Omega_{F}}{M^{2}}\left[\mu u_{t}G_{\phi} - \mu u_{\phi}G_{t}\right] \tag{D.3}$$

$$-L = \mu u_{\phi} + \frac{1}{M^{2}}\left[\mu u_{t}G_{\phi} - \mu u_{\phi}G_{t}\right] \tag{D.4}$$

The two eqs.(D.3) and (D.4) can be combined into the convenient relation

$$E - \Omega_{F}L = \mu(u_{t} + \Omega_{F}u_{\phi}) \equiv e\ . \tag{D.5}$$

From (D.3) and (D.4), we obtain

$$\mu u_{t} = \frac{A}{M^{2} - k_{0}}\ , \tag{D.6}$$

$$\mu u_{\phi} = -\frac{B}{M^{2} - k_{0}}\ . \tag{D.7}$$

where

$$\alpha \equiv G_{t} + \Omega_{F}G_{\phi}\ , \tag{D.8}$$

$$A \equiv EM^{2} - eG_{t}\ , \tag{D.9}$$

$$B \equiv LM^{2} + eG_{\phi}\ , \tag{D.10}$$

and we also see the following relations:

$$A - B\Omega_F = e(M^2 - \alpha) \ . \tag{D.11}$$

At the Alfvén point ($M^2 = k_0$), we require $A = B = 0$.

By using the relation $u_\alpha u^\alpha = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \mu^2(1+u_p^2) &= \mu^2(u^t u_t + u^\phi u_\phi) && \text{(D.12)} \\ &= \frac{1}{\rho_w^2 \Omega_F^2}\left[-\alpha(\mu u_t)^2 + 2eG_t(\mu u_t) - e^2 g_{tt}\right] && \text{(D.13)} \\ &= \frac{1}{\rho_w^2}\left[-\alpha(\mu u_\phi)^2 + 2eG_\phi(\mu u_\phi) - e^2 g_{\phi\phi}\right] \ , && \text{(D.14)} \end{aligned}$$

Then, the poloidal equation is obtained in the form of

$$\mu^2(1+u_p^2) = \frac{g^{tt}A^2 - 2g^{t\phi}AB + g^{\phi\phi}B^2}{(M^2-\alpha)^2} \ . \tag{D.15}$$

付 録E Derivation of the Trans-field equation

[36] "mhd-deriv.tex"

The momentum equation in hot plasma reduces to

$$\mu n u^\beta u^\alpha_{;\beta} - P_{,\beta} g^{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta} j_\beta = 0 \ . \tag{E.1}$$

The GS equation dedcrives a force balance in the transfield directions. The transfield component of the momentum equation is given by

$$\frac{F^A{}_\phi}{\tilde{B}_p^2}[\mu n u^\beta u_{A;B} + (n u_A u^\beta \mu_{,\beta} - P_{,\beta}) - F_{AB} j^\beta] = 0 \ , \tag{E.2}$$

and is rewritten in the form

$$\begin{aligned} &\frac{F^A{}_\phi}{\tilde{B}_p^2}\left\{\mu n[-u^\beta(u_{B;A} - u_{A;B}) - u^t \partial_A u_t - u^\phi \partial_A u_\phi]\right. \\ &\left.+(n u_A u^\beta \mu_{,\beta} - P_{,\beta}) - F_{AB} j^\beta - F_{A\phi} j^\phi - F_{At} j^t\right\} = 0 \ , \end{aligned} \tag{E.3}$$

where $\tilde{B}_p^2 \equiv F_{B\phi} F^B{}_\phi$ $(A, B = r, \theta)$. We can pick up the toroidal current density j^ϕ from each term in the lefthand side of eq.(E.3) as

$$-\frac{\mu n F^A{}_\phi u^B (u_{B;A} - u_{A;B})}{\tilde{B}_p^2} = \frac{M^2}{G_t} j^\phi + \mu \eta G_t B_p^2 \partial_\Psi \left(\frac{\eta}{G_t n}\right) \ , \tag{E.4}$$

$$-\frac{\mu n}{\tilde{B}_p^2} F^A{}_\phi (u^t \partial_A u_t + u^\phi \partial_A u_\phi) = -\mu n (u^t \partial_\Psi u_t + u^\phi \partial_\Psi u_\phi) \ , \tag{E.5}$$

$$-\frac{F^A{}_\phi}{\tilde{B}_p^2}(F_{AB} j^B + F_{A\phi} j^\phi) = -j^\phi - \frac{F_{r\theta}}{4\pi\sqrt{-g}} \partial_\Psi \left(\sqrt{-g} F^{r\theta}\right) \ , \tag{E.6}$$

$$-\frac{F^A{}_\phi}{\tilde{B}_p^2} F_{At} j^t = -\frac{G_\phi \Omega_F}{G_t} j^\phi - \frac{\Omega_F G_t B_p^2}{4\pi} \partial_\Psi \left(\frac{G_\phi}{G_t}\right) \ , \tag{E.7}$$

$$-\frac{F^A{}_\phi}{\tilde{B}_p^2} P_{,\beta} = n \mu C_{\rm sw}^2 \partial_\Psi [\ln(\mu/n)] = -n \partial_\Psi \mu \ , \tag{E.8}$$

where [1] we define $\partial_\Psi \equiv (F^A{}_\phi / \tilde{B}_p^2) \partial_A = (1/\tilde{B}_p^2)(g^{rr} \partial_r \Psi \partial_r + g^{\theta\theta} \partial_\theta \Psi \partial_\theta)$ and $B_p \equiv -B^A B_A G_t^{-2}$ (NOTE: $B_p \equiv -B^A B_A$ in Nitta et al. 1991).

[1] Here, we use the relation

$$P_{,\beta} = P\Gamma (\ln n)_{,\beta} = \frac{P\Gamma}{a_{\rm sw}^2} (\ln \mu)_{,\beta} = n\mu \left[-C_{\rm sw}^2 (\ln M^2)_{,\beta} + 2 C_{\rm sw} (\ln \eta)_{,\beta}\right] = n \mu_{,\beta} \tag{E.9}$$

Consequently, eq.(E.3) is rewritten as the equation for j^ϕ :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - M^2}{G_t} j^\phi &= -\mu n(u^t \partial_\Psi u_t + u^\phi \partial_\Psi u_\phi) - \frac{F_{r\theta}}{4\pi\sqrt{-g}} \partial_\Psi \left(\sqrt{-g} F^{r\theta}\right) \\ &\quad + \mu\eta G_t B_p^2 \partial_\Psi \left(\frac{\eta}{G_t n}\right) - \frac{\Omega_F G_t B_p^2}{4\pi} \partial_\Psi \left(\frac{G_\phi}{G_t}\right) - n\partial_\Psi \mu \ . \end{aligned} \tag{E.10}$$

By using the relations

$$\partial_\Psi e = \mu \left(\partial_\Psi u_t + \Omega_F \partial_\Psi u_\phi + u_\phi \partial_\Psi \Omega_F\right) + \frac{e}{\mu} \partial_\Psi \mu \tag{E.11}$$

and

$$\partial_\Psi L = -\mu \partial_\Psi u_\phi - u_\phi \partial_\Psi \mu + \frac{1}{4\pi\eta} \partial_\Psi \sqrt{-g} F^{r\theta} + \frac{\sqrt{-g}}{4\pi} F^{r\theta} \partial_\Psi \left(\frac{1}{\eta}\right) \ , \tag{E.12}$$

we can arraive at the final form

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - M^2}{G_t} j^\phi &= -n u^t \partial_\Psi e + \mu n u^t u_\phi \partial_\Psi \Omega_F + \frac{\eta B_\phi}{\rho_w^2} \partial_\Psi L + \frac{\eta B_\phi^2}{4\pi\rho_w^2} \partial_\Psi \left(\frac{1}{\eta}\right) \\ &\quad + \mu\eta G_t B_p^2 \partial_\Psi \left(\frac{\eta}{G_t n}\right) - \frac{\Omega_F G_t B_p^2}{4\pi} \partial_\Psi \left(\frac{G_\phi}{G_t}\right) \\ &\quad + \left(\frac{n}{\mu} e u^t + \frac{\eta}{\rho_w^2} u_\phi B_\phi - n\right) \partial_\Psi \mu \ . \end{aligned} \tag{E.13}$$

Because the Maxwell equation gives

$$j^\phi = \frac{-1}{4\pi\sqrt{-g}} \left[\partial_r \left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{rr}} \frac{G_t}{\rho_w^2} \partial_r \Psi\right) + \partial_\theta \left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{\theta\theta}} \frac{G_t}{\rho_w^2} \partial_\theta \Psi\right)\right] \ , \tag{E.14}$$

we can eliminate j^ϕ from eqs.(E.13) and (E.14) to obtain the GS equation for hot plasma.

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_w^2(\alpha - M^2)}{4\pi\sqrt{-g}} \left\{\partial_r \left[\frac{\sqrt{-g}(\alpha - M^2)}{\rho_w^2} \frac{\partial_r \Psi}{g_{rr}}\right] + \partial_\theta \left[\frac{\sqrt{-g}(\alpha - M^2)}{\rho_w^2} \frac{\partial_\theta \Psi}{g_{\theta\theta}}\right]\right\} \\ = \ & -2\pi \left[\frac{\rho_w^2}{M^2} (e^2\eta^2)' + g_{tt}(L^2\eta^2)' + 2g_{t\phi}(EL\eta^2)' + g_{\phi\phi}(E^2\eta^2)'\right] \\ & + \frac{4\pi\mu^2\rho_w^2(\alpha - M^2)}{M^2} \eta\eta' + \frac{4\pi\mu^2\rho_w^2}{M^4} G_\phi \eta^2 \left[\left(\frac{e}{\mu}\right)^2 - (\alpha - M^2)\right] \Omega_F' \\ & + \rho_w^2(\alpha - M^2) \left(\frac{n}{\mu} e u^t + \frac{\eta}{\rho_w^2} u_\phi B_\phi - n\right) \mu' \end{aligned} \tag{E.15}$$

関連図書

[1] Appl, S., & Camenzind, M. 1988, A&A, 206, 258

[2] Asseo, E., & Sol, H., 1987, Phys. Report, 148, 307

[3] Bardeen, J.M., Press, W.H., & Teukolsky, S.A., 1972, ApJ, 178, 347

[4] Bekenstein, J.D., & Oron, E., 1978, Phys.Rev., D18, 1809

[5] Blandford, R.D., 1990, in *Active Galactic Nuclei* (Springer, New York), p.161

[6] "Testing Cowling's Antidynamo Theorem near a Rotating Black Hole"
Brandenburg, A., 1996, ApJ, 465, L115-L118

[7] "Electromagnetic Extraction of Energy from Kerr Black Holes" Blandford, R.D., & Znajek, R.L. 1977, MNRAS, 179, 433

[8] "Centrifugally Driven MHD-Winds in Active Galactic Nuclei"
Camenzind, M., 1986a, A& A, 156, 137

[9] "Hydromagnetic Flows from Rapidly Rotating Compact Objects
I. Cold Relativistic Flows from Rapid Rotators"
Camenzind, M., 1986a, A& A, 162, 32

[10] "Hydromagnetic Flows from Rapidly Rotating Compact Objects
II. The Relativistic Acisymmetric Jet Equilibrium"
Camenzind, M., 1987, A& A, 184, 341

[11] 加藤正二, 1989, 天体物理学基礎理論 (ごとう書房)

[12] Ckakrabariti, S.K., 1990, MNRAS, 246,134

[13] Chitre, D.M., & Vishveshwara C.V., 1975, Phys. Rev., D12, 1538

[14] "Dynamics of Plasma close to the Horizon of a Schwarzschild Black Hole"
Chou, W. & Tajima, T. 1999, ApJ, 513, 401-408

[15] "Black-Hole Eddy Current"
Damour, T., Phys.Rev., D18, 1978

[16] "The Dynamo Effect in Magnetohydrodynamic Accretion onto a Rotating Black Hole"
Egi, M., Tomimatsu, A., & Takahashi, M., 1997, Plasma Phys. Control. Fusion, 39, A117-A183

[17] "Electron-Positron Pairs in Hot Accretion Flows and Thin Disk Coronae"
Esin, A,A. 1999, ApJ, 517, 381-395

[18] “Effeciency of Magnetized Thin Accretion Disks in the Kerr MetricC”
Gammie,C,F,. 1999, ApJ, 522, L57-L60

[19] “Electoromagnetic extraction of rotational energy from disk-fed black holes: the strength of the Blandford-Znajek process”
Ghosh, P,. & Abramowicz, M,A.1997, MNRAS, 292, 887-895

[20] Ginzbrug, V.L., & Ozernoi, I.M., 1965, Sov. Phys. JETP, 20, 689

[21] “Flares on the Black Holes”
Gruzinov, A. astro-ph/9908101

[22] “活動銀河核の X 線時間変動とブラックホール質量”
林田 清、2000, 天文月報 (11 月号), 93, 656

[23] Hirotani, K., Takahashi, M., Nitta, S., & Tomimatsu, A. 1992, ApJ., 386, 455

[24] “磁力線の運動に意味があるか?”
今井 功、Parity Books 続・間違いだらけの物理概念 (丸善)、p123

[25] Iwasawa K. et al. 1996, MNRAS, 282, 1038

[26] “The $\omega\Omega$ Dynamo in Accretion Disks of Rotating Black Holes”
Khhanna, R., & Camenzind, M., 1996, A&A, 307, 665-685

[27] King, A.R., Lasota, J.P., & Kundt, W., 1975, Phys. Rev., D12, 3037

[28] “Magnetized Accretion inside the Marginally Stable Orbit around a Black Hole”
Krolik, J,H. 1999, ApJ, 515, L73-L76

[29] Landau, L.D., & Lifshitz, E.M., 1878, Fluid Mechanics 2nd ed. Pergamon Press, Oxford

[30] ランダウ、リフシッツ, 1878, 場の古典論 (東京図書)

[31] “Stationary Axisymmetric Electromagnetic Fields in the Kerr Metric”
Linet, B., 1979, J. Phys. A Math. Gen., 12, 839

[32] Lichnerowicz, A., 1967,*Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, (Benjamin Press, New York)

[33] “Extracting Energy from Black Holes: the Rrelativistic Importance of the Blandford-Znajek Mechanism”
Livio, M., Ogilvie, G,I. & Pringle, J,E. 1999, ApJ, 512, 100-104

[34] “Sound Horizon of Accretion onto a Kerr Black Hole”
Lu. J.F., 1986, Gen.Rela.Grav., 18,45

[35] 西川恭治、大林康二、若谷誠宏, 1981, 連続流体物理学 (朝倉書店)

[36] Nitta. S, Takahashi, M. & Tomimatsu, A. 1991, Phys.Rev., D44, 2295

[37] “Energy Tansport in a Rotation-Modulated Pulsar Wind”
Melatos, A., & Melrose, D.B., 1996, MNRAS, 279, 1168

[38] Padovani, P., Burg, R., & Edelson, A.S., 1990, ApJ, 353, 438

[39] Phinney, E.S., 1983, Ph.D. thesis (*Unpublished thesis*) (Cambridge University)

[40] Shapiro, S.L., & Teukolsky, S.A., 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron stars* (Wiley, New York)

[41] "Magnetically Dominated Accretion onto Black Holes"
Punsly, B.1991, ApJ, 372, 424-447

[42] "Minimum Torque and Minimum Dissipation Black Hole-Driven Winds"
Punsly, B. 1998, ApJ, 506, 790-804

[43] Petterson, J.A., 1975, Phys. Rev., D12, 2218

[44] "MHD Shock Conditions for Accreting Plasma onto Kerr Black Holes - II "
Rilett D., Takahashi M., Fukumura K., & Tsuruta S., 2001, in preparation

[45] Soltan, A., 1982, MNRAS, 200, 115

[46] Sakurai, T. 1985, A& A, 152, 121

[47] Sakurai, T. 1987, PASJ, 39, 821

[48] Sakurai, T. 1990, Computer Phys. Report, 12, 247

[49] Straumann, N. 1984, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Text and Monographs in Physics (Springer, Berlin)

[50] "Magnetohydrodynamic Flows in Kerr Geometry: Energy Extraction from Black Holes"
Takahashi, M., Nitta, S., Tatematsu, Y., & Tomimatsu, A. 1990, ApJ, 363, 206.

[51] Takahashi, M. 1994, in Proceedings of the Seventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, ed. R. T. Jantzen, & G. M. Keiser (Singapore: World Scientific), 1298

[52] "Trans-Fast MHD Winds in a Pulsar Magnetosphere"
Takahashi, M., 1998, PASJ, 50, 271-283

[53] "Accreting Plasmas in Black Hole Magnetosphere"
Takahashi, M., 1999, *Highly Energetic Physical Process and Mechanisms for Emission from Astrophysical Plasmas, IAU Symp. 195*, ed. P.C.H.Martens & S.Tsuruta (ASP Conference Series)

[54] Takahashi, M. 2000a, in Proceedings of the 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology, ed. E. Aubourg, T. Montmerle, L. Paul & P. Peter (North-Holland, Amsterdam) CD-ROM 01/27.

[55] Takahashi, M. 2000b, Il Nuovo Cimento, 115, 843

[56] "Trans-magnetosonic Accretion in a Black Hole Magnetosphere"
Takahashi M., 2002, ApJ, 570, 264

[57] “MHD Shock Conditions for Accreting Plasma onto Kerr Black Holes - I ”
Takahashi M., Rilett D., Fukumura K., & Tsuruta S., 2002, ApJ, 572, 950

[58] Tanaka Y. et al. 1996, Nature, 375, 659

[59] “Black Hole Magnetpsoheres around Thin Disks Driving Inward and Outward Winds” Tomimatsu, A., & Takahashi, M. 2001, ApJ, 552, 710

[60] Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A., ed. 1986, *Black Holes: The Membrane Paradigm* (New Haven: Yale Univ. Press)

[61] “Adabatic Fluid Spheres in General Relativity” Tooper, R.F., 1965, ApJ, 142, 1541

[62] “The Energetics of Black Holes in Electromagnetic Fields by the Penrose Process”
Wagh, S.M., & Daddhich, N., 1989, Phys. Repo., 183, 137-192

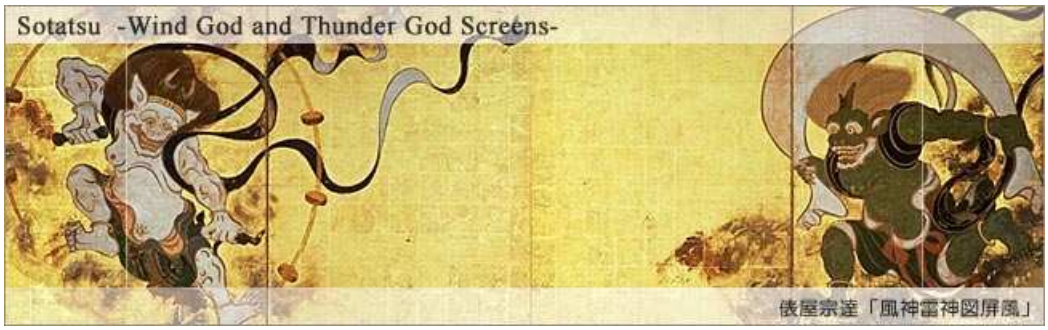
[63] Wald, R.M., 1974, Phys. Rev., D10, 1680

[64] “The Angular Momentum of the Solar Wind”
Weber, E.J., & Davis ,L.Jr., 1967, ApJ, 148, 217-227

[65] “Magnetohydrodynamic Accretion and the Instability of Smooth Trans-Alfvénic Flow”
Williams, D.F., 1975, MNRAS, 171, 537-549

[66] “Black Hole Electrodynamics and the Carter Tetrad”
Znajek, R.L., 1977, MNRAS, 179, 457

[67] “The Electroc and Magnetic Conductivity of a Kerr Hole”
Znajek, R.L., 1978, MNRAS, 185, 833



MHD (電磁場と流体) の神さま !?