

ブラックホール磁気圏研究会 相対論のツボ

相対論のブラックホール

大阪市立大学 大学院理学研究科 物理
石原 秀樹

2011年3月2日

目次

1 Black Holes

2 Schwarzschild Black Holes

2.1 Static spherically symmetric black holes

2.1.1 Birkoff の定理

2.2 Mass of Schwarzschild black holes

2.2.1 Schwarzschild ブラックホールの周りの粒子と光

3 Singularity

3.1 Coordinate singularity

3.2 Curvature singularity

4 Horizons

4.1 EventHorizons

4.2 Apparent horizon

4.2.1 測地線偏差

4.2.2 光線束の偏差

ブラックホールとは・・・

- ブラックホールとは、**重力が強くて光さえ逃げ出せない物体である。**
- ブラックホールの**地平線の内側からは、光が外に出ることができない。**
- ブラックホールの**中心には、時空の特異点がある。**

ほぼ、正しいが、
うるさい相対論屋は同意しないだろう

相対論における座標系

物理では、時空における点の位置を指定するために座標系という収縮可能な網目を用いる。

あらかじめ、時空に座標が描いてあるわけではなく、物理の現象は座標系の選び方によらない。

物理現象を簡潔に記述するには、うまい座標系を選ぶ必要がある。

「一般相対論では、座標系を自在にあやつる！」



Schwarzschild Black Hole

しゃぶりつくしてみよう



Schwarzschild 計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned}$$

G=c=1 の単位系

真空のEinstein方程式の厳密解であるこの計量は

時空がブラックホールの構造をもつことを表しているらしい

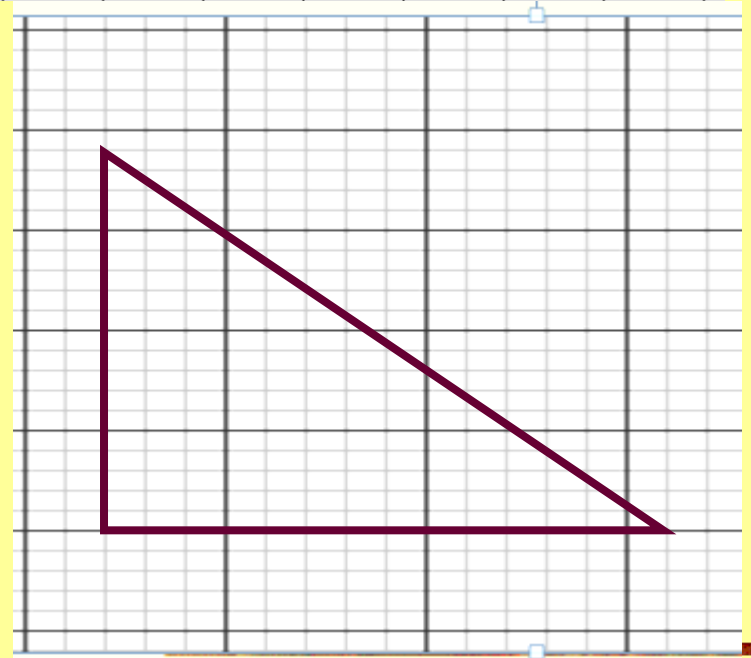
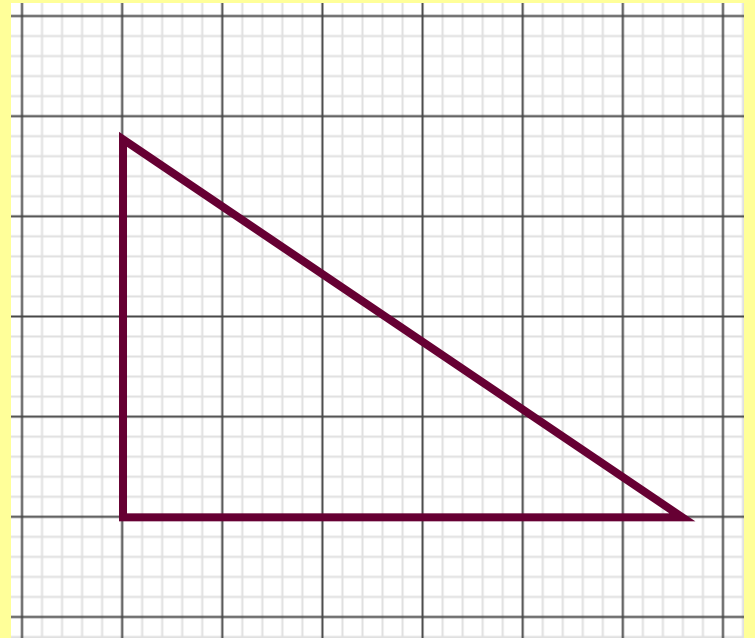
計量とは

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

ピタゴラスの定理

$$ds^2 = (adx)^2 + (bdy)^2$$

一目盛りの長さ



計量とは

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

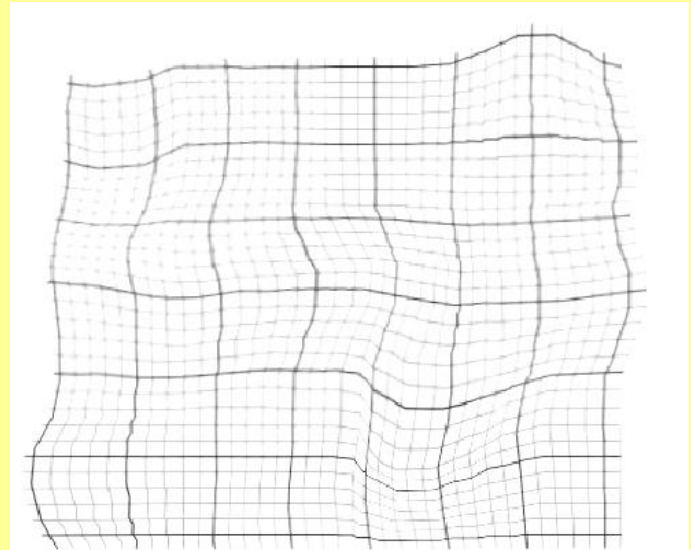
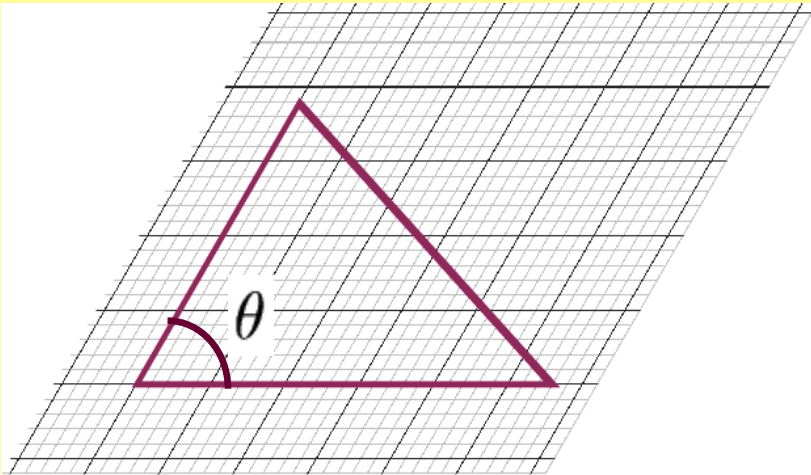
ds^2

一目盛りの長さが場所によって異なる

計量とは

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - 2dxdy \cos \theta$$

余弦定理



$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + 2g_{xy}dxdy \\ &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Birkoff の定理

一般の球対称計量

$$ds^2 = -l(t, r)dt^2 + h(t, r)dr^2 + a(t, r)dtdr + k(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



座標変換

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)}dt^2 + e^{\lambda(r,t)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

真空のEinstein方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 0$$



$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$\dot{\lambda} = 0$$

$$ds^2 = -e^{-\lambda(r)+f(t)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

真空球対称解は静的

$$ds^2 = -e^{-\lambda(r)+f(t)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



座標変換

$$ds^2 = -e^{-\lambda(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

真空球対称解は静的

真空中球対称時空は静的で
計量は、唯一-Schwarzschild
(Birkoff の定理)

c.f.

真空中の球対称電場は静電場

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

遠方粒子の運動

測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ は、計量とその微分で表される Christoffel シンボル

粒子の速度が光速より十分小さいとして

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{tt}^i \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

遠方での Schwarzschild 計量を用いて

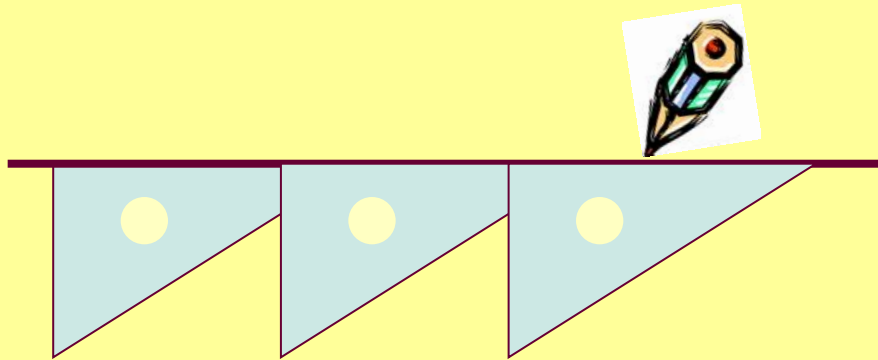
$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{GM}{r} = 0 \quad \text{Newtonの運動方程式}$$

M は重力源の質量

測地線の2つの側面

曲がった空間でも、1点の周りの微小な領域では平坦と変わらない。

曲がった時空中の粒子の運動は、微小な領域では“直線”で表される



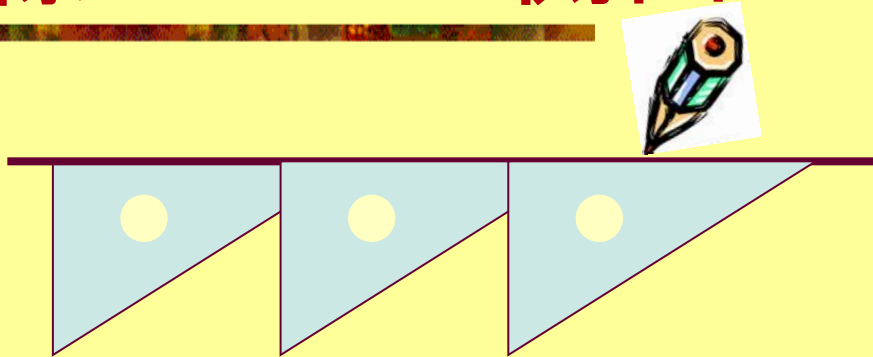
定規の向きを変えないように線分に沿って定規をずらし、線分を伸ばす。

平面では直線，球面では大円が得られる。

一般の曲がった空間で得られる曲線を測地線と呼ぶ。

式で書くと
$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$$

測地線の2つの側面



$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$$

平面上の測地線である直線は2点を結ぶ最短曲線。
面白いことに、一般の測地線も2点を結ぶ最短曲線になっている。

$$\delta(\text{曲線の長さ}) = 0$$

円周半径

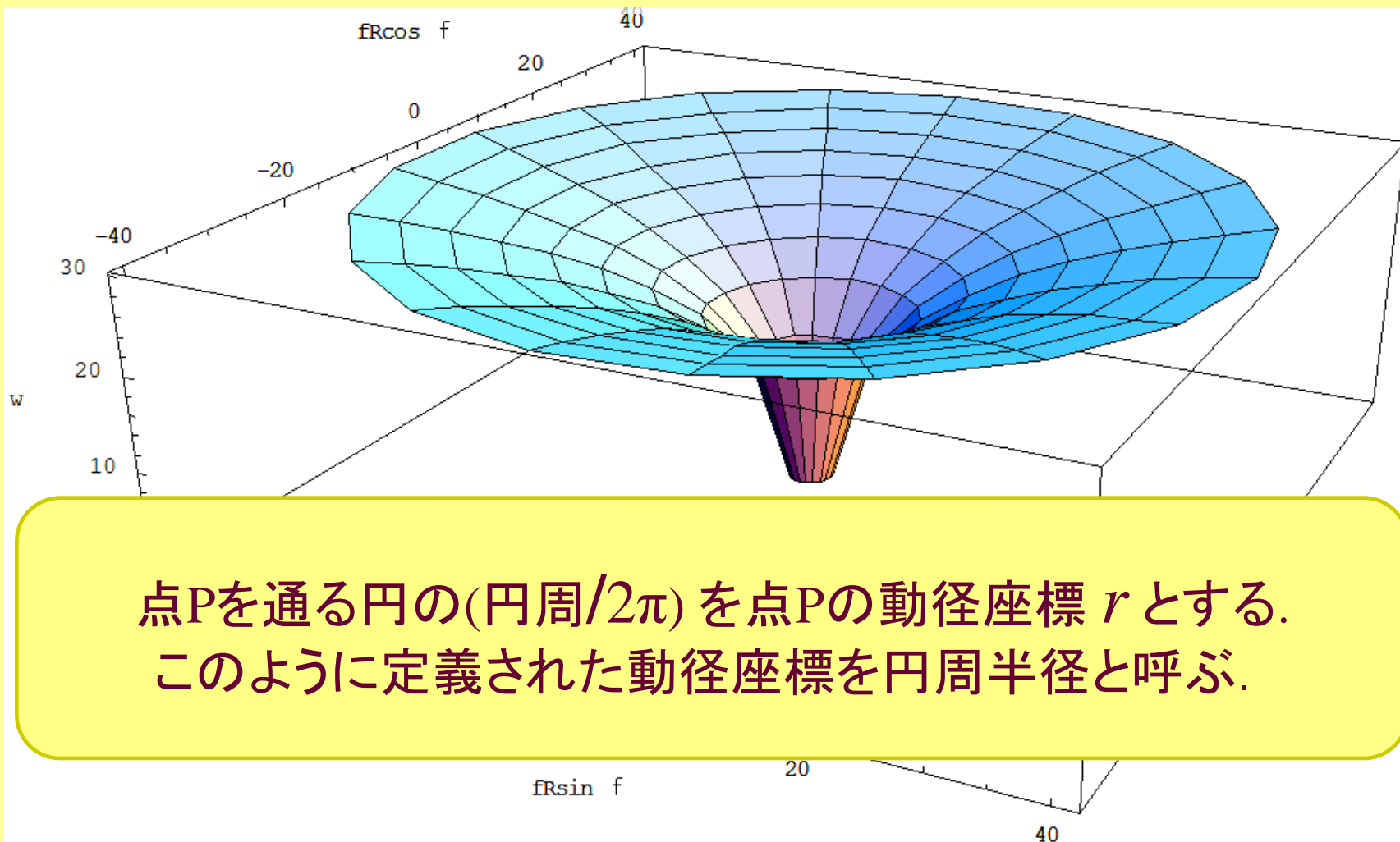
回転対称性のある空間に対して、極座標 r, θ が便利

平面の場合、点Pの動径座標 r は、原点Oからの距離

漏斗のように曲面の中心部分に穴があいている場合には、中心点を曲面上に取ることができない。

ゆえに、原点からの距離を r とすることができない。

円周半径





Schwarzschild BHの 周りの粒子と光

粒子の力学

作用積分は世界線の長さ

$$S = \int d\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

等価な作用積分

$$S = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau$$

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2)$$

質量 = エネルギー

$$E = mc^2$$

$E = p_t$ だから

$$p_t^2 = m^2 c^4$$

粒子が運動しているときには

$$-p_t^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 c^4 = 0$$

一般的に書くと

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2 = 0 \quad \text{On-shell condition}$$

粒子の力学

作用積分は世界線の長さ

$$S = \int d\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

等価な作用積分

$$S = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau$$

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2) = 0$$

On-shell condition

有効ポテンシャル

時間推進対称性と回転対称性より $p_t = E$, $p_\phi = L$ は保存量

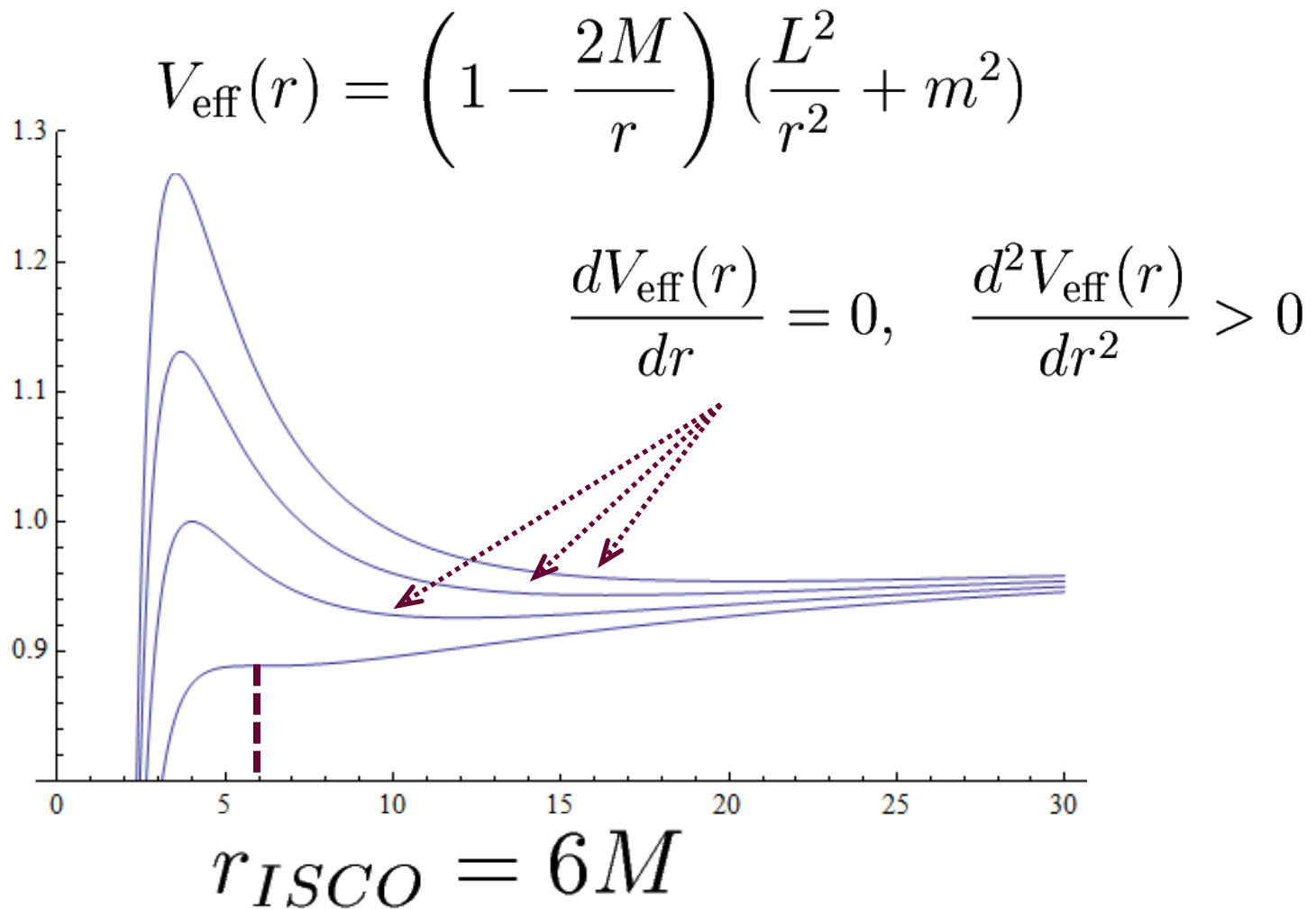
$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(g^{tt} p_t^2 + g^{rr} p_r^2 + g^{\phi\phi} p_\phi^2 + m^2) \\ &= \frac{1}{2}(g^{rr} p_r^2 + g^{tt} E^2 + g^{\phi\phi} L^2 + m^2) = 0 \end{aligned}$$

$$g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad g^{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad \text{より}$$

$$(p^r)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + m^2\right) = E^2$$

$$\text{有効ポテンシャル} \quad V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + m^2\right)$$

最内安定円軌道

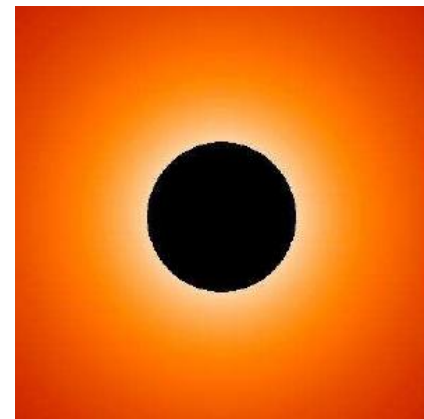
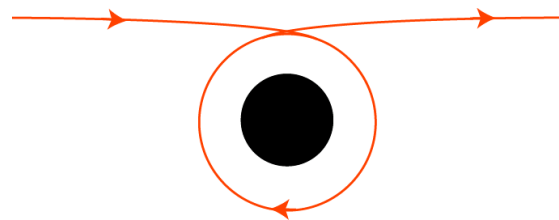
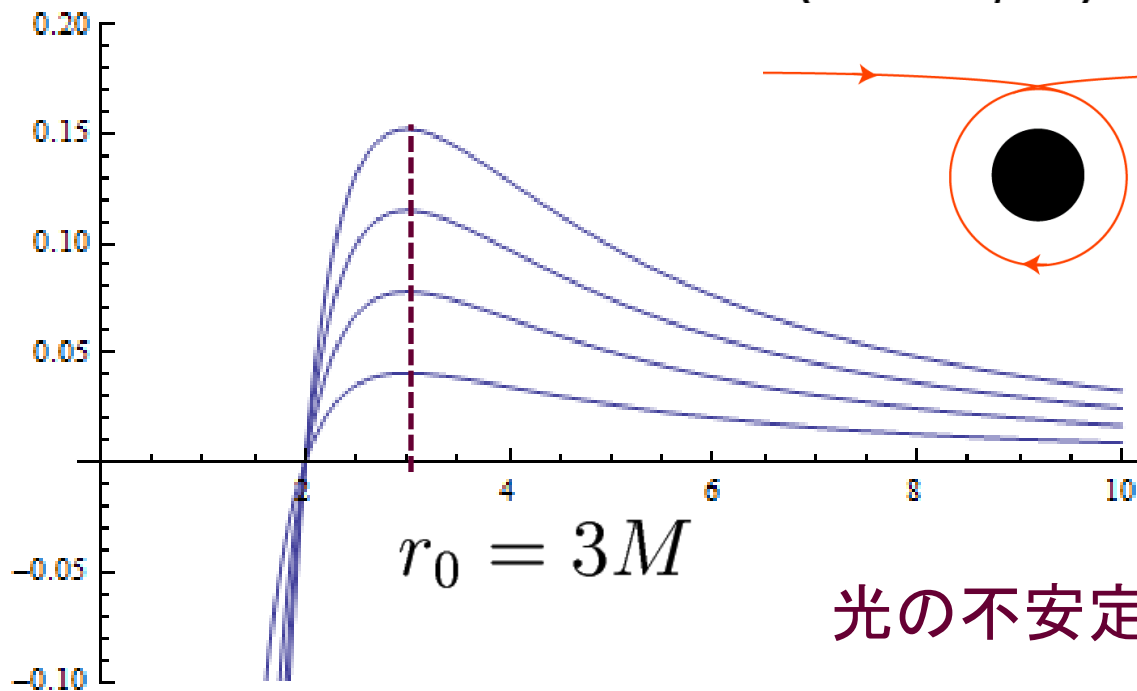


光の有効ポテンシャル

光はmassless

$$(p^r)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + m^2\right) = E^2 \quad \text{より}$$

有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + m^2\right)$



光の不安定円軌道

特異点

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

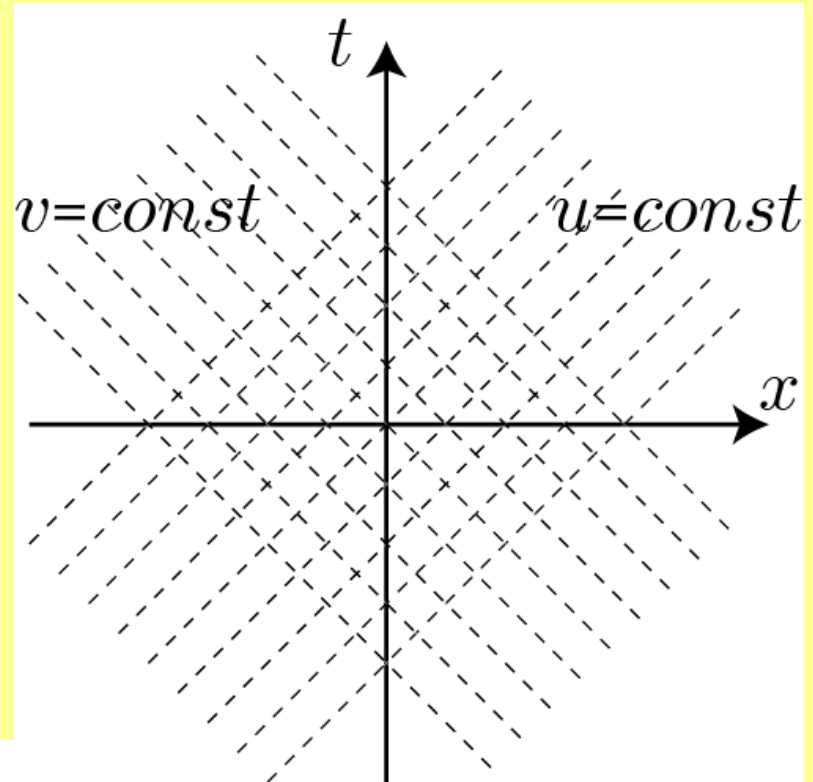
$g_{\mu\nu}$ が $r = 2M$ と $r = 0$ で特異性をもつ.

Minkowski 時空のNull座標

Lorentz計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 \\ &= (-dt + dx)(dt + dx) \\ &= -2du \, dv \end{aligned}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Euclid空間の複素座標に似ている

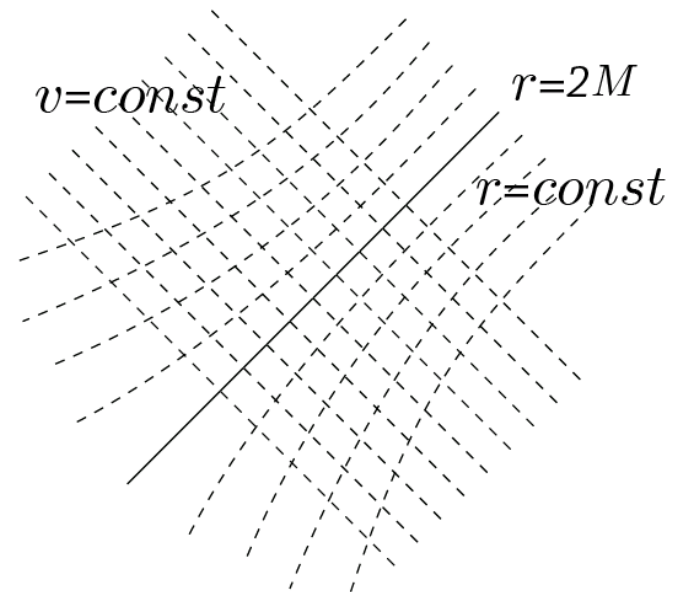
$$z = x + iy$$

$$z^* z = (x - iy)(x + iy) = x^2 - (iy)^2$$

$$dz^* dz = (dx - idy)(dx + idy) = dx^2 + dy^2$$

Eddington-Finkelstein 座標

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-dt^2 + \left(\frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}\right)^2\right) \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \left(dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-dv + 2\frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}\right) dv \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr \end{aligned}$$



計量の正則性

Schwarzschild metric with the Eddington-Finkelstein coordinate

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

$r = 2M$ 近傍では

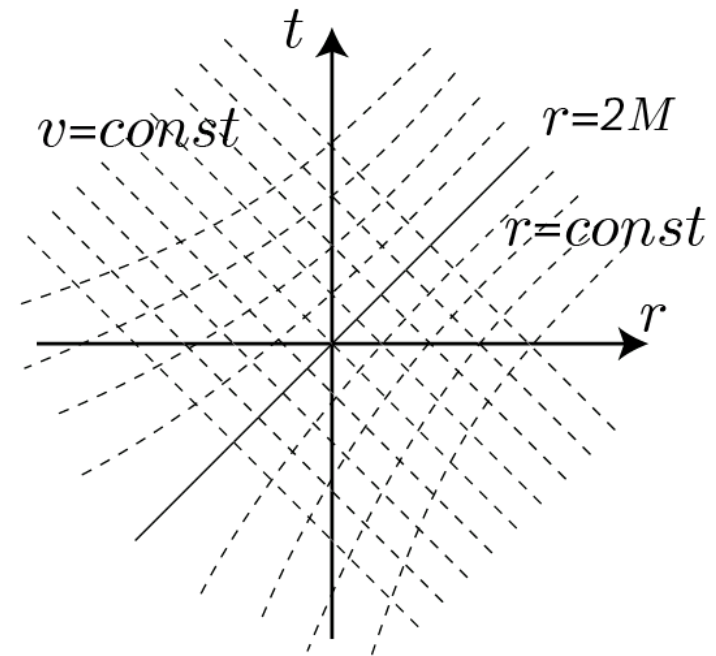
$$ds^2 = 2dvdr + r_g^2 d\Omega^2$$

$\theta = const, \phi = const$

$v = const$ 内向きNull測地線

$r = const = 2M$ 外向きNull測地線

$r=2M$ で計量は正則



曲率特異点

時空は $r=2M$ でつながっていて, $r=0$ まで行ける.

$r=0$ の特異性は？

時空の曲率

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad R_{\mu\nu}, \quad R$$

Einstein 方程式の真空解

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (R = 0), \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$$

Riemann Curvature Square

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto \frac{1}{r^6} \quad \begin{array}{l} r \rightarrow 0 \\ \rightarrow \infty \end{array}$$

Schwarzschild 時空の特異点

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$r = 2M$ 座標特異点：座標系の選び方が悪い

$r = 0$ 曲率特異点：物理的な特異点



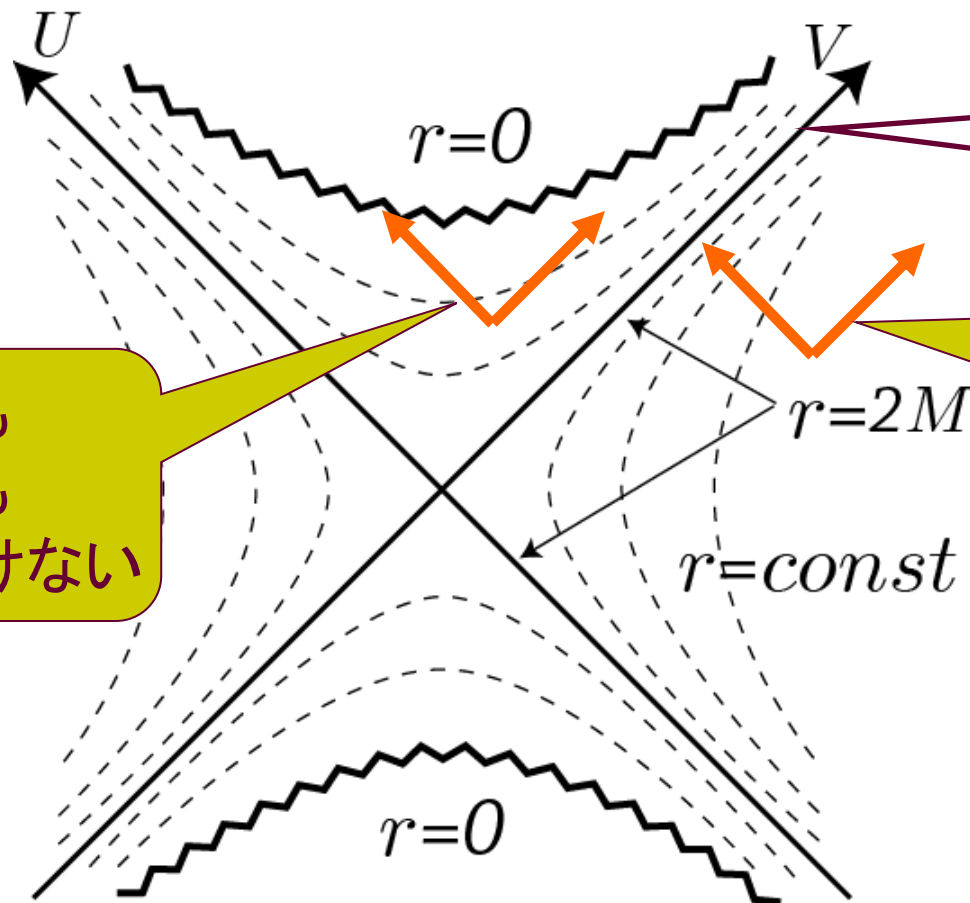
Horizon of Black Holes

Kruskal 座標

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(dt - \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \left(dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv \\ &= - \frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M} dudv \\ &= \frac{2M}{r} e^{-r/2M} (4M)^2 d(e^{-u/4M}) d(e^{v/4M}) \\ &= - \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV \\ &\quad -UV = e^{(v-u)/4M} = e^{r/2M} \frac{r - 2M}{2M} \end{aligned}$$

Kruskal ダイアグラム

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 d\Omega^2 \quad -UV = e^{(v-u)/4M} = e^{r/2M} \frac{r-2M}{2M}$$



Event
Horizon

外向きの光は
無限遠に行ける

内向きの光も
外向きの光も
無限遠に行けない

Event horizon

無限遠に光が届く領域と届かない領域があるとき、この境界をEvent horizon と呼ぶ。

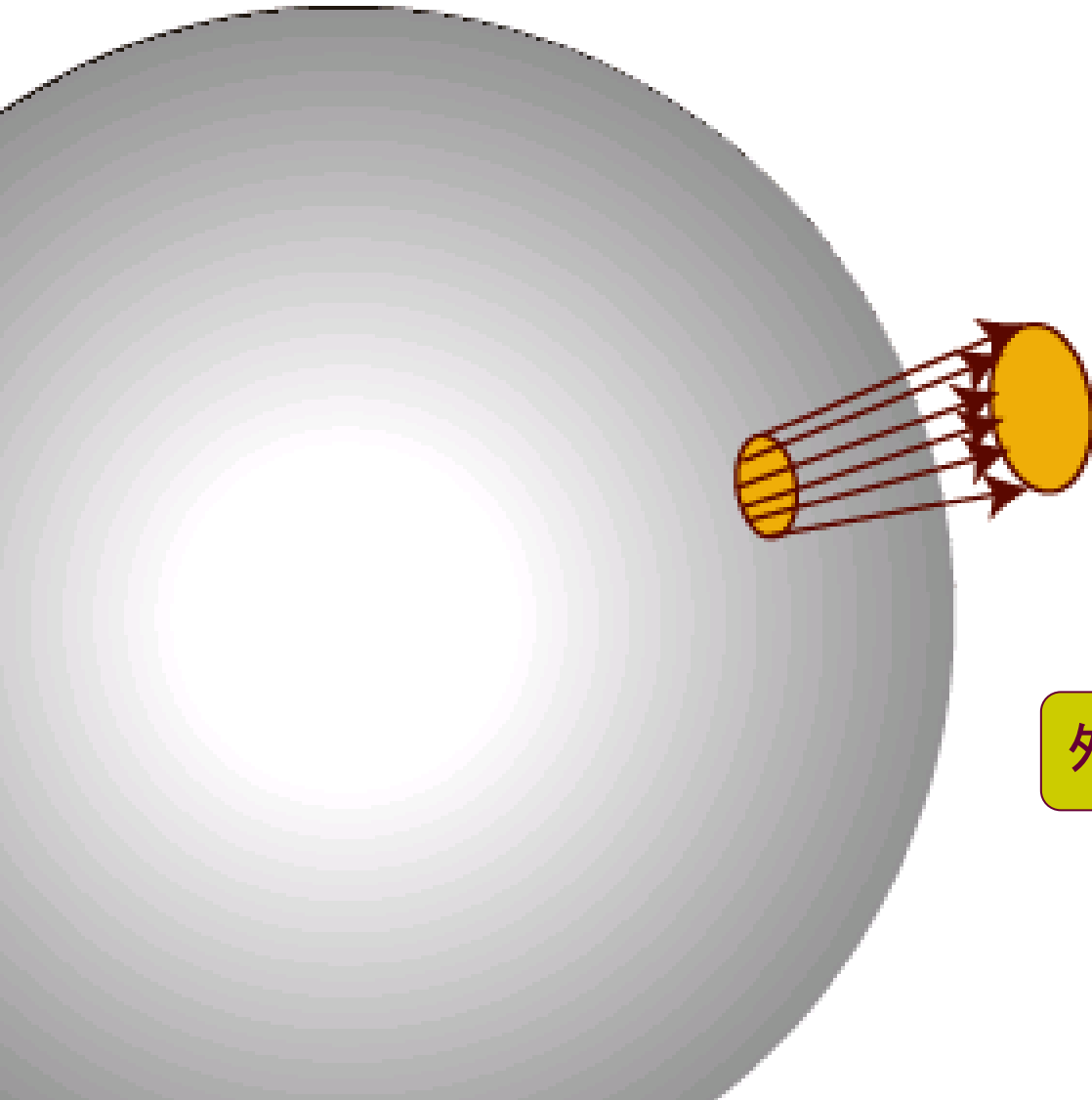
Event horizon をもつ時空をブラックホールと呼ぶ。

Event Horizonは時空が無限遠まで分かって初めて定義できる。



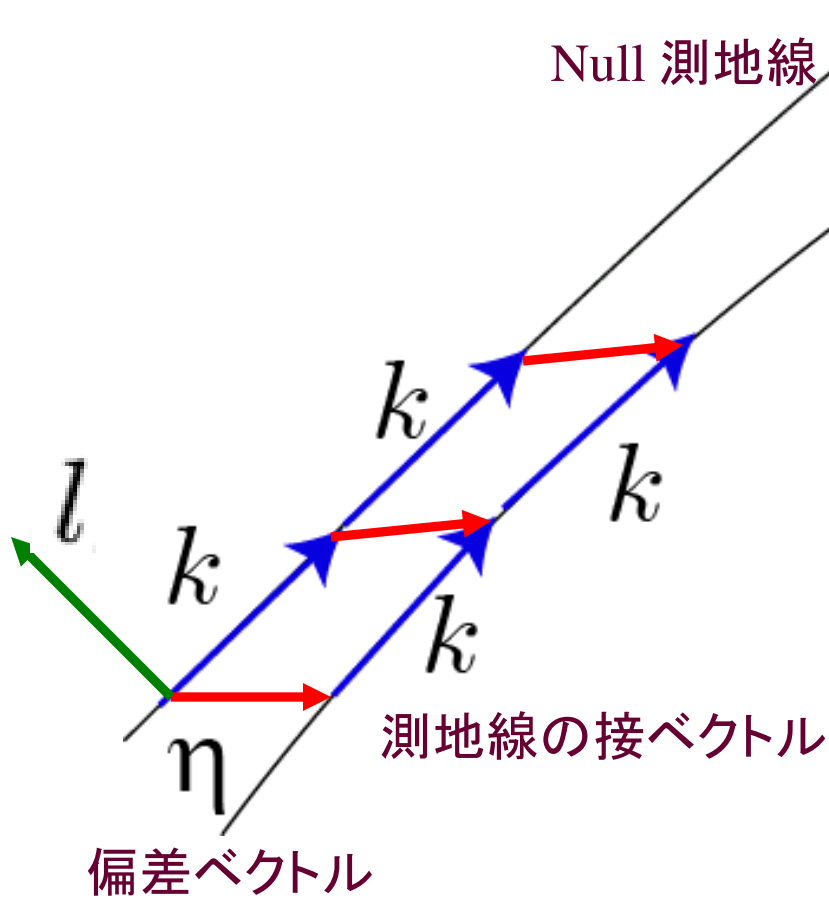
Apparent Horizon

Expansion of Null congruence



外向きの光線束は広がる

測地線偏差



$$k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0$$

$$k_\mu k^\mu = 0$$

$$[k, \eta] = (k^\nu \partial_\nu \eta^\mu - \eta^\nu \partial_\nu k^\mu) \partial_\mu = 0$$

$$k^\nu \nabla_\nu l^\mu = 0$$

$$l_\mu l^\mu = 0, \quad k_\mu l^\mu = -1$$

$$\tilde{\eta}^\mu = h^\mu{}_\nu \eta^\nu$$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu$$

射影テンソル

Minkowski時空での例

$$k_\mu = (-\omega, 0, 0, \omega)$$
$$l_\mu = \left(-\frac{1}{2\omega}, 0, 0, -\frac{1}{2\omega}\right)$$
$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\eta}^\mu = h^\mu{}_\nu \eta^\nu = (0, \eta_x, \eta_y, 0)$$

光線に垂直な偏差ベクトル

光線束断面の変形

$$k^\nu \nabla_\nu \tilde{\eta}^\mu = \tilde{B}^\mu{}_\nu \tilde{\eta}^\nu$$

$$\tilde{B}^\mu{}_\nu = h^\mu{}_\lambda \nabla_\rho k^\lambda h^\rho{}_\nu$$

$$\tilde{\eta}^A + \Delta \tilde{\eta}^A = (\delta^A{}_B + \tilde{B}^A{}_B \Delta \lambda) \tilde{\eta}^B$$

$$\delta^A{}_B + \tilde{B}^A{}_B \Delta \lambda \quad \text{ベクトルの写像; 断面の変形}$$

$$\tilde{B}_{AB} = \frac{1}{2} \theta h_{AB} + \sigma_{AB} + \omega_{AB}$$

Expansion

θ

Shear

σ_{AB}

Rotation

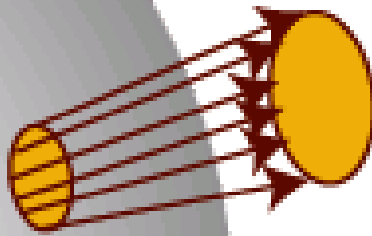
ω_{AB}

Trace part

Traceless
Symmetric part

Anti-symmetric part

Expansion of Null congruence



$$\theta = h^{\mu\lambda} \nabla_{\mu} k_{\lambda}$$

$$= (g^{\mu\lambda} + l^{\mu} k^{\lambda} + l^{\lambda} k^{\mu}) \nabla_{\mu} k_{\lambda}$$

$$= \nabla_{\mu} k^{\mu}$$

divergence

Schwarzschild時空のExpansion

計量

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 d\Omega^2$$

動径方向のNull 測地線の接ベクトル

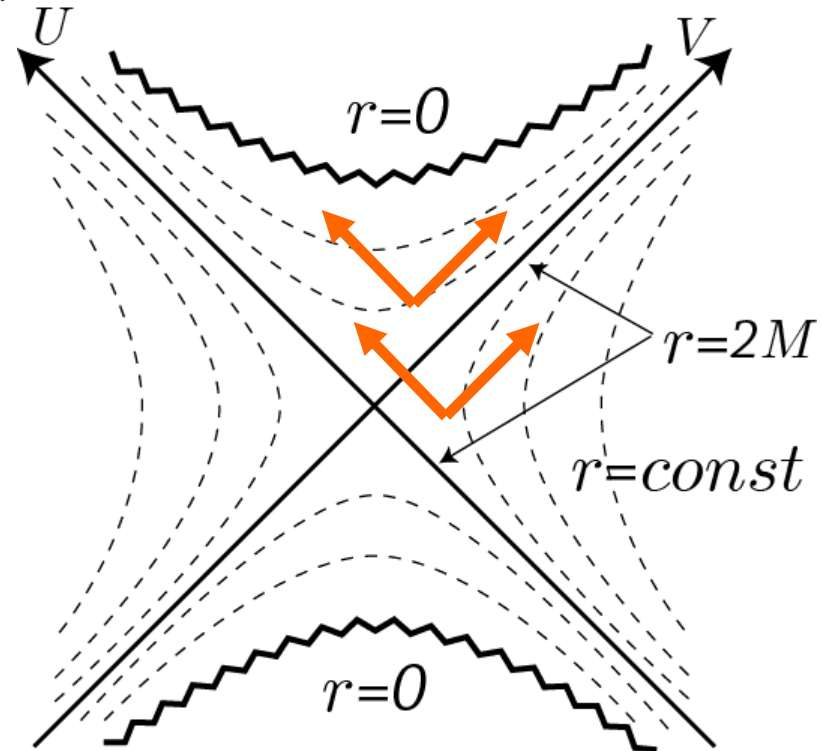
$$k_\mu = -\partial_\mu U$$

光線束のExpansion

$$\theta_+ = \nabla^\mu k_\mu = \frac{-U}{2Mr}$$

$$U = 0 \quad (r = 2M)$$

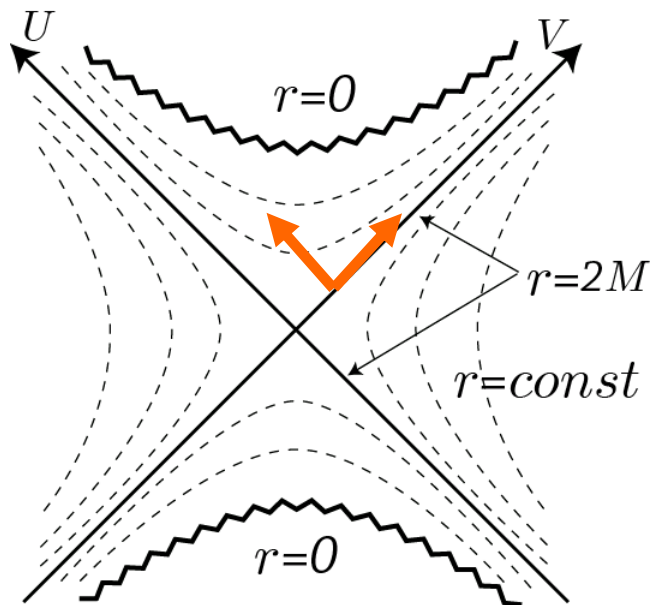
$$\theta_+ = 0$$



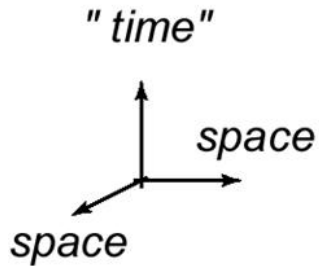
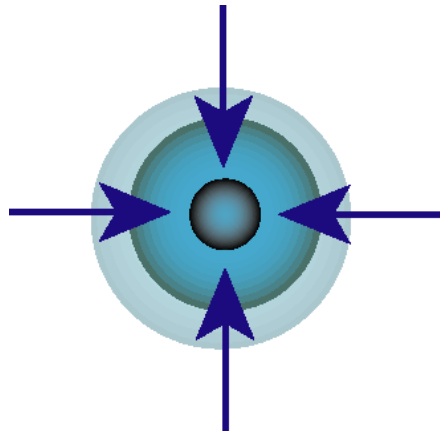
Apparent horizon

Schwarzschild 計量の $r = 2M$ は $\theta_+ = 0$ となる球面である。

これをApparent horizon と呼ぶ



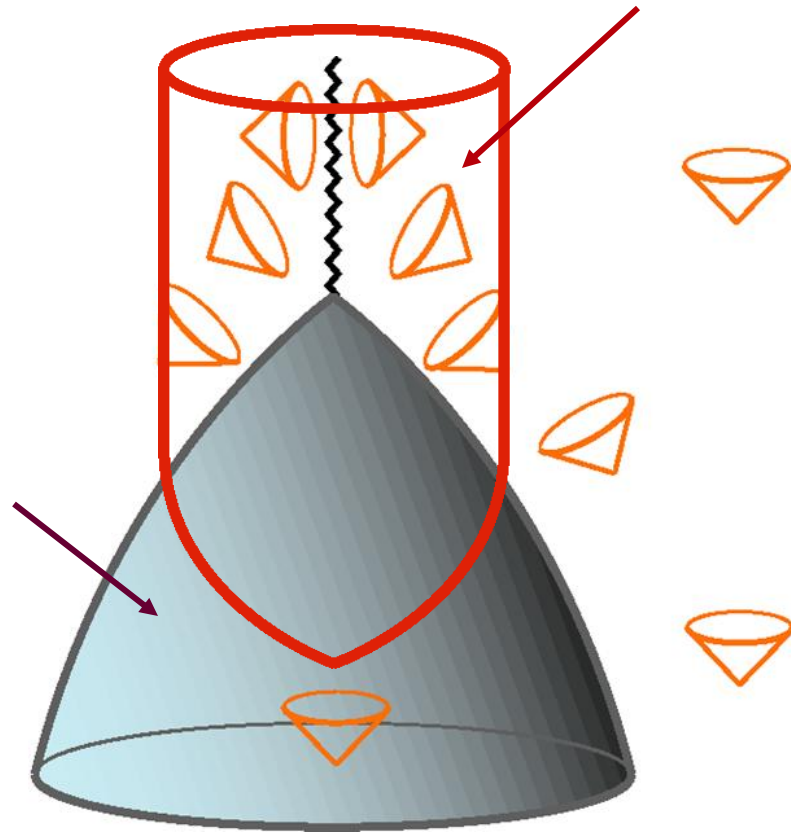
成長するブラックホール



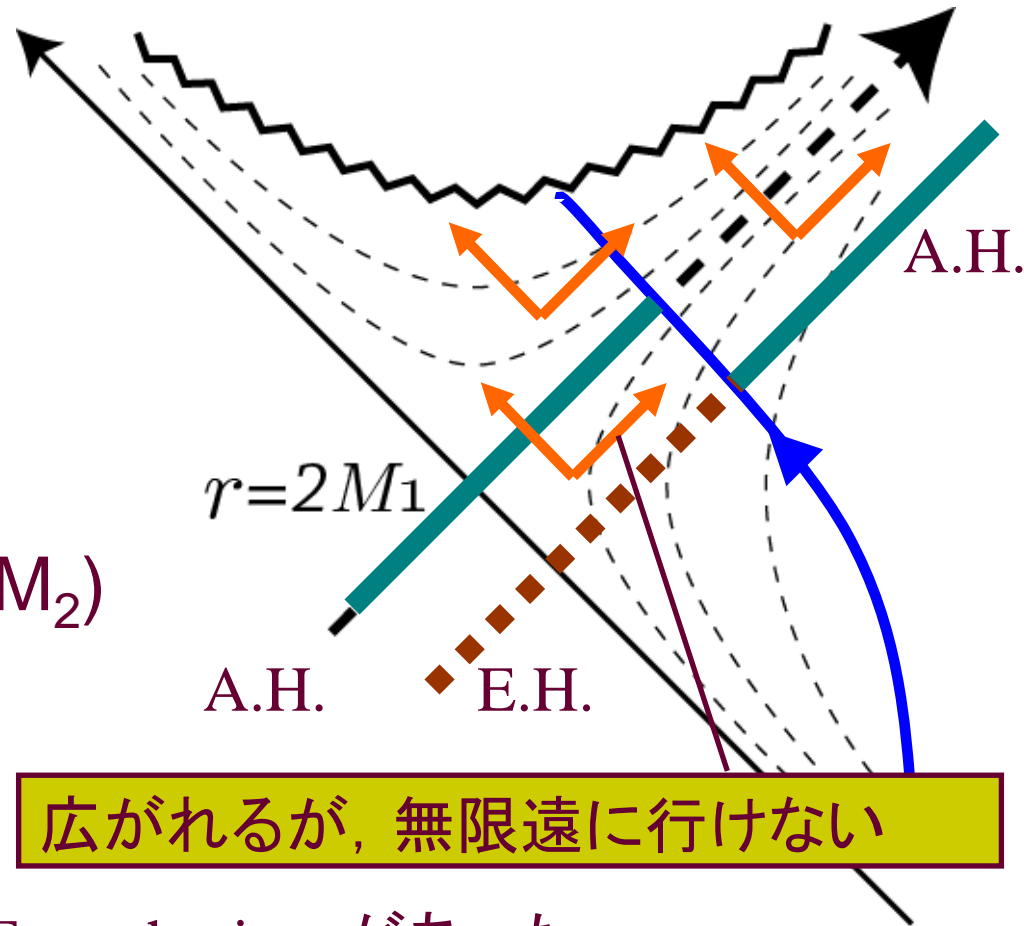
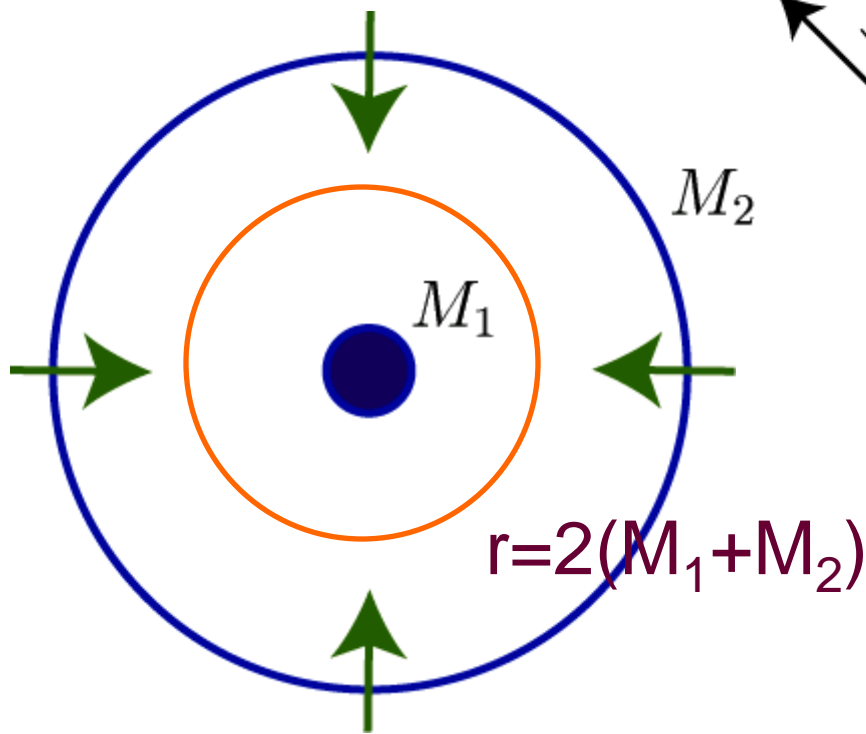
星



ブラックホールの表面



シェルの落下



広がれるが、無限遠に行けない

Apparent horizonの外にEvent horizonがあった。



Schwarzschild時空の対称性

解析力学

ラグランジアンが座標 z に依存していなければ,



力学系は z の並進に対して対称性をもつ



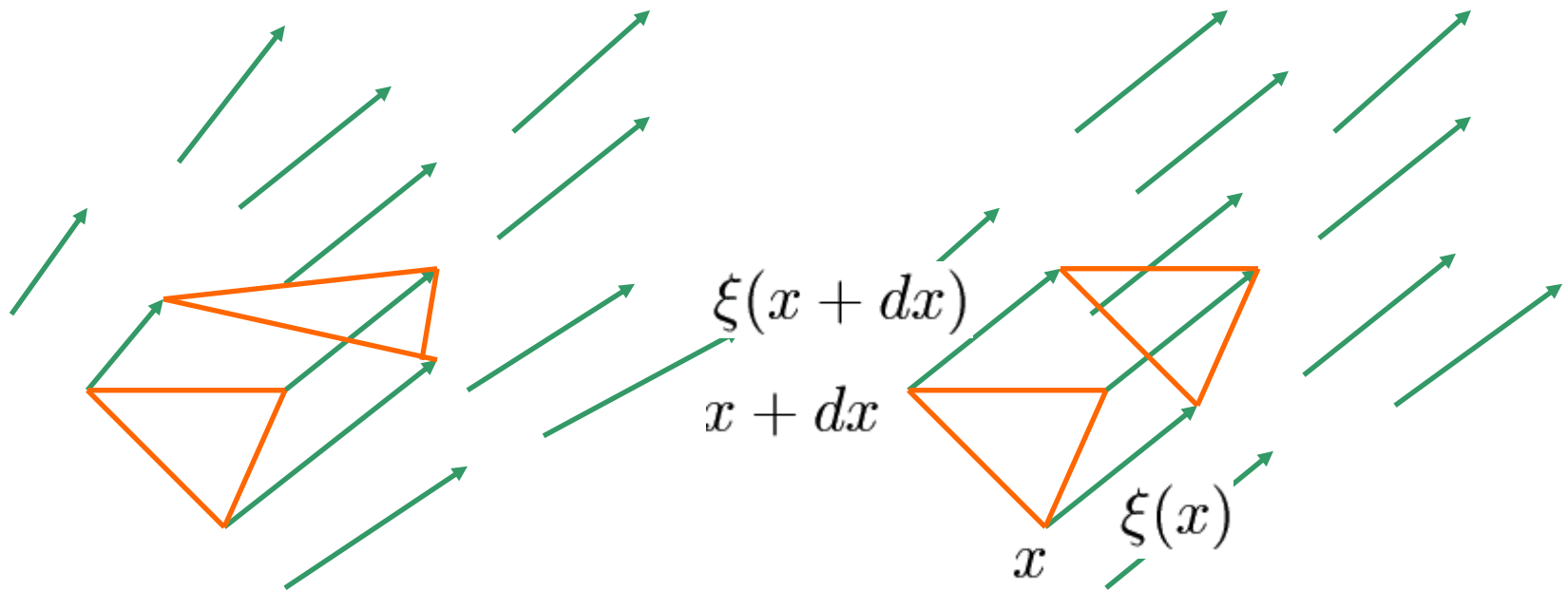
無限小のずらしはベクトルである

z に共役な運動量は保存量



空間の対称性を表す
Killing ベクトル

Killing vector



$$g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x + \xi)(dx + \xi(x + dx) - \xi(x))^\mu (\dots)^\nu$$

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad \text{Killing 方程式}$$

Killing vector $\xi(x)$ は合同な図形の写像を引き起こす
Killing vectorの存在は時空の対称性を表す

SchwarzschildのKilling vector

Schwarzschild 計量

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Killing ベクトル

$$\xi_{(t)} = \partial_t \quad \xi_{(\phi)} = \partial_\phi \quad \text{etc}$$

Killing ベクトルの norm

$$\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)} = g_{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) < 0 \quad \text{for } r > 2M$$

timelike Killing vector : 時間一様性(定常性)

$$\xi_{(\phi)} \cdot \xi_{(\phi)} = g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \geq 0$$

spacelike Killing vector : 空間的一様性(等方性)

一様非等方宇宙

宇宙のビッグバン特異点は
過去にあった！

Schwarzschild 計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= \left(\frac{2M}{r} - 1 \right) dt^2 - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -dT^2 + a(T)^2 dx^2 + b(T)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned}$$

$$dT = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} dr, \quad dx = dt$$

$$T \rightarrow T_c \quad b(T) \rightarrow 0$$

ブラックホールの特異点は
ホライズンの中に入ると未来にある！

まとめ

- ブラックホールとは、重力が強くて 光さえ逃げ出せない物体である。
- ブラックホールの地平線の内側からは、光が外に出ることができない。
- ブラックホールの中心には、時空の特異点がある。



無限遠に到達する光を出せる領域と、無限遠に到達する光を出せない領域がある場合、その時空をブラックホールと呼び、それらの領域の境界を Event Horizon と呼ぶ。

閉じた曲面から外向きに出る光線束が広がらないとき、その曲面を Apparent Horizon と呼ぶ。Apparent Horizon の外側に Event Horizon がある。

Schwarzschild black hole は Event Horizon の中に時空特異点をもつ。その特異点は、空間的に広がっており、中心というより、むしろ未来にある。